高三数学参考答案

1.B　$B=(-\infty,0)\cup(2,+\infty), A\cap B=\{-1\}$.

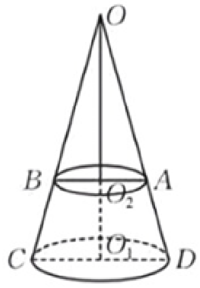
2.D　$(3+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})=6-6\mathrm{i}+4\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2=10-2\mathrm{i}$.

3.C　令 $2^x=3$，可得 $x=\log_2 3$，则 $f(3)=\log_2 3$.

4.D　2019 年的居民消费水平比 2020 年的居民消费水平高，A 错误.2019 年的城镇居民消费水平比 2020 年的城镇居民消费水平高，B 错误.2018 年至 2022 年我国居民消费水平数据从小到大排序为 $25245,27439,27504,31013,31718, 5\times60\%=3$, 2018 年至 2022 年我国居民消费水平数据的 60% 分位数为 $\dfrac{27504+31013}{2}=29258.5$ 元，C 错误.设我国农村人口数为 x，城镇人口数为 y，则 $31718=\dfrac{19530x+38289y}{x+y}$，化简得 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{12188}{6571}>\dfrac{3}{2}$，所以 2022 年我国城镇人口数比农村人口数的 1.5 倍还要多，D 正确.

5.C　因为 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\alpha$，所以 $\sqrt{2}\sin\alpha=\sin\alpha$，则 $\sin\alpha=0$，即 $\alpha=k\pi, k\in\mathbf{Z}$，所以 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$.

6.B　延长 CB,DA 交于点 O，设圆台上、下个底面的闪心分别为 O_2,O_1.连接 OO_1，设 $OB=x, O_2B=r, O_1C=R$.因为 $\triangle OO_2B\backsim\triangle OO_1C$，所以 $\dfrac{r}{R}=\dfrac{OB}{OC}$，则 $x=20\mathrm{cm}$.设所求圆心角为 θ，则 $x\theta=2\pi r$，所以 $\theta=\dfrac{2\pi r}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.



7.A　圆 $M: x^2-6x+y^2-6y+16=0$，即圆 $M:(x-3)^2+(y-3)^2=2$，圆心 $M(3,3)$ 到直线 l 的距离为 d, AB 的中点为 C.因为 $|OA|=|AB|$，所以 $|OC|=3|AC|$.因为 $|OM|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，所以 $|OC|=\sqrt{|OM|^2-d^2}=\sqrt{18-d^2}$.又因为 $|AC|=\sqrt{2-d^2}$，所以 $\sqrt{18-d^2}=3\sqrt{2-d^2}$，解得 $d=0$，所以直线 l 经过圆心 $M(3,3)$，所以 $k=\dfrac{3-0}{3-0}=1$.

8.C　令 $t=\omega x+\varphi$，由题意可得 $\sin t=0$ 在 $\left(\varphi,\dfrac{\pi\omega}{2}+\varphi\right)$ 上有解.

因为 $\sin t=0$ 在 $[a,b]$ 内有解的最短区间长度为 $b-a=\pi$.所以 $\dfrac{\pi\omega}{2}+\varphi-\varphi>\pi$，解得 $\omega>2$.

9.AC　$|OB|=c=|OF_1|=|OF_2|$，点 B 在以 O 为圆心，$|OF_1|$ 为半径的圆上，所以 $BF_1\perp BF_2$，A 正确.直线 BF_2 的斜率为 $-\dfrac{b}{c-a}$，直线 AO 的斜率为 $-\dfrac{b}{a}$，$-\dfrac{b}{c-a}$ 与 $-\dfrac{b}{a}$ 不一定相等，所以直线 BF_2 与直线 AO 不一定平行，B 错误.$\triangle OAB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot b=ab=2$，双曲线 C 的焦距为 $2c=2\sqrt{a^2+b^2}\geq 2\sqrt{2ab}=2\sqrt{4}=4$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以双曲线 C 的焦距的最小值为 4, C 正确，D 错误.

10.ACD　设等差数列 $2,5,8,11,14,\cdots$ 的通项公式为 $b_n=3n-1$.数阵中前 7 行共 $1+2+3+\cdots+7=28$ 个数，数阵中前 7 行所有数的和为 $2\times 28+\dfrac{28\times 27\times 3}{2}=1190$，$A$ 正确.

令 $b_n=3n-1=101$，解得 $n=34$，前 7 行共 28 个数，第 8 行有 8 个数，所以 101 是数阵中第 8 行从左至右的第 6 个数，B 错误.记每一行的第 1 个数组成数列 $\{a_n\}$，则

$a_1=2, a_2-a_1=3, a_3-a_2=6=3\times 2, a_4-a_3=9=3\times 3,\cdots, a_n-a_{n-1}=3\times(n-1)$，累加得

$a_n-a_1=3\times(1+2+3+\cdots+n-1)=\dfrac{3n(n-1)}{2}$，所以 $a_n=\dfrac{3n^2-3n+4}{2},a_{10}=137$，$C$ 正确.数阵中第 10 行从左至右的第 4 个数是 $137+(4-1)\times3=146$，D 正确.

11.ACD　令 $x=y=0$，可得 $f(0)=0$.

令 $x=y=1$，可得 $[f(1)]^2=f(1)$.因为当 $x>0$ 时，$f(x)\neq0$，所以 $f(1)=1$.

令 $x=y$，可得 $[f(x)]^2=f(x^2)\geqslant0$.

因为 $x^2\geqslant0$，所以当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\geqslant0$.

又因为当 $x>0$ 时，$f(x)\neq0$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

令 $y=1$，可得 $f(x)\left[f(x)-f(x-1)\right]=f(x)$，①

所以 $f(x)-f(x-1)=1,f(x+1)-f(x)=1$，两式相加可得 $f(x+1)-f(x-1)=2$.

令 $y=-1$，可得 $f(x)\left[f(x)-f(x+1)\right]=f(-x)$.②

①-②可得 $f(x)\left[f(x+1)-f(x-1)\right]=f(x)-f(-x)$，化简可得 $f(x)=-f(-x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，C 正确.

由 $f(x)-f(x-1)=1$，可得

$f(2)=f(1)+1=2,f(3)=f(2)+1=3,f(4)=f(3)+1=4,\cdots,f(10)=10$，$B$ 错误.

由 $\begin{cases}f(x+1)-f(x)=1,\\f(x)=-f(-x),\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1,\\f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(-\dfrac{1}{2}\right),\end{cases}$ 解得 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，A 正确.

令 $x=x_1,y=x_1-x_2$，可得 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{f(x_1(x_1-x_2))}{f(x_1)}$.

令 $0<x_2<x_1$，则 $x_1-x_2>0,x_1(x_1-x_2)>0$.

因为当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，所以 $f(x_1)>0,f(x_1(x_1-x_2))>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{f(x_1(x_1-x_2))}{f(x_1)}>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，D 正确.

12.4　$|PF|=\dfrac{p}{4}+\dfrac{p}{2}=3$，解得 $p=4$.

13.$\dfrac{12}{25}$；$\dfrac{81}{125}$（本题第一空 2 分，第二空 3 分）　到第 3 局才分出胜负，则前两局甲、乙各赢一局，其概率为 $\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{12}{25}$.

若甲获胜，分 2 种情况：

①甲连赢 2 局，其概率为 $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{25}$，

②前两局甲、乙各赢一局，第三局甲赢，其概率为 $\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{36}{125}$.

故甲获胜的概率为 $\dfrac{9}{25}+\dfrac{36}{125}=\dfrac{81}{125}$.

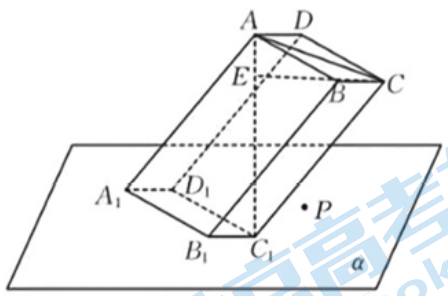
14.$\sqrt{51}$　过点 C 作 $CE\perp AC_1$，垂足为 E，连接 AC.易得 CE // 平面 α，

所以点 C 到平面 α 的距离为 $C_1E.AC=3\sqrt{2},AC_1=$

$\sqrt{AC^2+CC_1^2}=3\sqrt{6},CE=\dfrac{AC\cdot CC_1}{AC_1}=2\sqrt{3},C_1E=$

$\sqrt{CC_1^2-CE^2}=2\sqrt{6}$.过点 C 作 $CC'\perp$ 平面 α，垂足为 C'（图略）.当 C',C_1,P 三点共线，且

$C'P=C'C_1+C_1P$ 时，PC 取得最大值，最大值为 $\sqrt{C_1E^2+\left(C'C_1+C_1P\right)^2}=\sqrt{C_1E^2+\left(CE+C_1P\right)^2}=\sqrt{51}$.



15.解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $\begin{cases}a_1+a_1q=6,\\ a_1\cdot a_1q^2=a_1q^3,\end{cases}$

解得 $a_1=q=2$ 或 $q=-3$（舍去）.

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$.

（2）因为$\{a_n\}$是递增数列，所以$M_n=2^n, m_n=2$，

$$b_n=\frac{M_n+m_n}{2}=\frac{2^n+2}{2}=2^{n-1}+1.$$

$$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}-n=2^n+n-1.$$

16.解：（1）数字 2 填在第 2 个空格中的概率为$\frac{C_{97}^1}{C_{99}^3}=\frac{1}{1617}$.

（2）由题意可得$2\leq x\leq 98$，且$x\in \mathbf{N}_+$.

$$P(x)=\frac{C_{x-1}^1C_{99-x}^1}{C_{99}^3}=\frac{(x-1)(99-x)}{C_{99}^3}.$$

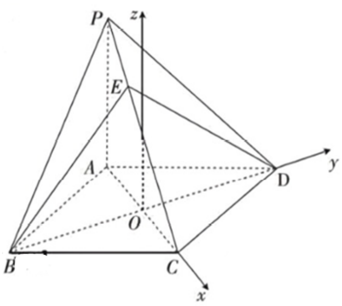
当$x=50$时，$P(x)$取得最大值，最大值为$\frac{49^2}{C_{99}^3}=\frac{49}{3201}$.

17.（1）证明：记$AC\cap BD=O$.

因为四边形$ABCD$是菱形，所以$BD\perp AC$.

因为$BD\perp PC, PC\subset$平面$PAC, AC\subset$平面PAC.且$AC\cap PC=C$，

所以$BD\perp$平面PAC.



因为$PA\subset$平面PAC，所以$BD\perp PA$.

因为$PA\perp AC, AC\subset$平面$, ABCD, BD\subset$平面$ABCD$，且

$AC\cap BD=O$，所以$PA\perp$平面$ABCD$.

（2）解：以O为坐标原点，分别以$\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$的方向为$x,y$轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.

设$AB=4$，则$B(0,-2\sqrt{3},0), D(0,2\sqrt{3},0)\cdot E(-1,0,3), \overrightarrow{BE}=(-1,2\sqrt{3},3), \overrightarrow{BD}=(0,4\sqrt{3},0)$.

设平面BDE的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=4\sqrt{3}y=0.\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=-x+2\sqrt{3}y+3z=0,\end{cases}$令$x=3$，得$\vec{m}=(3,0,1)$.

平面ABD的一个法向量为$\vec{n}=(0,0,1)$.

$$\left|\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle\right|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10},$$

易得二面角$A-BD-E$为锐角，故二面角$A-BD-E$的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$.

18.（1）解：由题意得椭圆C的半焦距$c=1$，且$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以$a=2$.

又因为$b^2=a^2-c^2=3$，所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}==1$.

（2）证明：当直线l的斜率为0时，直线l的方程为$x=0$

此时AB为椭圆C的长轴，以弦AB为直径的圆的方程为$x^2+y^2=4$，该圆的半径为2.

圆$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{25}{16}$的半径为$\frac{5}{4}$，两圆的圆心距为$2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$.

满足圆$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{25}{16}$恒与以弦$AB$为直径的圆相切.

当直线l的斜率不为0时，设直线l的方程为$x=ty+1,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),AB$的中点为$M(x_0,y_0)$.

联立$\begin{cases}x=ty+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$，

所以$y_1+y_2=-\frac{6t}{3t^2+4},y_1y_2=-\frac{9}{3t^2+4}$，

$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{3t}{3t^2+4},x_0=ty_0+1=\frac{4}{3t^2+4}.$$

$$|AB|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12(t^2+1)}{3t^2+4}.$$

记圆$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{25}{16}$的圆心为$N\left(\frac{3}{4},0\right)$，

$$|MN|=\sqrt{\left(\frac{4}{3t^2+4}-\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{3t}{3t^2+4}\right)^2}=\frac{9t^2+4}{4\left(3t^2+4\right)}.$$

$$\frac{1}{2}|AB|-|MN|=\frac{6\left(t^2+1\right)}{3t^2+4}-\frac{9t^2+4}{4\left(3t^2+4\right)}=\frac{5\left(3t^2+4\right)}{4\left(3t^2+4\right)}=\frac{5}{4}.$$

满足圆$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{25}{16}$恒与以弦$AB$为直径的圆相切.

综上，圆$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\frac{25}{16}$恒与以弦$AB$为直径的圆相切.

19.解：（1）$f(a)=\sqrt{a},f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-a}},f'(a)=\frac{1}{\sqrt{a}}$.

曲线$y=f(x)$在点$\left(a,f(a)\right)$处的切线方程为$y-\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a}}(x-a)$.

因为该场线过点$(4,2)$，所以$2-\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a}}(4-a)$，解得$a=4$.

（2）因为$f(x)=\sqrt{2x-a}\leqslant ae^{x-1}$，所以$a>0$，且$x>\frac{a}{2}$.

两边平方可得$a^2e^{2x-2}\geqslant 2x-a$.

令函数$g(x)=a^2e^{2x-2}-2x+a\left(x>\frac{a}{2}\right),g'(x)=2\left(a^2e^{2x-2}-1\right)$.

令函数$h(x)=a^2e^{2x-2}-1,h'(x)=2a^2e^{2x-2}>0$，所以$h(x)$是增函数.

令$g'(x)=2\left(a^2e^{2x-2}-1\right)=0$，得$x=1-\ln a$.

下面比较$1-\ln a$与$\frac{a}{2}$的大小.

令函数$u(a)=1-\ln a-\frac{a}{2},u'(a)=-\frac{a+2}{2a}<0,u(a)$是减函数.

因为$u(1)=\frac{1}{2}>0,u(2)=-\ln 2<0$，所以存在$a_0\in(1,2)$，使得当$a\in(0,a_0)$时，$u(a)>0$，

即$1-\ln a>\frac{a}{2}$.当$a\in[a_0,+\infty)$时，$u(a)\leqslant 0$，即$1-\ln a\leqslant\frac{a}{2}$.

当 $a\in(0,a_0)$ 时，

当 $x\in\left(\dfrac{a}{2},1-\ln a\right)$ 时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$；

当 $x\in(1-\ln a,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在 $\left(\dfrac{a}{2},1-\ln a\right)$ 上单调递减，在 $(1-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

$g(x)_{\min}=g(1-\ln a)=a^2\mathrm{e}^{-2\ln a}-2(1-\ln a)+a=2\ln a+a-1$.

令函数 $v(a)=2\ln a+a-1, v'(a)=\dfrac{2}{a}+1>0$，所以 $v(a)$ 是增函数.

由题意可得 $g(x)_{\min}=2\ln a+a-1\geqslant 0$，又因为 $v(1)=0$，所以 $1\leqslant a<a_0$.

当 $a\in[a_0,+\infty)$ 时，$g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{a}{2}\right)>0$，符合题意.

综上，a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.