2021 北京师大附中高一（下）期末

数　　学

班级__________姓名__________学号__________

1.本试卷有三道大题，共 6 页.考试时长 120 分钟，满分 150 分.

2.考生务必将答案填写在答题纸(共 8 页)上，在试卷上作答无效.

3.考试结束后，考生应将答题纸交回.

一、选择题(每小题 4 分，共 40 分，每题均只有一个正确答案)

1.若 $\sin\alpha<0$，且 $\cos\alpha>0$，则角 α 是（　）

A.第一象限角　　B.第二象限角　　C.第三象限角　　D.第四象限角

2.已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$（　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.1　　C. $\sqrt{2}$　　D.2

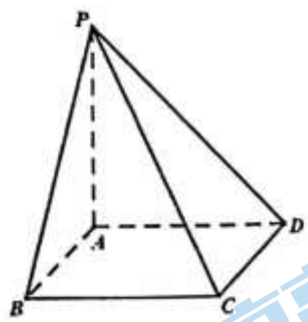
3.圆锥的母线长为 5cm，底面半径为 2cm，则圆锥的侧面积为（　）

A. $20\pi\text{cm}^2$　　B. $10\pi\text{cm}^2$　　C. $28\pi\text{cm}^2$　　D. $14\pi\text{cm}^2$

4.已知向量 $\vec{a}=(-1,3),\vec{b}=(x,-1),\vec{a}\perp\vec{b}$，则 x 的值是（　）

A.3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. -3　　D. $-\frac{1}{3}$

5.如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=AB$，则直线 PB 与直线 CD 所成角的大小是（　）



A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

6.函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像（　）

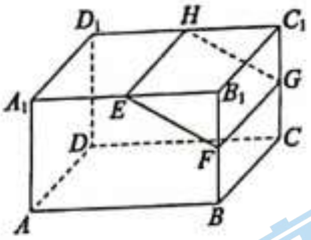
A.关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称　　B.关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称

C.关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$对称　　　　D.关于点$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$对称

7.在$\triangle ABC$中，$a=2b\cos C$，那么这个三角形是（　）

A.等边三角形　　B.等腰三角形　　C.直角三角形　　D.不确定

8.如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，若E,F,G,H分别是棱A_1B_1,BB_1,CC_1,C_1D_1的中点，则下列结论一定成立的是（　）



A.四边形$EFGH$是矩形　　B.四边形$EFGH$是正方形

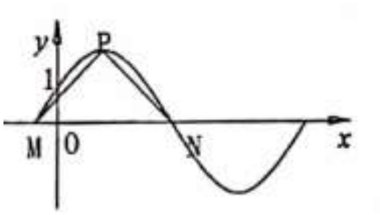
C.$BD//HG$　　D.平面$EFGH$//平面$ABCD$

9.已知平面向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=\sqrt{2},|\vec{b}|=1$，则“$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}+2\vec{b}$互相垂直”是$\vec{a}\perp\vec{b}$的（　）

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

10.如图，函数$y=2\sin(\pi x+\varphi)\left(0<\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$在一个周期内的图像与$y$轴交于点$(0,1)$. P是其图像上的最高点，M、N是其图像与x轴的交点，则$\overrightarrow{PM}$与$\overrightarrow{PN}$的夹角的余弦值为（　）

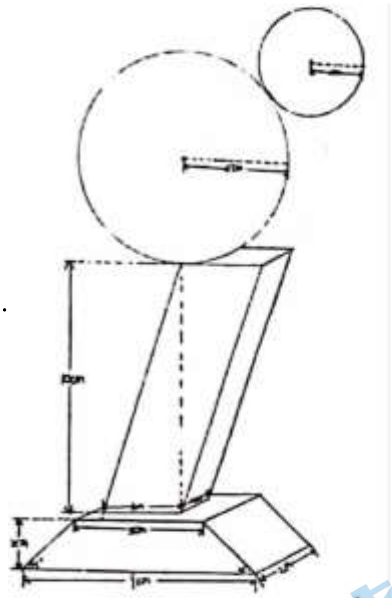


A.0　　B.$\frac{13}{15}$　　C.$\frac{15}{17}$　　D.1

二、填空题(每小题5分，共25分)

11.在$\triangle ABC$中，$B=30^{\circ},AB=15,BC=5\sqrt{3}$，则$AC=$__________.

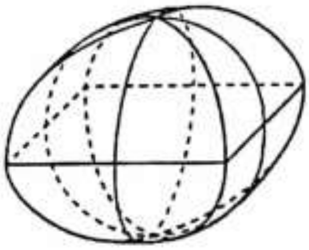
12.如图，这个组合体是小张同学自己设计的一个小奖杯，计划送给小刘同学，以鼓励其认真努力的学习数学，已知该奖杯中的四棱柱的高为10 cm，底面是长和宽分别为3 cm、2 cm的矩形，则该四楼柱的体积是__________ cm^3；奖杯顶部两个球的半径分别为5 cm和cm，则这两个球的表面积之和为__________ cm^2.



.

13.我国魏晋时期的数学家刘徽在给《九章算术》作注时，想到了推算球体积的方法，创造了一个称为“牟合方盖”的立体图形.如图 1 所示，在一个正方体内作两个互相垂直的内切圆柱，其相交的部分，就是牟合方盖，如图 2 所示，牟合方盖恰好把正方体的内切球包含在内并且同球相切.刘微指出，球体积与牟合方盖体积之比等于 $\dfrac{\pi}{4}$.若正方体的棱长为 2，则“牟合方盖”的体积等于__________.

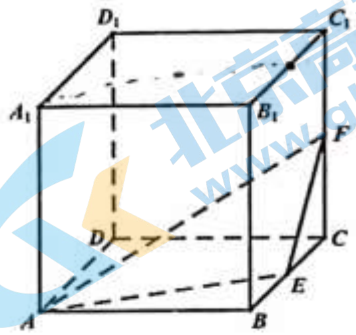
题图 1



题图 2

14.α 和 β 是两个不同的平面，m 和 n 是平面 α 及 β 外的两条不同直线，给出四个论断：① $m\perp n$；② $\alpha\perp\beta$；③ $n\perp\beta$；④ $m\perp\alpha$.以其中三个论断作为条件，余下一个论断作为结论，写出你认为正确的一个命题：__________.

15.如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别是棱 BC,CC_1 的中点，P 是侧面 BB_1C_1C 内一点，若 $A_1P//$ 平面 AEF，则下列说法正确的是__________.



①线段 A_1P 的最大值是 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

② $A_1P \perp B_1D$

③ A_1P 与 DE 一定异面

④三棱锥 $B-A_1PC_1$ 的体积为定值

(注：全部正确得 5 分，有漏选得 3 分，有错选或不选得 0 分)

三、解答题(共 6 小题，共 85 分，解答时写出文字说明，演算步骤或证明过程)

16.(本小题 14 分)

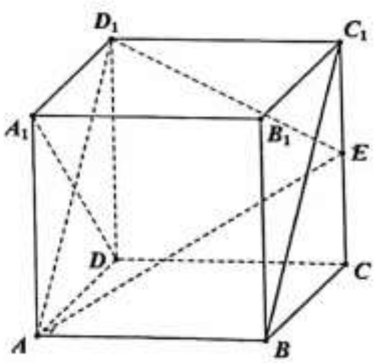
在$\triangle ABC$中，$b=2\sqrt{5}, A=\frac{\pi}{4}, \cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（1）求 a 的值；

（2）求$\triangle ABC$的面积.

17.(本小题 12 分)

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 CC_1 中点.



（1）求证：BC_1 // 平面 AD_1E；

（2）求证：$A_1D \perp$ 平面 ABC_1D_1.

18.(本小题 14 分)

已知函数 $f\left(x\right)=\left(2\cos^2x-1\right)\sin2x+\dfrac{1}{2}\cos4x$.

（1）求 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$；

（2）求 $f\left(x\right)$的最小正周期；

（3）求 $f\left(x\right)$在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上的是大值.

19.(本小题 15 分)

在$\triangle ABC$中，$\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin B\sin C$.

（1）求 A 的值；

（2）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，求 BC 边上的中线 AD 的长度.

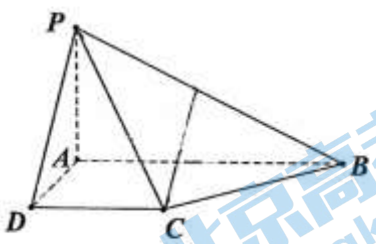
条件①：$b=8$；条件②：$S_{\Delta ABC}=10\sqrt{3}$；条件③：$\cos B=\dfrac{1}{7}$.

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分.

20.(本小题 15 分)

已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形，$AB//DC,\angle DAB=90^{\circ},PA\perp$平面 $ABCD$，且

$PA=AD=DC=\dfrac{1}{2}AB=1$，$M$ 是棱 PB 上的动点.



（1）求证：平面 $PAD\perp$平面 PCD；

（2）若 $PD//$平面 ACM，求 $\dfrac{PM}{MB}$的值；

（3）当M 是 PB 中点时，设平面 ADM 与棱 PC 交于点 N，求截面 $ADNM$ 的面积

21.(本小题 15 分)

已知集合 $S_n=\{X|\ X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$，称 x_1 为 X 的第 i 个分量.对于 S_n 的元素 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，定义 A 与 B 伯两种乘法分别为：

$$A\times B=(a_1b_2-a_2b_1,a_2b_3-a_3b_2\cdots,a_nb_1-a_1b_n)$$

$$A*B=(a_1a_2+b_1b_2,a_2a_3+b_2b_3\cdots,a_na_1+b_nb_1)$$

给定函数 $f(x)$，定义 S_n 上的一种变换 $F(X,f)=(f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n))$.

（1）设 $f(x)=|x|,A=(1,0,-1),B=(-1,0,1)$，求 $F(A,f)\times F(B,f)$ 和 $F(A,f)*F(B,f)$

（2）设 $f(x)=\sin x,g(x)=\cos x$，对于 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，设 $A_0=F(X,f)$，$B_0=G(X,g)$.对任意 $k\in\mathbf{N}$ 且 $k\le n-1$，定义 $A_{k+1}=A_k\times B_k,B_{k+1}=A_k*B_k$.

（i）当 $n=3$ 时，求证：A_2 中为 0 的分量个数不可能是 2 个；

（ii）若 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的任一分量都只能取 x 或 $-x$，设 A_{n-1} 的第 1 个分量为 $\varphi(x)$，求 $\varphi(x)$ 的最小正周期的最小值，并求出此时所有的 X.