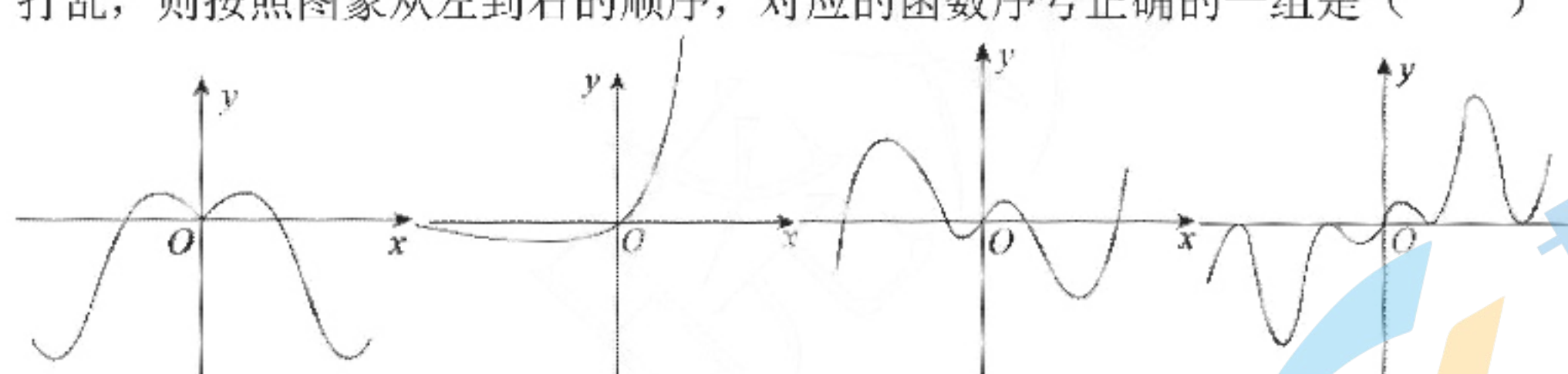


## 一、选择题

- 集合  $A = \{x \in \mathbf{N} | x \leq 6\}$ ,  $B = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - 3x > 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
 A.  $\{3, 4, 5\}$       B.  $\{4, 5, 6\}$       C.  $\{x | 3 < x \leq 6\}$       D.  $\{x | 3 \leq x < 6\}$
- 下列函数在其定义域上既是奇函数又是增函数的是 ( )  
 A.  $f(x) = 2^x$       B.  $f(x) = x|x|$       C.  $f(x) = -\frac{1}{x}$       D.  $f(x) = \lg|x|$
- 已知命题  $p$ : 存在正数  $M, N$ , 满足  $\lg(M+N) = \lg M + \lg N$ ; 命题  $q$ : 对满足  $a > 0$  且  $a \neq 1$  的任意实数  $a$ ,  $\log_a 2 + \log_2 a \geq 2$ , 则下列命题为真命题的是 ( )  
 A.  $p \wedge (\neg q)$       B.  $p \wedge q$       C.  $\neg p \wedge q$       D.  $\neg p \vee q$
- 已知  $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ ,  $b = \log_2 3$ ,  $c = \log_4 7$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )  
 A.  $a < b < c$       B.  $b < a < c$       C.  $c < a < b$       D.  $a < c < b$
- 现有四个函数: ①  $y = x \cdot \sin x$ , ②  $y = x \cdot \cos x$ , ③  $y = x \cdot |\cos x|$ , ④  $y = x \cdot 2^x$  的部分图象如图, 但顺序被打乱, 则按照图象从左到右的顺序, 对应的函数序号正确的一组是 ( )  
  
 A. ①④②③      B. ①④③②      C. ④①②③      D. ③④②①
- “ $a \leq -1$ ”是“函数  $f(x) = \ln x + ax + \frac{1}{x}$  在  $[1, +\infty)$  上为单调函数”的 ( )  
 A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件
- 函数  $f(x)$  在  $[0, \infty)$  上单调递增, 且  $f(x+2)$  关于  $x = -2$  对称, 若  $f(-2) = 1$ , 则  $f(x-2) \leq 1$  的  $x$  的取值范围是 ( )  
 A.  $[-2, 2]$       B.  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$   
 C.  $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$       D.  $[0, 4]$



8. 已知  $f'(x)$  是函数  $f(x)$  的导函数, 且对任意的实数  $x$  都有  $f'(x) = e^x(2x+3) + f(x)$ ,  $f(0) = 1$ , 则不等式  $f(x) < 5e^x$  的解集为 ( )

- A.  $(-4, 1)$       B.  $(-1, 4)$       C.  $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$       D.  $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$

## 二、填空题

9. 将函数  $y = \ln(3x)$  图象右移两个单位所得新函数的解析式为\_\_\_\_\_.

10. 奇函数  $y = f(x)$ , 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = \ln(x+1) + x^2$ , 则当  $x \leq 0$  时,  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.

11. 函数  $y = \lg(8+2x-x^2)$  的单调递增区间是\_\_\_\_\_.

12. 命题 “ $\exists x \in (1, 2)$ , 使得不等式  $x^2 + mx + 4 \geq 0$ ” 是假命题, 则  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

13. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} - 3, & x \in (-1, 0] \\ 3x, & x \in (0, 1] \end{cases}$ , 且函数  $g(x) = f(x) - mx - m$  在  $(-1, 1]$  内有且仅有两个不同的零点,

则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果存在正实数  $m$ , 使得对任意  $x \in D$ , 都有  $f(x+m) > f(x)$ , 则称  $f(x)$

为  $D$  上的 “ $m$  型增函数”. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且当  $x > 0$  时,  $f(x) = |x-a| - a (a \in \mathbf{R})$ . 若

$f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的 “30 型增函数”, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

15. 设函数  $f(x) = \frac{ax^2+1}{bx+c}$  是奇函数,  $a, b, c$  都是整数, 且  $f(1) = 3$ ,  $f(2) < 5$ .

(1) 求  $a, b, c$  的值;

(2) 求函数  $f(x)$  的值域.

16. 定义在  $\mathbf{R}$  上的单调函数  $f(x)$  满足  $f(3) = \log_2 3$ , 且对任意  $x, y \in \mathbf{R}$  都有  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ .

(1) 求证:  $f(x)$  为奇函数;

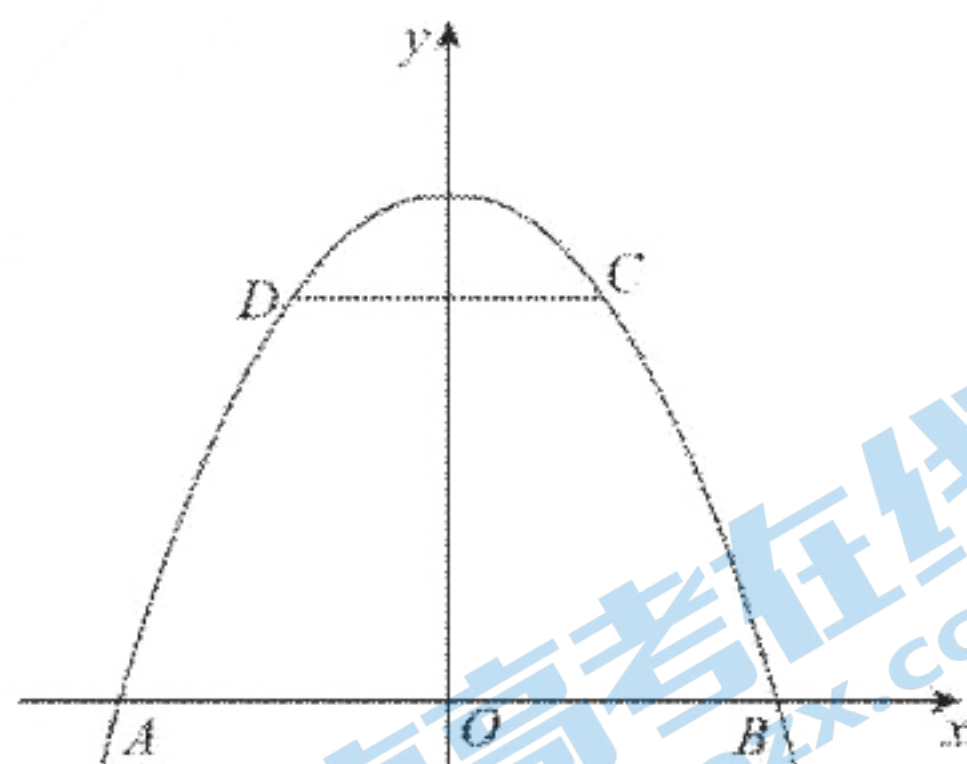
(2) 若  $f(k \cdot 3^x) + f(3^x - 9^x - 2) < 0$  对任意  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 求实数  $x$  的取值范围.

17. 如图, 抛物线  $y = -x^2 + 9$  与  $x$  轴交于两点  $A, B$ , 点  $C, D$  在抛物线上 (点  $C$  在第一象限),  $CD \parallel AB$ ,

记  $|CD| = 2x$ , 梯形  $ABCD$  面积为  $S$ .

(1) 求面积  $S$  以  $x$  为自变量的函数式;

(2) 若  $\frac{|CD|}{|AB|} \leq k$ ,  $k$  为常数, 且  $0 < k < 1$ , 求  $S$  的最大值.



18. 设  $a$  为实数, 函数  $f(x) = x^2 + a \ln x - (2-a)x$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 当  $a = -\frac{1}{3}$  时, 判断函数  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$  与函数  $f(x)$  的图象有几个交点, 并说明理由.



19. 已知函数  $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - bx$ ，函数  $f(x) = x + a \ln x$  的图象在  $x=1$  处的切线与直线  $2x - y + 3 = 0$  平行.

(1) 求实数  $a$  的值;

(2) 若函数  $g(x)$  存在单调递减区间，求实数  $b$  的取值范围;

(3) 设  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$  是函数  $g(x)$  的两个极值点，且  $b \geq \frac{7}{2}$ ，试求  $g(x_1) - g(x_2)$  的最小值.

20. 对于集合  $M$ ，定义函数  $f_M(x) = \begin{cases} -1 & (x \in M) \\ 1 & (x \notin M) \end{cases}$  对于两个集合  $M, N$ ，定义集合

$M \Delta N = \{x | f_M(x) \cdot f_N(x) = -1\}$ ，已知  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ， $B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ .

(1) 写出  $f_A(1)$ ， $f_B(1)$  的值，并用列举法写出集合  $A \Delta B$ ;

(2) 用  $Card(M)$  表示有限集合  $M$  所含元素的个数，求  $Card(X \Delta A) + Card(X \Delta B)$  的最小值;

(3) 有多少个集合对  $(P, Q)$ ，满足  $P, Q \subseteq A \cup B$ ，且  $(P \Delta A) \Delta (Q \Delta B) = A \Delta B$ ?