# 2024 北京五中高三（下）开学考

# 数　学

班级__________姓名__________学号_________成绩

**一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置．）**

1. 集合 $A=\{x|\ x^2-x-6<0\}, B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{-2,-1,0,1,2,3\}$　　B. $\{-2,-1,0,1\}$

C. $\{-1,0,1,2\}$　　D. $\{-2,-1,0,1,2\}$

2. 如果复数 $\dfrac{2-b\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$（其中 i 为虚数单位，$b$ 为实数）为纯虚数，那么 $b=$（　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. $-4$

3. 已知 $(x-1)^4+2x^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5$，则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5=$（　）

A. $-2$　　B. 2　　C. 4　　D. 12

4. 有三对师徒共 6 个人，站成一排照相，每对师徒相邻的站法共有（　）

A. 72 种　　B. 48 种　　C. 54 种　　D. 8 种

5. 已知点 $A(0,1)$，$B(1,0)$，动点 $C$ 在圆 $x^2+y^2=2$ 上，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最大值为（　）

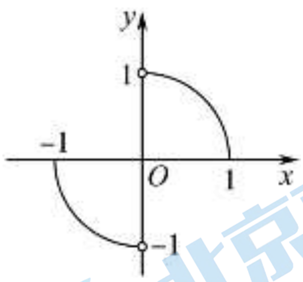
A. $-1$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}+1$　　D. 3

6. 若函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 的最大值为 2，则下列结论不一定成立的是（　）

A. $a^2+b^2=4$　　B. $ab\le 2$

C. $(a+b)^2\le 8$　　D. $(a-b)^2\le 4$

7. 函数 $y=f(x)$ 的图象是圆心在原点的单位圆的两段弧（如图），则不等式 $f(x)<f(-x)+x$ 的解集为（　）



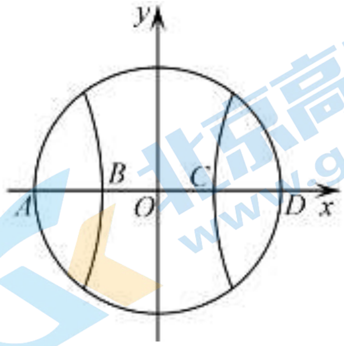

A. $\left\{x\middle|-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}<x<0 \text{或} \dfrac{2\sqrt{5}}{5}<x\le 1\right\}$

B. $\left\{x\middle|-1<x<-\frac{\sqrt{5}}{5}\text{或}\frac{\sqrt{5}}{5}<x\leq 1\right\}$

C. $\left\{x\middle|-1<x<-\frac{\sqrt{5}}{5}\text{或}0<x<\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$

D. $\left\{x\middle|-\frac{2\sqrt{5}}{5}<x<\frac{2\sqrt{5}}{5},x\neq 0\right\}$

8. 从某个角度观察篮球可以得到一个对称的平面图形如图所示，篮球的外轮廓为圆 $O$，将篮球表面的粘合线视为坐标轴和双曲线，若坐标轴和双曲线与圆 $O$ 的交点将圆的周长 8 等分，且 $AB=BO=OC=CD$，则该双曲线的离心率为（　）



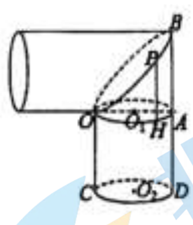

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

9. 已知公比不为 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n, m, r, t\in\mathbf{N}^*$，记 $p$：$S_m, S_r, S_t$ 为等差数列；$q$：对任意自然数 $k, a_{m+k}, a_{r+k}, a_{t+k}$ 为等差数列，则 $p$ 是 $q$ 的（　）

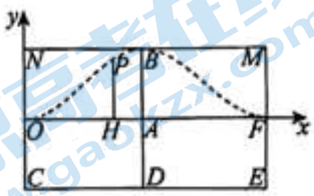
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

10. 某同学所在的课外兴趣小组计划用纸板制作一个简易潜望镜模型（图甲），该模型由两个相同的部件拼接粘连制成，每个部件由长方形纸板 $NCEM$（图乙）沿虚线裁剪后卷一周形成，其中长方形 $OCEF$ 卷后为圆柱 $O_1O_2$ 的侧面．现建立如图所示的以 $O$ 为坐标原点的平面直角坐标系．设 $P(x,y)$ 为裁剪曲线上的点，作 $PH\perp x$ 轴，垂足为 $H$．图乙中线段 $OH$ 卷后形成的圆弧 $\overset{\frown}{OH}$（图甲），通过同学们的计算发现 $y$ 与 $x$ 之间满足关系式 $y=1-\cos\frac{x}{2}(0\leq x<4\pi)$，求该裁剪曲线围成的椭圆的离心率为（　）




甲




乙

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

## 二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 18 分，请把结果填在答题纸上的相应位置.）

11. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F$，过 $F$ 的动直线 $l$ 与抛物线交于 $A,B$ 两点，满足 $|AB|=4$ 的直线 $l$ 有且仅有一条，则抛物线的准线方程为__________.

12. 已知角 $\alpha$ 的终边经过点 $P\left(2,\tan\alpha-\dfrac{3}{4}\right)$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=$__________.

13. 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_5+a_9=a_6+8$，则 $a_5$=______；若 $a_1=16$，则 n=______时，$\{a_n\}$ 的前 n 项和取得最大值.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+a? \ x<2?\\ a-x,\ x\geq 2.\end{cases}$

（1）若 $a=-\sqrt{2}$，则 $f(x)$ 的零点是______.

（2）若 $f(x)$ 无零点，则实数 $a$ 的取值范围是______.

15. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，则有以下四个结论：

①若 $a_5=0$，则 $S_9=0$

②若 $S_6-S_9=a_{10}$，且 $a_2>a_1$，则 $a_8<0$ 且 $a_9>0$

③若 $S_{16}=64$，且在前 16 项中，偶数项的和与奇数项的和之比为 3:1，则公差为 2

④若 $(n+1)S_n>nS_{n+1}$，且 $a_2^2=a_6^2$，则 $S_3$ 和 $S_4$ 均是 $S_n$ 的最大值

其中正确命题的序号为___________.

## 三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．请把结果填在答题纸上的相应位置.）

16. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，且满足 $a=2$，$b\sin B+c\sin C-2\sin A=b\sin C$.

（1）求 A 的大小；

（2）已知 $AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，求 $AD$ 的最大值.

17. 甲、乙两名同学积极参与体育锻炼，对同一体育项目，在一段时间内甲进行了 6 次测试，乙进行了 7 次测试.每次测试满分均为 100 分，达到 85 分及以上为优秀.两位同学的测试成绩如下表：

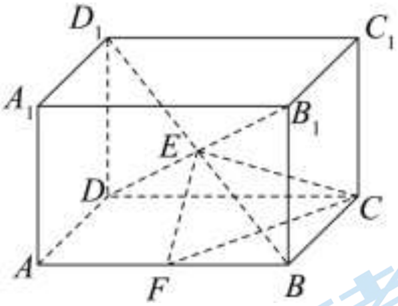
| 次数 / 同学 | 第一次 | 第二次 | 第三次 | 第四次 | 第五次 | 第六次 | 第七次 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 甲 | 80 | 78 | 82 | 86 | 95 | 93 | — |
| 乙 | 76 | 81 | 80 | 85 | 89 | 96 | 94 |

（1）从甲、乙两名同学共进行的 13 次测试中随机选取一次，求该次测试成绩超过 90 分的概率；

（2）从甲同学进行的 6 次测试中随机选取 4 次，设 $X$ 表示这 4 次测试成绩达到优秀的次数，求 $X$ 的分布列及数学期望 $EX$；

（3）从乙同学进行的 7 次测试中随机选取 3 次，设 $Y$ 表示这 3 次测试成绩达到优秀的次数，试判断数学期望 $EY$ 与（2）中 $EX$ 的大小.（结论不要求证明）

18. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AD=2$，$BD_1$ 和 $B_1D$ 交于点 $E$，$F$ 为 $AB$ 的中点.



（1）求证：$EF$ // 平面 $ADD_1A_1$；

（2）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求

（i）平面 $CEF$ 与平面 $BCE$ 的夹角的余弦值；

（ii）点 $A$ 到平面 $CEF$ 的距离.

条件①：$CE\perp B_1D$；

条件②：直线 $B_1D$ 与平面 $BCC_1B_1$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

19. 已知函数 $f(x)=e^{2x}-ax-1(a\in R)$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求 $a$ 的取值范围；

（3）证明：若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 $x_0$，则 $x_0<a-2$.

20. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且其左顶点到椭圆外的直线 $x=4$ 的距离为 $4+2\sqrt{2}$.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）过点 $P(2,0)$ 且斜率为 $k$ 的直线 $AB$ 交椭圆 $C$ 于 $A,B$ 两点，$T$ 为直线 $x=4$ 上的动点，直线 $AT,BT$ 分别交直线 $x=2$ 于 $M,N$（异于 $A,B$），求线段 $MN$ 的中点坐标.

21. 已知数列 $A$：$a_1,a_2,\cdots,a_N(N\geq 3)$ 的各项均为正整数，设集合 $T=\{x\,|\,x=a_j-a_i,1\leq i<j\leq N\}$，记 $T$ 的元素个数为 $P(T)$.

（1）若数列 $A$：1，2，4，3，求集合 $T$，并写出 $P(T)$ 的值；

（2）若 $A$ 是递增数列，求证：“$P(T)=N-1$”的充要条件是“$A$ 为等差数列”；

（3）若 $N=2n+1$，数列 $A$ 由 $1,2,3,\cdots,n,2n$ 这 $n+1$ 个数组成，且这 $n+1$ 个数在数列 $A$ 中每个至少出现一次，求 $P(T)$ 的取值个数．

# 参考答案

**一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.）**

1.【答案】C

【分析】解二次不等式化简集合 A，再利用集合的交集运算即可得解.

【详解】因为 $A=\{x|\ x^2-x-6<0\}=\{x|-2<x<3\}$，

又 $B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,1,2\}$.

故选：C.

2.【答案】A

【分析】根据给定条件利用复数的除法运算化简复数，再结合复数的分类即可作答.

【详解】 $\frac{2-bi}{1+2i}=\frac{(2-bi)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{(2-2b)+(-b-4)i}{5}=\frac{2-2b}{5}+\frac{-b-4}{5}i$，因复数 $\frac{2-bi}{1+2i}$ 为纯虚数，

于是得 $\frac{2-2b}{5}=0$ 且 $\frac{-b-4}{5}\neq 0$，解得 $b=1$，

所以 $b=1$.

故选：A

3.【答案】B

【分析】利用赋值法，即令 $x=1$，即可求得答案.

【详解】由于 $(x-1)^4+2x^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5$，

故令 $x=1$，即得 $(1-1)^4+2\times 1^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5$，

即 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5=2$，

故选：B

4.【答案】B

【分析】因为每对师徒必须相邻，所以，三对师徒进行捆绑，则有 $A_2^2\cdot A_2^2\cdot A_2^2=8$，捆绑后再次进行排列，则有 $A_3^3=6$ 种组合拍列，所以，每对师徒相邻的站法共有 $6\times 8=48$ 种

【详解】由题意得每对师徒相邻的站法共有 $A_2^2\cdot A_2^2\cdot A_2^2\cdot A_3^3=48$

故选：B

【点睛】本题考查排列组合中的相邻问题，属于简单题

5.【答案】D

【分析】根据三角换元得 $C\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$，即可根据向量的坐标运算求解，结合三角函数的性质即可求解最值.

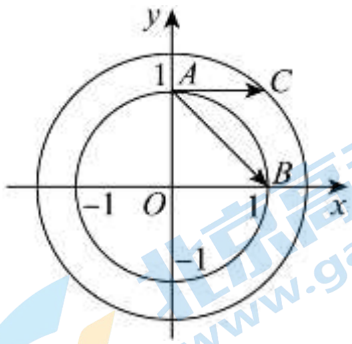
【详解】不妨设$C\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$，$0\le\theta<2\pi$．

因为$A(0,1)$，$B(1,0)$，则$\overrightarrow{AB}=(1,-1)$，$\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta-1\right)$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta+1=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)+1\le 3$．

当$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=1$时，即$\theta=\dfrac{7\pi}{4}$时等号成立，

故选:D.




6.【答案】D

【分析】根据辅助角公式，可得$a^2+b^2=4$，根据基本不等式，逐一分析各个选项，即可得答案.

【详解】因为$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$，且最大值为$\sqrt{a^2+b^2}$，

所以$\sqrt{a^2+b^2}=2$，即$a^2+b^2=4$，故A一定成立;

又$4=a^2+b^2\ge 2ab$，所以$ab\le 2$，

当且仅当$a=b$时等号成立，故B一定成立;

又$\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，所以$(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)=8$，

当且仅当$a=b$时等号成立，故C一定成立;

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=4-2ab$，当$ab$同号时，$4-2ab\le 4$，

当$ab$异号时，$4-2ab>4$，故D不一定成立.

故选：D

7.【答案】A

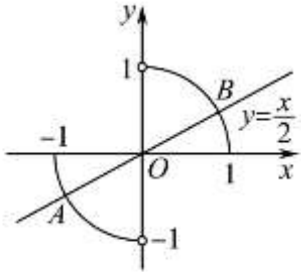
【分析】根据函数$y=f(x)$的图象得到函数是奇函数，然后将不等式$f(x)<f(-x)+x$转化为

$f(x)<\dfrac{x}{2}$，利用数形结合法求解.

【详解】由函数$y=f(x)$的图象知：函数是奇函数，

所以不等式$f(x)<f(-x)+x$等价于$f(x)<\dfrac{x}{2}$，

如图所示：




函数 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=\frac{x}{2}$ 的图象的交点是 $A\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right),B\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$，

所以 $f\left(x\right)<\frac{x}{2}$ 的解集为：$\left\{x|-\frac{2\sqrt{5}}{5}<x<0\text{或}\frac{2\sqrt{5}}{5}<x\le 1\right\}$，

故选：A

【点睛】本题主要考查不等式的解法以及函数奇偶性的应用，还考查了数形结合的思想方法，属于基础题.

8.【答案】C

【分析】建立坐标系，利用已知条件求出双曲线的实半轴的长，虚半轴的长，然后求解半焦距，推出离心率即可.

【详解】解：以 $O$ 为原点，$AD$ 所在直线为 $x$ 轴建系，

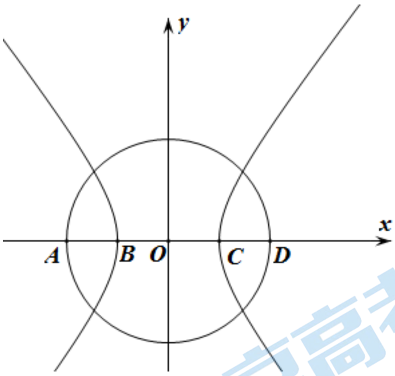
不妨设 $AB=BO=OC=CD=1$，

则该双曲线过点 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 且 $a=1$，

将点 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 代入方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，即 $\frac{(\sqrt{2})^2}{1^2}-\frac{(\sqrt{2})^2}{b^2}=1$，解得 $b^2=2$，所以 $c^2=a^2+b^2=3$，

故离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，

故选：C.




9.【答案】C

【分析】根据条件得出命题 $p,q$ 均等价于 $2q^r=q^m+q^t$，再根据充分条件和必要条件的判断方法，即可得出结果.

【详解】因为命题 $p:S_m,S_r,S_t$ 成等差数列，所以 $2S_r=S_m+S_t$，又数列 $\left\{a_n\right\}$ 为等比数列，且公比不为

1，

所以 $2\times\frac{a_1(1-q^r)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^m)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^t)}{1-q}$，整理得到 $2q^r=q^m+q^t$，

又命题 $q:a_{m+k},a_{r+k},a_{t+k}$ 成等差数列，所以 $2a_{r+k}=a_{m+k}+a_{t+k}$，即 $2a_1q^{r+k}=a_1q^{m+k}+a_1q^{t+k}$，整理得到

$2q^r=q^m+q^t$，

所以 $p$ 是 $q$ 的充要条件，

故选：C.

10. 【答案】B

【分析】结合题意，利用函数 $y=1-\cos\frac{x}{2}(0\le x<4\pi)$ 的周期，求出圆柱底面圆半径，继而求得椭圆短轴长，结合函数的最大值求得椭圆的长轴长，结合椭圆的离心率定义，即可求得答案.

【详解】函数 $y=1-\cos\frac{x}{2}(0\le x<4\pi)$ 的最小正周期为 $4\pi$，

所以相应圆柱的底面圆的周长为 $4\pi$，故其直径为 4，

故根据题意可知该椭圆的短轴长为 $2b=4$，即 $b=2$，

又 $y=1-\cos\frac{x}{2}(0\le x<4\pi)$ 的最大值为 2，

故椭圆的长轴长为 $2a=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，解得 $a=\sqrt{5}$

故 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5-4}=1$，

故椭圆的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选：B.

**二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 18 分，请把结果填在答题纸上的相应位置.）**

11. 【答案】$y^2=4x$

【分析】设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，设 $l$ 方程为 $x=my+\frac{p}{2}$，联立抛物线方程，可得根与系数关系式，求出 $|AB|$ 的表达式，说明当 $|AB|$ 取最小值时，满足 $|AB|=4$ 的直线 $l$ 有且仅有一条，即可求得 $p$ 的值，即可求得答案.

【详解】设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由题意知过 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 的动直线 $l$ 的斜率不为 0，

故设其方程为 $x=my+\frac{p}{2}$，联立 $y^2=2px(p>0)$，

得 $y^2-2pmy-p^2=0$，$\Delta=4p^2m^2+4p^2>0$，

故 $y_1+y_1=2pm$，

又 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=my_1+\frac{p}{2}+my_2+\frac{p}{2}+p$

$=m(y_1+y_2)+2p=2pm^2+2p\geq 2p$，

当且仅当 $m=0$ 时，等号成立，

即此时 $|AB|$ 取最小值 $2p$，即此时满足 $|\mathrm{AB}|=4$ 的直线 $l$ 有且仅有一条，

即 $2p=4, p=2$，

故抛物线的准线方程为 $y^2=4x$，

故答案为：$y^2=4x$

12.【答案】$\frac{1}{5}$

【分析】根据三角函数定义得到方程，求出 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，进而求出正弦和余弦，求出答案.

【详解】由题意得 $\tan\alpha=\dfrac{\tan\alpha-\frac{3}{4}}{2}$，解得 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，

故 $P\left(2,-\frac{3}{2}\right)$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{4+\frac{9}{4}}}=\frac{4}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{4+\frac{9}{4}}}=-\frac{3}{5}$，

故 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$.

故答案为：$\frac{1}{5}$

13.【答案】 ①. 4 ②. 6

【分析】由等差数列的通项公式即可求出 $a_5$，再结合 $a_1=16$，得到 $d=-3$，然后求出使 $\begin{cases}a_n>0\\a_{n+1}<0\end{cases}$ 时 $n$ 的正整数解即可.

【详解】等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_5+a_9=a_6+8$，

所以 $3a_1+13d=a_1+5d+8$，即 $a_5=4$，

$a_1=16$，所以 $4d=a_5-a_1=4-16$，所以 $d=-3$.

令 $\begin{cases}a_n>0\\a_{n+1}<0\end{cases}$，解得 $n=6$，所以 $\{a_n\}$ 的前 6 项和取得最大值.

故填：4，6.

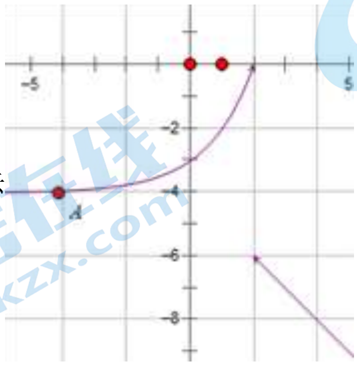
【点睛】本题考查等差数列通项公式的求法以及等差数列的单调性问题，还考查了学生转化的思想，属于

基础题.

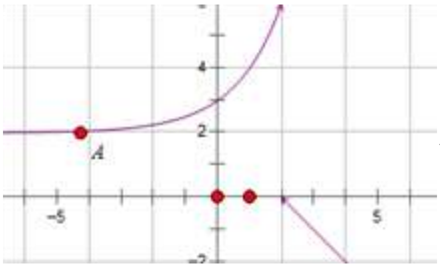
14.【答案】 ①. $\frac{1}{2}$ ②. $(-\infty,-4]\cup[0,2)$

【详解】(1) 若 $a=-\sqrt{2}$，则 $f(x)=\begin{cases}2^x+\sqrt{2}, x<2,\\ -\sqrt{2}-x, x\geq 2.\end{cases}$，令 $f(x)=0$ 可得 $x=\frac{1}{2}$，即 $f(x)$ 的零点是

$\frac{1}{2}$

(2) 若 $f(x)$ 无零点，则如图所示  当 $x=2, 2^x+a=0, \therefore a=-4$ 此时，应有

$a<-4$，

当 $x=2, a-2=0, \therefore a=2$ 如图所示， 此时应有 $0<a<2$，

综上可得 $a\in(-\infty,-4]\cup[0,2)$ .

15.【答案】①②④

【分析】利用等差数列的通项公式、下标和性质与前 $n$ 项和公式，依次分析各结论即可得解.

【详解】对于①，因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_5=0$，

所以 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=0$，故①正确；

对于②，因为 $a_2>a_1$，所以 $d=a_2-a_1>0$，即 $\{a_n\}$ 是递增数列，

因为 $S_6-S_9=a_{10}$，即 $S_9-S_6=-a_{10}$，所以 $a_9+a_8+a_7=-a_{10}$，

即 $a_{10}+a_9+a_8+a_7=0$，则 $a_8+a_9=0$，

所以 $a_8<0$ 且 $a_9>0$，故②正确；

对于③，因为 $S_{16}=64$，所以 $\frac{16(a_1+a_{16})}{2}=64$，则 $a_1+a_{16}=8$，则 $a_8+a_9=8$，

又 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}+a_{14}+a_{16}=8a_9$，

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}+a_{13}+a_{15}=8a_8$，

所以$8a_9=3\times 8a_8$，即$a_9=3a_8$，故$4a_8=8$，得$a_8=2$，$a_9=6$，

所以$\{a_n\}$的公差为$a_9-a_8=4$，故③错误；

对于④，因为$(n+1)S_n>nS_{n+1}$，即$\frac{S_n}{n}>\frac{S_{n+1}}{n+1}$，

即$\frac{1}{n}\left[na_1+\frac{n(n-1)}{2}d\right]>\frac{1}{n+1}\left[(n+1)a_1+\frac{n(n+1)}{2}d\right]$，整理得$d<0$，

因为$a_2^2=a_6^2$，所以$(a_6+a_2)(a_6-a_2)=0$，

由于$a_6-a_2=4d\neq 0$，所以$a_6+a_2=0$，故$2a_4=0$，即$a_4=0$，

因为$d<0$，所以$\{a_n\}$是递减数列，则$a_3>0$，$a_5<0$，

所以$S_3>S_2>S_1$，$S_3=S_4>S_5>S_6>\cdots$，

故$S_3$和$S_4$均是$S_n$的最大值，故④正确.

故答案为：①②④.

**三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．请把结果填在答题纸上的相应位置.）**

16.【答案】（1）$A=\frac{\pi}{3}$

（2）$\sqrt{3}$

【分析】（1）利用正弦定理角化边，化简$b\sin B+c\sin C-2\sin A=b\sin C$，可得$b^2+c^2-a^2=bc$，结合余弦定理即可求得答案；

（2）由$a=2$，$b^2+c^2-a^2=bc$，利用基本不等式可得$bc\leq 4$，再根据$AD$是$\triangle ABC$的中线，可得$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，平方后结合数量积的运算可得$\overrightarrow{AD}^2\leq 3$，即可求得答案.

【小问 1 详解】

由于在$\triangle ABC$中，$a=2$，$b\sin B+c\sin C-2\sin A=b\sin C$，

则$b^2+c^2-a^2=bc$，则$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，

由于$A\in(0,\pi)$,$\therefore A=\frac{\pi}{3}$；

【小问 2 详解】

因为$a=2$，$b^2+c^2-a^2=bc$，所以$b^2+c^2=bc+4$，

故$bc+4=b^2+c^2\geq 2bc$，当且仅当$\begin{cases}b=c\\ b^2+c^2=bc+4\end{cases}$，即$b=c=2$时等号成立，

故$bc\leq 4$；

由 $AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

即得 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\right)$

$=\frac{1}{4}\left(c^2+2bc\cos A+b^2\right)$

$=\frac{1}{4}\left[2\left(c^2+b^2\right)-4\right]=\frac{1}{4}\left[2\left(bc+4\right)-4\right]=\frac{1}{2}\left(bc+2\right)\le 3$，

即得 $|\overrightarrow{AD}|\le\sqrt{3}$，故 $AD$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

17.【答案】（1）$\frac{4}{13}$

（2） $X$ 的分布列为

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

所以 $E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=\frac{10}{5}=2$.

（3） $E(X)>E(Y)$

【分析】（1）根据表格中的数据，代入古典概型的概率计算公式即可求解；

（2）根据题意先求出所有 $X$ 的可能取值，然后分别求出每一个值对应的概率，列出分布列并计算出期望即可求解；

（3）根据题意先求出所有 $Y$ 的可能取值，然后分别求出每一个值对应的概率，计算出期望与（2）中期望即可求解；

【小问 1 详解】

由题意可知：甲、乙两名同学共进行的 13 次测试中，测试成绩超过 90 分的共 4 次，由古典概型的概率计算公式可得 $P=\frac{4}{13}$，

所以从甲、乙两名同学共进行的 13 次测试中随机选取一次，求该次测试成绩超过 90 分的概率 $P=\frac{4}{13}$.

【小问 2 详解】

由题意可知：从甲同学进行的 6 次测试中随机选取 4 次，这 4 次测试成绩达到优秀的次数 $X$ 的可能取值为 1，2，3，

则 $P(X=1)=\frac{C_3^3C_3^1}{C_6^4}=\frac{1\times3}{15}=\frac{1}{5}$； $P(X=2)=\frac{C_3^2C_3^2}{C_6^4}=\frac{3\times3}{15}=\frac{3}{5}$； $P(X=3)=\frac{C_3^3C_3^1}{C_6^4}=\frac{1\times3}{15}=\frac{1}{5}$，

所以 $X$ 的分布列为

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- |
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

所以 $E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=\frac{10}{5}=2$.

【小问 3 详解】

由题意可知：从乙同学进行的 7 次测试中随机选取 3 次，这 3 次测试成绩达到优秀的次数 $Y$ 的可能取值为 0，1，2，3，

则 $P(Y=0)=\frac{C_3^3C_4^0}{C_7^3}=\frac{1\times1}{35}=\frac{1}{35}$；$P(Y=1)=\frac{C_3^2C_4^1}{C_7^3}=\frac{3\times4}{35}=\frac{12}{35}$；$P(Y=2)=\frac{C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\frac{3\times6}{35}=\frac{18}{35}$；

$P(Y=3)=\frac{C_3^0C_4^3}{C_7^3}=\frac{1\times4}{35}=\frac{4}{35}$；

所以 $Y$ 的分布列为

| $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $P$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{12}{35}$ | $\frac{18}{35}$ | $\frac{4}{35}$ |

所以 $E(Y)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$，

$E(X)>E(Y)$.

18.【答案】（1）证明见解析

（2）（i）$\frac{\sqrt{6}}{3}$ （ii） 1

【分析】（1）利用空间中直线与平面平行的判定定理，结合三角形中位线即可证明；

（2）若选条件①，利用 $CE\perp B_1D$，通过推理论证得到 $CD=B_1C=2\sqrt{2}$，建立空间直角坐标系，求平面法向量，再根据面面夹角的向量公式及点到面的距离公式运算求解；

若选条件②，利用 $B_1D$ 与平面 $BCC_1B_1$ 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，通过推理论证得到 $CD=B_1C=2\sqrt{2}$，建立空间直角坐标系，求平面法向量，再根据面面夹角的向量公式及点到面的距离公式运算求解.

【小问 1 详解】

如图，连接 $AD_1$，$B_1D_1$，$BD$.

因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1 \parallel DD_1$ 且 $BB_1=DD_1$，

所以四边形 $BB_1D_1D$ 为平行四边形.

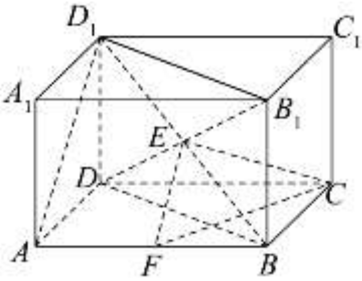
所以 $E$ 为 $BD_1$ 的中点，

在$\triangle ABD_1$中，因为$E$，$F$分别为$BD_1$和$AB$的中点，

所以$EF \parallel AD_1$.

因为$EF \not\subset$平面$ADD_1A_1$，$AD_1 \subset$平面$ADD_1A_1$，

所以$EF \parallel$平面$ADD_1A_1$.




【小问 2 详解】

选条件①：$CE \perp B_1D$.

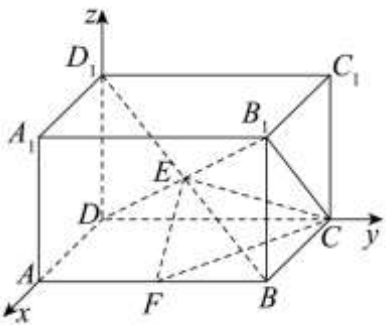
(ⅰ)连接$B_1C$.

因为长方体中$AA_1 = AD = 2$，所以$B_1C = 2\sqrt{2}$.

在$\triangle CBD_1$中，因为$E$为$B_1D$的中点，$CE \perp B_1D$，

所以$CD = B_1C = 2\sqrt{2}$.

如图建立空间直角坐标系$D-xyz$，因为长方体中$A_1A = AD = 2$，$CD = 2\sqrt{2}$，




则$D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,2\sqrt{2},0)$，$B(2,2\sqrt{2},0)$，$F(2,\sqrt{2},0)$，

$B_1(2,2\sqrt{2},2)$，$E(1,\sqrt{2},1)$.

所以$\overrightarrow{CE} = (1,-\sqrt{2},1)$，$\overrightarrow{CF} = (2,-\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{CB} = (2,0,0)$.

设平面$CEF$的法向量为$\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$，

则$\begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{CE} = 0, \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CF} = 0, \end{cases}$即$\begin{cases} x_1 - \sqrt{2}y_1 + z_1 = 0, \\ 2x_1 - \sqrt{2}y_1 = 0. \end{cases}$

令$x_1 = 1$，则$y_1 = \sqrt{2}$，$z_1 = 1$，可得$\vec{m} = (1,\sqrt{2},1)$.

设平面$BCE$的法向量为$\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x_2-\sqrt{2}y_2+z_2=0,\\ 2x_2=0.\end{cases}$

令$y_2=1$，则$x_2=0$，$z_2=\sqrt{2}$，所以$\vec{n}=(0,1,\sqrt{2})$.

设平面$CEF$与平面$BCE$的夹角为$\theta$，

则$\cos\theta=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以平面$CEF$与平面$BCE$的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(ⅱ)因为$\overrightarrow{AF}=(0,\sqrt{2},0)$，

所以点A到平面$CEF$的距离为$d=\dfrac{|\overrightarrow{AF}\cdot\vec{m}|}{|\vec{m}|}=1$.

选条件②：$B_1D$与平面$BCC_1B_1$所成角为$\dfrac{\pi}{4}$.

连接$B_1C$.

因为长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$CD\perp$平面$BCC_1B_1$，$B_1C\subset$平面$BCC_1B_1$，

所以$CD\perp B_1C$.

所以$\angle DB_1C$为直线$B_1D$与平面$BCC_1B_1$所成角，即$\angle DB_1C=\dfrac{\pi}{4}$.

所以$\triangle DB_1C$为等腰直角三角形.

因为长方体中$AA_1=AD=2$，所以$B_1C=2\sqrt{2}$.

所以$CD=B_1C=2\sqrt{2}$.

以下同选条件①.

19.【答案】(1）答案见解析

（2）$a\le 2$

（3）证明见解析

【分析】(1）讨论$a\le 0$、$a>0$，结合导数的符号确定单调区间;

（2）由$f'(x)=2e^{2x}-a$，讨论$a\le 2$、$a>2$研究导数符号判断$f(x)$单调性，进而判断题设不等式是否恒成立，即可得参数范围;

（3）根据（2）结论及零点存在性确定$a>2$时$f(x)$在$(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2},+\infty)$上存在唯一零点，由零点性质及区间单调性，应用分析法将问题转化为证$f(a-2)>0$在$a>2$上恒成立，即可证结论.

【小问1详解】

由题设 $f'(x)=2e^{2x}-a$，

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 R 上递增；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$，

若 $x<\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$ 上递减；

若 $x>\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 上递增；

综上，$a\le 0$ 时 $f(x)$ 的递增区间为 R，无递减区间；

$a>0$ 时 $f(x)$ 的递减区间为 $(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$，递增区间为 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$.

【小问 2 详解】

由 $f'(x)=2e^{2x}-a$，

当 $a\le 2$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，则 $f(x)>f(0)=0$，满足要求；

当 $a>2$ 时，由（1）知：$f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$ 上递减，在 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 上递增，而 $\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$ 上递减，在 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 上递增，要使 $f\left(x\right)>0$ 对 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 恒成立，

所以，只需 $f(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}-1>0$，

令 $g(x)=x-x\ln x-1$ 且 $x>1$，则 $g'(x)=-\ln x<0$，即 $g(x)$ 递减，

所以 $g(x)<g(1)=0$，故在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 上 $f\left(x\right)>0$ 不存在 $a>2$；

综上，$a\le 2$

【小问 3 详解】

由（2）知：$a\le 2$ 时，在 $(0,+\infty)$ 恒有 $f(x)>0$，故不可能有零点；

$a>2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$ 上递减，在 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 上递增，且 $f(0)=0$，

所以 $(0,\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})$ 上 $f(x)<0$，无零点，即 $f(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2})<0$，且 $x$ 趋向于正无穷时 $f(x)$ 趋向正无穷，

所以，在 $(\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2},+\infty)$ 上存在唯一 $x_0$，使 $f(x_0)=e^{2x_0}-ax_0-1=0$，

要证 $x_0<a-2$，只需 $f(a-2)=e^{2(a-2)}-a(a-2)-1>0$ 在 $a>2$ 上恒成立即可，

令 $t=a-2>0$，若 $h(t)=e^{2t}-t(t+2)-1$，则 $h'(t)=2(e^{2t}-t-1)$，

令 $p(t)=e^{2t}-t-1$，则 $p'(t)=2e^{2t}-1>0$，即 $p(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，故 $p(t)>p(0)=0$，

所以 $h'(t)>0$，即 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，故 $h(t)>h(0)=0$，

所以 $f(a-2)=e^{2(a-2)}-a(a-2)-1>0$ 在 $a>2$ 上恒成立，得证；

故 $x_0<a-2$，得证.

【点睛】关键点点睛：第三问，通过讨论确定 $f(x)$ 在某一单调区间上存在唯一零点的 $a$ 的范围后，应用分析法证 $f(a-2)>0$ 恒成立即可.

20.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$

(2) $(2,0)$

【分析】(1) 根据题意，利用离心率和左顶点到椭圆外的直线 $x=4$ 的距离列方程组得到 $a,c$ 的值，从而得到椭圆的标准方程；

(2) 设直线 $AB$ 的方程为 $x=my+2(m\neq 0)$，再代入椭圆方程，整理后应用韦达定理得 $y_1+y_2,y_1y_2$，然后利用直线 $AT,BT$ 分别交直线 $x=2$ 得 $M,N$ 的坐标，从而求线段 $MN$ 的中点坐标.

【小问 1 详解】

由题意知椭圆的左顶点坐标为 $(-a,0)$，又左顶点到椭圆外的直线 $x=4$ 的距离为 $4+2\sqrt{2}$，

所以 $|4+a|=4+2\sqrt{2},a>0$，得 $a=2\sqrt{2}$，

又椭圆的离心率为 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{6}$，

在椭圆中，$b^2=a^2-c^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2=2$，

所以椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

【小问 2 详解】

设过点 $P(2,0)$ 且斜率为 $k=0$ 的直线 $AB$ 的直线方程为 $y=0$，代入椭圆方程可得 $x^2=8$，即 $x=\pm 2\sqrt{2}$，则 $A\left(-2\sqrt{2},0\right),B\left(2\sqrt{2},0\right)$，

由 $T$ 为直线 $x=4$ 上的动点，设 $T(4,t)$，则直线 $AT$ 的方程为 $\dfrac{y-0}{t-0}=\dfrac{x+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\dfrac{\left(x+2\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$，

即 $y=\dfrac{\left(x+2\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)t}{4}$，把 $x=2$ 代入得 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t$，即 $M\left(2,\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)$，

同理，则直线 $BT$ 的方程为 $\dfrac{y-0}{t-0}=\dfrac{x-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}=\dfrac{\left(x-2\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}{4}$，把 $x=2$ 代入得 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t$，

即 $N\left(2,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)$，则线段 $MN$ 的中点坐标 $\left(\dfrac{2+2}{2},\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t}{2}\right)$，即 $(2,0)$.

设过点 $P(2,0)$ 且斜率为 $k\neq 0$ 的直线 $AB$ 的直线方程为 $x=my+2\left(m\neq 0\right)$，

与椭圆联立方程组，即 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ x=my+2\end{cases}$，则 $\left(my+2\right)^2+4y^2-8=0$，

整理得 $\left(m^2+4\right)y^2+4my-4=0$．

因为 $\Delta=\left(4m\right)^2-4\left(m^2+4\right)\left(-4\right)=32\left(m^2+2\right)>0$，

所以，设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，由韦达定理可得 $y_1+y_2=\dfrac{-4m}{m^2+4}$①，$y_1y_2=\dfrac{-4}{m^2+4}$②；

由 $T$ 为直线 $x=4$ 上的动点，设 $T\left(4,t\right)$，

则直线 $AT$ 的方程为 $\dfrac{y-t}{y_1-t}=\dfrac{x-4}{x_1-4}$，即 $y=\dfrac{\left(x-4\right)\left(y_1-t\right)}{x_1-4}+t$，

代入 $x=2$，$x_1=my_1+2$ 得 $y_M=\dfrac{-2\left(y_1-t\right)}{my_1+2-4}+t=\dfrac{-2\left(y_1-t\right)}{my_1-2}+t$，即 $M\left(2,\dfrac{-2\left(y_1-t\right)}{my_1-2}+t\right)$，

同理，直线 $BT$ 的方程为 $y=\dfrac{\left(x-4\right)\left(y_2-t\right)}{x_2-4}+t$，与直线 $x=2$ 的交点 $N\left(2,\dfrac{-2\left(y_2-t\right)}{my_2-2}+t\right)$.

线段 $MN$ 的中点坐标 $\left(2,\dfrac{y_M+y_N}{2}\right)$，

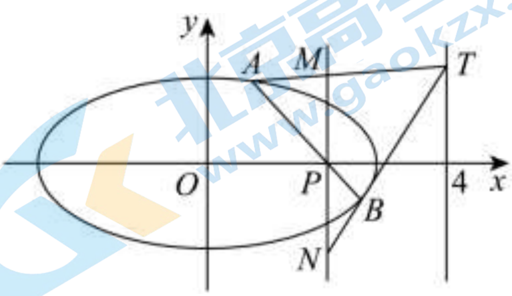
所以 $\dfrac{y_M+y_N}{2}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{-2\left(y_1-t\right)}{my_1-2}+t+\dfrac{-2\left(y_2-t\right)}{my_2-2}+t\right]=-\dfrac{\left(y_1-t\right)\left(my_2-2\right)+\left(y_2-t\right)\left(my_1-2\right)}{\left(my_1-2\right)\left(my_2-2\right)}+t$

$$=-\frac{my_1y_2-2y_1-tmy_2+2t+my_1y_2-2y_2-tmy_1+2t}{m^2y_1y_2-2m\left(y_1+y_2\right)+4}+t$$

$$=-\frac{2my_1y_2-2\left(y_1+y_2\right)-tm\left(y_1+y_2\right)+4t}{m^2y_1y_2-2m\left(y_1+y_2\right)+4}+t=-\frac{2my_1y_2-\left(2+tm\right)\left(y_1+y_2\right)+4t}{m^2y_1y_2-2m\left(y_1+y_2\right)+4}+t \text{③}.$$

把①②代入③可得：$-\dfrac{\dfrac{-8m-\left(2+tm\right)\left(-4m\right)+4t\left(m^2+4\right)}{m^2+4}}{\dfrac{-4m^2-2m\left(-4m\right)+4\left(m^2+4\right)}{m^2+4}}+t=-\dfrac{8t\left(m^2+2\right)}{8\left(m^2+2\right)}+t=-t+t=0$.

故 $MN$ 的中点坐标 $\left(2,0\right)$.




【点睛】方法点睛：本题主要考查了椭圆的简单性质、方程思

想、计算能力、推理论证能力，解题时要善于未知问题转化为已知问题和利用伟大定理进行化简整理.

这类问题的求解策略为：直接推理、计算，并在计算中提取变量，从而得到定点.

21.【答案】（1）$T=\{1,2,3,-1\},P(T)=4$；（2）证明见解析；（3）$2n$.

【分析】（1）利用列举法写出符合题意的所有的$x$的取值可能，得出$P(T)$的值；

（2）先假设数列A为递增的等差数列，公差为$d\left(d>0\right)$，则可知，当$1\le i<j\le N$时，

$a_j-a_i=\left(j-i\right)d$，则可知$x=a_j-a_i$的最大值为$\left(N-1\right)d$，最小值为$d$，$P(T)=N-1$成立；反之若

$P(T)=N-1$，因为$A$是递增数列，所以$a_2-a_1<a_3-a_1<\cdots<a_N-a_1$，可推出

$a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_N-a_1\in T$，那么$T=\left\{a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_N-a_1\right\}$，又

$a_3-a_2<a_4-a_2<\cdots<a_{N-1}-a_2<a_N-a_2<a_N-a_1$，且互不相等，则可知

$a_3-a_2,a_4-a_2,\cdots,a_N-a_2,a_N-a_1\in T$，所以

$a_3-a_2=a_2-a_1,a_4-a_2=a_3-a_1,\cdots,a_N-a_2=a_{N-1}-a_1$，可得数列$A$是等差数列；

(3)当数列$A$由$1,2,3,\cdots,n,2n$这$n+1$个数组成，则任意两个不同的数作差，差值只可能为

$\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm(n-1)$和$\pm(2n-1),\pm(2n-2),\cdots,\pm n$，共$4n-2$个值，又因为$1,2,3,\cdots,n,2n$这$n+1$个

数在数列$A$中共出现$N=2n+1$次，所以数列$A$中存在$a_i=a_j(i\ne j)$，所以$0\in T$，则可得出

$2n\le P(T)\le 4n-1$，再说明$P(T)$可以取得$2n\sim 4n-1$之间的所有整数，得到$P(T)$的值为$2n$.

【详解】解：（1）因为$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，$a_4=3$，则$x=a_j-a_i,1\le i<j\le N$的可能情况有：

$a_2-a_1=1$，$a_3-a_1=3$，$a_4-a_1=2$，$a_3-a_2=2$，$a_4-a_2=1$，$a_4-a_3=-1$，

所以$T=\{1,2,3,-1\}$，$P(T)=4$.

（2）充分性：若$A$是等差数列，设公差为$d$.

因为数列$A$是递增数列，所以$d>0$.

则当$j>i$时，$a_j-a_i=(j-i)d$，

所以$T=\{d,2d,\cdots,(N-1)d\}$，$P(T)=N-1$.

必要性：若$P(T)=N-1$.

因为$A$是递增数列，所以$a_2-a_1<a_3-a_1<\cdots<a_N-a_1$，

所以$a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_N-a_1\in T$，且互不相等，

所以$T=\left\{a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_N-a_1\right\}$.

又$a_3-a_2<a_4-a_2<\cdots<a_{N-1}-a_2<a_N-a_2<a_N-a_1$，

所以$a_3-a_2,a_4-a_2,\cdots,a_N-a_2,a_N-a_1\in T$，且互不相等.

所以$a_3-a_2=a_2-a_1,a_4-a_2=a_3-a_1,\cdots,a_N-a_2=a_{N-1}-a_1$，

所以$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_N-a_{N-1}$，

所以 $A$ 为等差数列.

（3）因为数列 $A$ 由 $1,2,3,\cdots,n,2n$ 这 $n+1$ 个数组成，任意两个不同的数作差，差值只可能为 $\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm(n-1)$ 和 $\pm(2n-1),\pm(2n-2),\cdots,\pm n$ .

共 $2(n-1)+2n=4n-2$ 个不同的值；且对任意的 $m=1,2,3,\cdots,n-1,n,\cdots,2n-1$，

$m$ 和 $-m$ 这两个数中至少有一个在集合 $T$ 中.

又因为 $1,2,3,\cdots,n,2n$ 这 $n+1$ 个数在数列 $A$ 中共出现 $N=2n+1$ 次，所以数列 $A$ 中存在 $a_i=a_j(i\neq j)$，

所以 $0\in T$ .

综上，$P(T)\leq 4n-1$，且 $P(T)\geq 2n$ .

设数列 $A_0$：$1,1,2,2,3,3,4,4,\cdots,n,n,2n$，此时 $T=\{0,1,2,\cdots,2n-1\},P(T)=2n$ .

现对数列 $A_0$ 分别作如下变换：

把一个 1 移动到 2，3 之间，得到数列：$1,2,2,1,3,3,4,4,\cdots,n,n,2n$，

此时 $T=\{0,1,2,3,\cdots,(2n-1),-1\}$，$P(T)=2n+1$ .

把一个 1 移动到 3，4 之间，得到数列：$1,2,2,3,3,1,4,4,\cdots,n,n,2n$，

此时 $T=\{0,1,2,3,\cdots,(2n-1),-1,-2\}$，$P(T)=2n+2$ .

把一个 1 移动到 $\mathrm{n}-1$，$n$ 之间得到数列：$1,2,2,3,3,4,4,\cdots,n-1,n-1,1,n,n,2n$，

此时 $T=\{0.1,2,3,\cdots,(2n-1),-1,-2,\cdots,2-n\}$，$P(T)=2n+n-2=3n-2$ .

把一个 1 移动到 $n$，$2n$ 之间，得到数列：$1,2,2,3,3,4,4,\cdots,n,n,1,2n$，

此时 $T=\{0,1,2,3,\cdots,2n-1,-1,-2,\cdots,1-n\}$，$P(T)=2n+n-1=3n-1$ .

再对数列 $A_0$ 依次作如下变换：

把一个 1 移为 $2n$ 的后一项，得到数列 $A_1$：$1,2,2,3,3,4,4,\cdots,n,n,2n,1$，

此时 $T=\{0,1,2,3,\cdots,2n-1,-1,-2,\cdots,1-n,1-2n\}$，$P(T)=3n$；

再把一个 2 移为 $2n$ 的后一项：得到数列 $A_2$：$1,2,3,3,4,4,\cdots,n,n,2n,2,1$，

此时 $T=\{0,1,2,3,\cdots,2n-1,-1,-2,\cdots,1-n,1-2n,2-2n\}$，$P(T)=3n+1$；

依此类推

最后把一个 $n$ 移为 $2n$ 的后一项：得到数列 $A_n$：$1,2,3,4,\cdots,n,2n,n,n-1,\cdots,2,1$，

此时 $T=\{0,1,2,3,\cdots,2n-1,-1,-2,\cdots,1-n,1-2n,2-2n,\cdots,-n\}$，$P(T)=4n-1$ .

综上所述，$P(T)$ 可以取到从 $2n$ 到 $4n-1$ 的所有 $2n$ 个整数值，所以 $P(T)$ 的取值个数为 $2n$ .

【点睛】本题考查新定义数列问题，难度较大，解答的关键在于根据数列中项的大小及数字特征分析清楚任意两项 $a_j-a_i\left(j>i\right)$ 的所有可能取值，从而得出 $P(T)$ 的值，注意在解答的过程中，项的顺序不同，$P(T)$ 的值不同.

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！