2020 年全国统一高考数学试卷（理科）（全国新课标II）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，$A=\{-1,0,1\}$，$B=\{1,2\}$，则 $C_U(A\cup B)=$

A．$\{-2,3\}$　　B．$\{-2,2,3\}$　　C．$\{-2,-1,0,3\}$　　D．$\{-2,-1,0,2,3\}$

【答案】：A

【解析】：$\because A\cup B=\{-1,0,1,2\}$，$\therefore C_U(A\cup B)=\{-2,3\}$

2．若 α 为第四象限角，则

A．$\cos 2\alpha>0$　　B．$\cos 2\alpha<0$　　C．$\sin 2\alpha>0$　　D．$\sin 2\alpha<0$

【答案】：D

【解析】:，$\because -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<2k\pi$，$\therefore -\pi+4k\pi<2\alpha<4k\pi$，

$\therefore 2\alpha$ 是第三或四象限角，$\therefore \sin 2\alpha<0$

3．在新冠肺炎疫情防控期间，某超市开通网上销售业务，每天能完成 1200 份订单的配货，由于订单量大幅增加，导致订单积压，为解决困难，许多志愿者踊跃报名参加配货工作.已知该超市某日积压 500 份订单未配货，预计第二天新订单是 1600 份的概率为 0.05.志愿者每人每天能完成 50 份订单的配货，为使第二天积压订单及当日订单配货的概率不小于 0.95，则至少需要志愿者

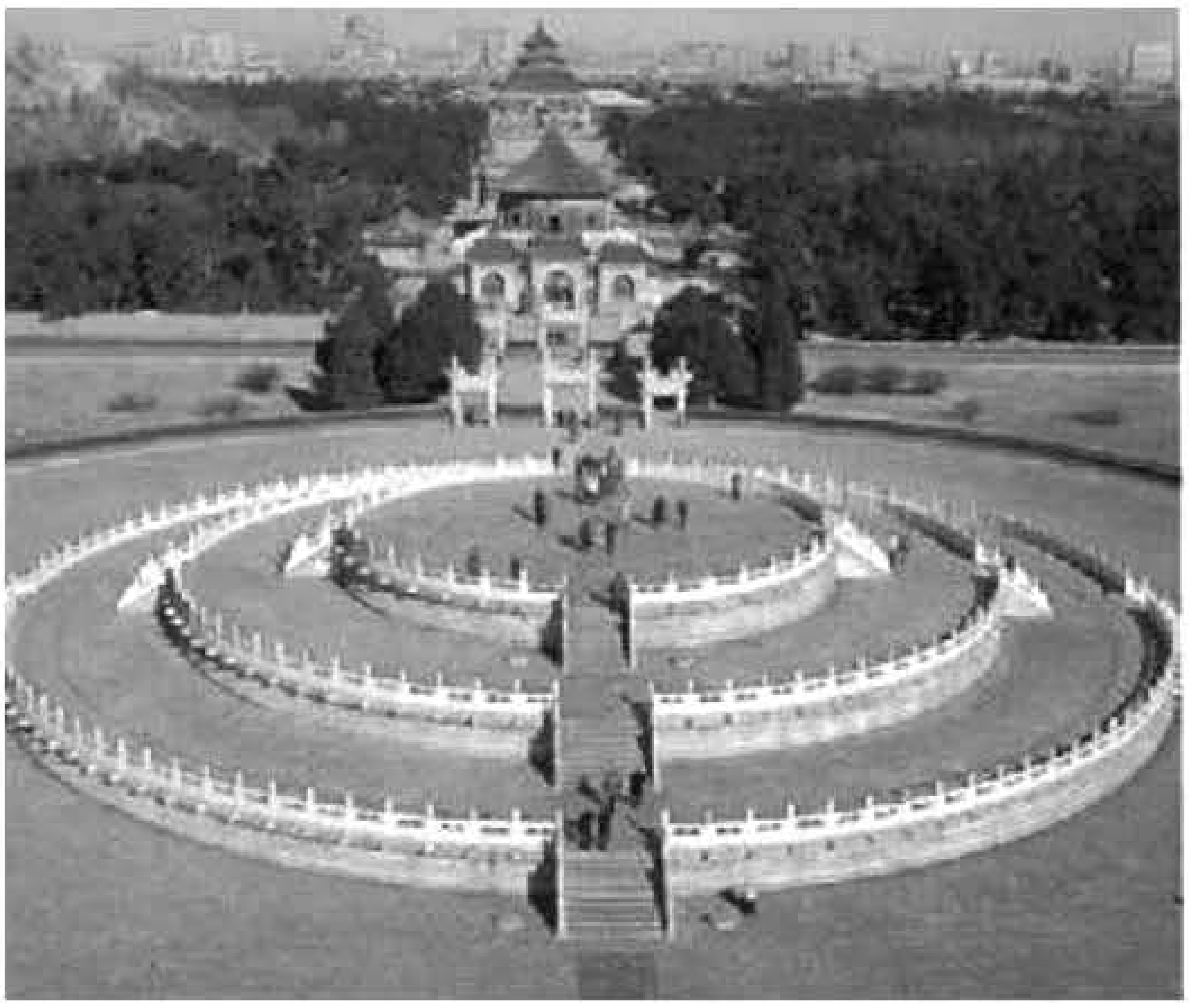
A．10 名　　B．18 名　　C．24 名　　D．32 名

【答案】：B

【解析】：因为公司可以完成配货 1200 份订单，则至少需要志愿者为 $\dfrac{1600+500-1200}{50}=18$ 名

4．北京天坛的圆丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层，上层中心有一块圆形石板（称为天心石），环绕天心石砌 9 块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加 9 块，下一层的第一环比上一层的最后一环多 9 块，向外每环依次也增加 9 块，已知每层环数相同，且下层比中层多 729 块，则三层共有扇形面形石板（不含天心石）

A．3699 块　　B．3474 块　　C．3402 块　　D．3339 块



【答案】：C

【解析】：设每一层有 n 环，由题可知从内到外每环之间构成等差数列，公差 $d=9$，$a_1=9$，由等差数列性质知 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 成等差数列，且 $(S_{3n}-S_{2n})-(S_{2n}-S_n)=n^2d$，则 $9n^2=729$，得 $n=9$，则三层共有扇形面石板为 $S_{3n}=S_{27}=27a_1+\dfrac{27\times 26}{2}\times 9=3402$ 块

5. 若过点 $(2,1)$ 的圆与两坐标轴都相切，则圆心到直线 $2x-y-3=0$ 的距离为

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

【答案】：B

【解析】：设圆心为 (a,a)，则半径为 a，圆过点 $(2,1)$，则 $(a-2)^2+(a-1)^2=a^2$，解得 $a=1$ 或 $a=5$，所以圆心坐标为 $(1,1)$ 或 $(5,5)$，圆心到直线的距离都是 $d=\dfrac{|-2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

6. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{m+n}=a_ma_n$，若 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=2^{15}-2^5$，则 $k=$

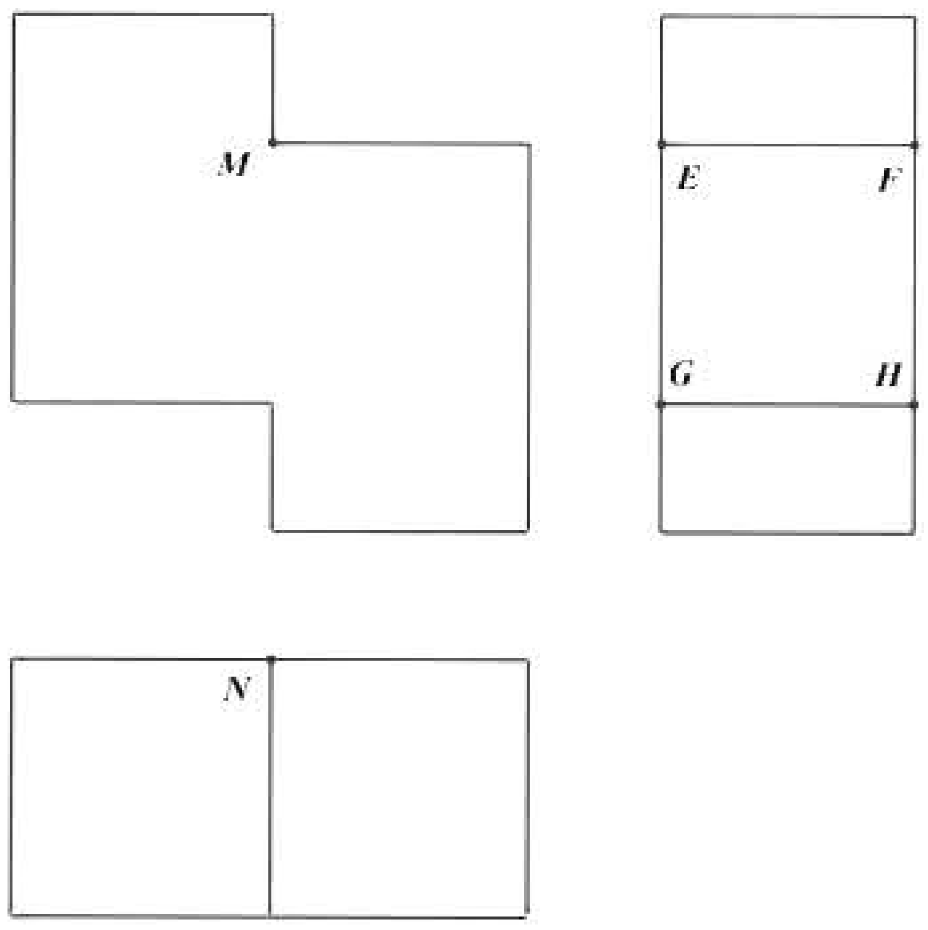
A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【答案】：C

【解析】：取 $m=1$，则 $a_{n+1}=a_1a_n$，又 $a_1=2$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$，所以 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $a_n=2^n$，所以 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=\dfrac{2^{k+1}(1-2^{10})}{1-2}=2^{k+11}-2^{k+1}=2^{15}-2^5$，得 $k=4$

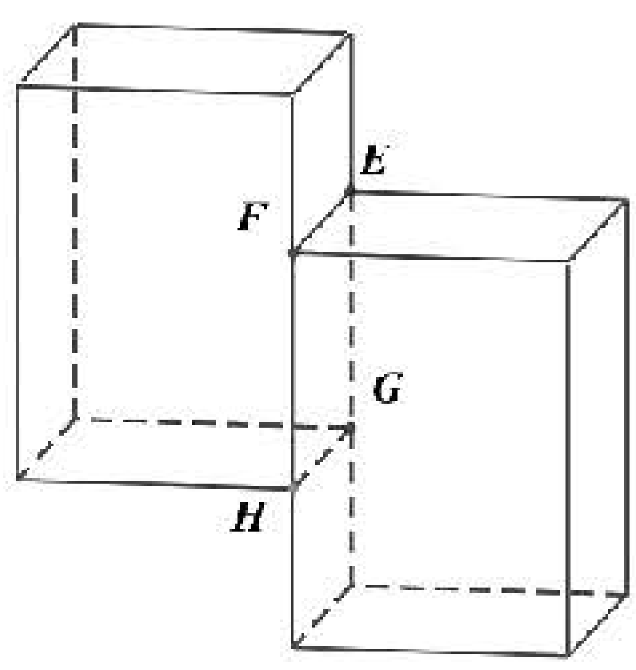
7. 右图是一个多面体的三视图，这个多面体某条棱的一个端点在正视图中对应的点为 M，在俯视图中对应的点为 N，则该端点在侧视图中对应的点为

A．E　　　　　　　　B．F　　　　　　　　C．G　　　　　　　　D．H



【答案】：A

【解析】：该几何体是两个长方体拼接而成，如图所示，显然选 A．



8．设 O 为坐标原点，直线 $x=a$ 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的两条渐近线分别交于 D，E 两点. 若 ΔODE 的面积为 8，则 C 的焦距的最小值为

A．4　　　　　　　　B．8　　　　　　　　C．16　　　　　　　　D．32

【答案】：B

【解析】：双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的两条渐近线分别为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，则容易得到 $\left|DE\right|=2b$，则 $S_{\Delta ODE}=ab=8$，$c^2=a^2+b^2\geq 2ab=16$，即 $c\geq 4$，焦距 $2c\geq 8$．

9．设函数 $f\left(x\right)=\ln\left|2x+1\right|-\ln\left|2x-1\right|$，则 $f\left(x\right)$

A．是偶函数，且 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 在单调递增

B．是奇函数，且 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ 在单调递减

C．是偶函数，且 $(-\infty,-\dfrac{1}{2})$ 在单调递增

D．是奇函数，且 $(-\infty,-\dfrac{1}{2})$ 在单调递减

【答案】：D

【解析】：函数 $f\left(-x\right)=\ln\left|-2x+1\right|-\ln\left|-2x-1\right|=\ln\left|1-2x\right|-\ln\left|2x+1\right|=f\left(x\right)$，则 $f\left(x\right)$ 为

奇函数，$x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$时，$f(x)=\ln(2x+1)-\ln(1-2x)$，单调递增；$x\in(-\infty,-\frac{1}{2})$时，

$f(x)=\ln(-2x-1)-\ln(1-2x)=\ln\frac{2x+1}{2x-1}=\ln(1+\frac{2}{2x-1})$，单调递减.

10．已知ΔABC是面积为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$的等边三角形，且其顶点都在球O的球面上，若球O的表面积为16π，则O到平面ABC的距离为

A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．1　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】：C

【解析】：设ΔABC的外接圆圆心为O_1，记$OO_1=d$，圆O_1的半径为r，球O半径为R，

等边三角形ΔABC的边长为a，则$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，可得$a=3$，于是$r=\frac{a}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，

由题知球O的表面积为16π，则$R=2$，由$R^2=r^2+d^2$易得$d=1$，即O到平面ABC的距离为1.

11．若$2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，则

A．$\ln(y-x+1)>0$　　B．$\ln(y-x+1)<0$

C．$\ln|x-y|>0$　　D．$\ln|x-y|<0$

【答案】A

【解析】$2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$，设$f(x)=2^x-3^{-x}$，则$f(x)=2^x\ln 2+3^{-x}\ln 3>0$，

所以函数$f(x)$在R上单调递增，因为$f(x)<f(y)$，所以$x<y$，则$y-x+1>1$，

$\ln(y-x+1)>0$，选A.

12．$0-1$周期序列在通信技术中有着重要应用. 序列$a_1a_2\cdots a_n\cdots$满足$a_i\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots)$，且存在正整数$m$，使得$a_{i+m}=a_i(i=1,2,\cdots)$成立，则称其为$0-1$周期数列，并称满足$a_{i+m}=a_i(i=1,2,\cdots)$的最小正整数$m$为这个序列的周期. 对于周期为$m$的$0-1$序列$a_1a_2\cdots a_n\cdots$，$C(k)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}a_ia_{i+k}\ (k=1,2,\cdots,m-1)$是描述其性质的重要指标. 下列周期为5的$0-1$序列中，满足$C(k)\le\frac{1}{5}(k=1,2,3,4)$的序列是

A.11010…　　B.11011…　　C.10001…　　D.11001…

【答案】C

【解析】

对于 A 选项，

$C(1)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}=\frac{1}{5}(1+0+0+0+0)=\frac{1}{5}$，

$C(2)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+2}=\frac{1}{5}(0+1+0+1+0)=\frac{2}{5}>\frac{1}{5}$，不满足，排除；

对于 B 选项，

$C(1)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}=\frac{1}{5}(1+0+0+1+1)=\frac{3}{5}>\frac{1}{5}$，不满足，排除；

对于 C 选项，

$C(1)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}=\frac{1}{5}(0+0+0+0+1)=\frac{1}{5}$，

$C(2)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+2}=\frac{1}{5}(0+0+0+0+0=0$，

$C(3)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+3}=\frac{1}{5}(0+0+0+0+0)=0$，

$C(4)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+4}=\frac{1}{5}(1+0+0+0+0)=\frac{1}{5}$，满足；

对于 D 选项，

$C(1)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}a_ia_{i+1}=\frac{1}{5}(1+0+0+0+1)=\frac{2}{5}>\frac{1}{5}$，不满足，排除；故选 C.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 45°，$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，则 k=______.

【答案】：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】：单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 45°，$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，所以$(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=k-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$，$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14．4 名同学到 3 个小区参加垃圾分类宣传活动，每名同学只去 1 个小区，每个小区至少安排 1 名学生，则不同的安排方法有______种.

【答案】：36

【解析】：$C_4^2A_3^3=36$.

15．设复数 z_1，z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=2$，$z_1+z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，则 $|z_1-z_2|=$__________

【答案】：$2\sqrt{3}$

【解析】：

方法 1：由题设 $z_1=a+b\mathbf{i}$，则 $z_2=\left(\sqrt{3}-a\right)+\left(1-b\right)\mathbf{i}$，

故 $\begin{cases}\left|z_1\right|^2=a^2+b^2=4\\ \left|z_2\right|^2=\left(\sqrt{3}-a\right)^2+(1-b)^2=a^2+b^2-2\sqrt{3}a-2b+4=4\end{cases}$，

则 $\left|z_1-z_2\right|^2=\left(2a-\sqrt{3}\right)^2+\left(2b-1\right)^2=4a^2+4b^2-4\sqrt{3}b-4b+4$

$=2\left(a^2+b^2\right)+2(a^2+b^2-2\sqrt{3}a-2b)=2\times4+4=12$，故 $\left|z_1-z_2\right|=2\sqrt{3}$

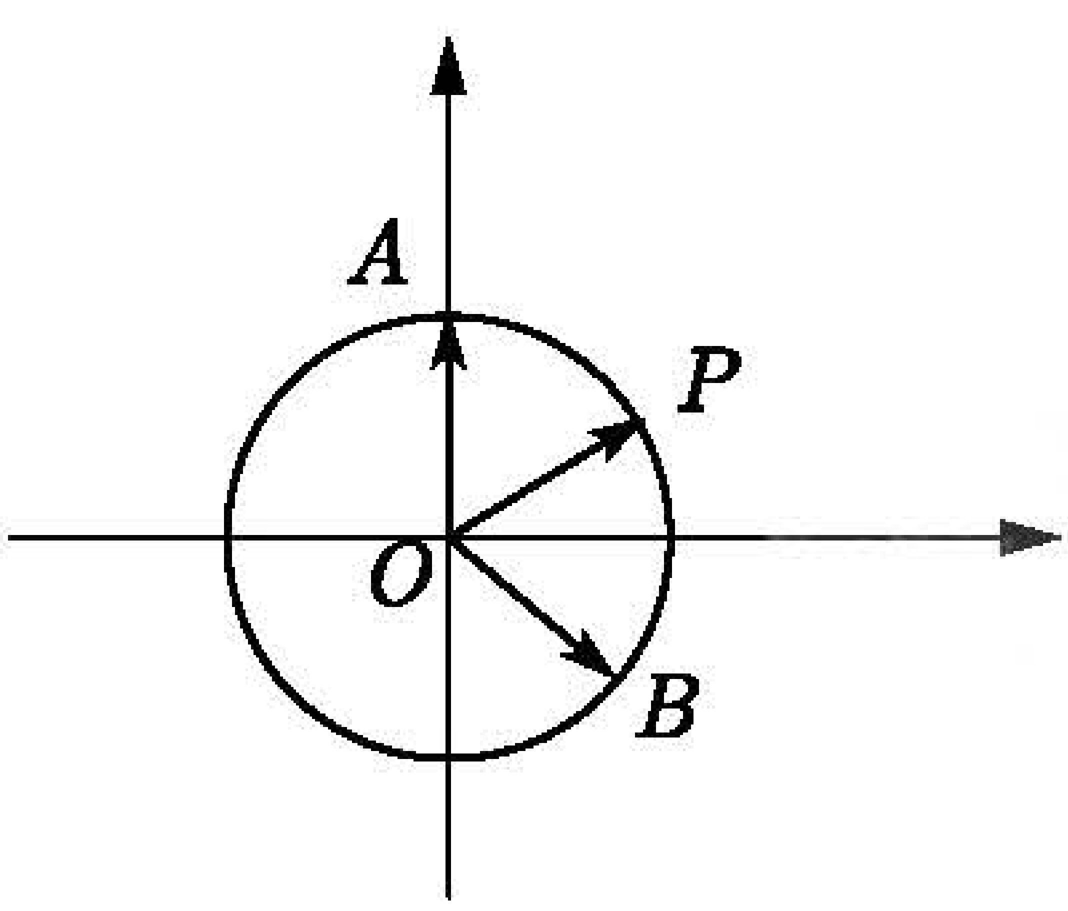
方法 2：在复平面内，用向量思想求解，原问题等价于：

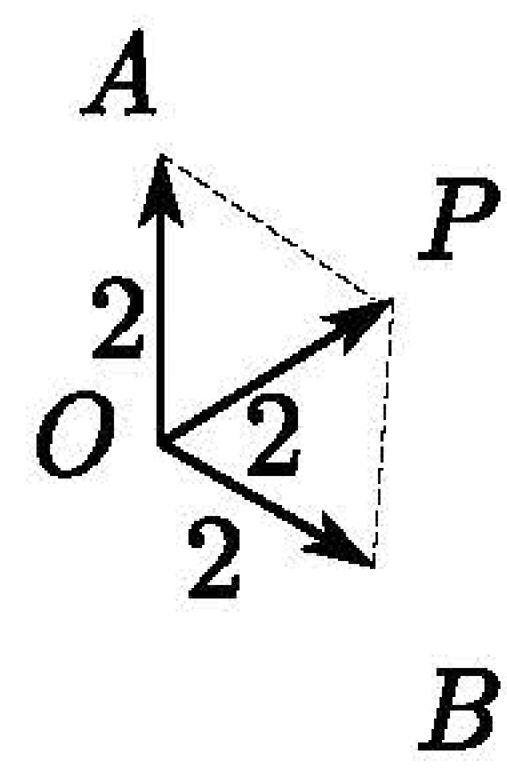
平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=2$，且 $\dot{a}+\dot{b}=(\sqrt{3},1)$，求 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

解答如下：考虑到 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=2\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{b}\right|^2$，故 $4+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=16$，故 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=2\sqrt{3}$，

故 $\left|z_1-z_2\right|=2\sqrt{3}$

方法 3：几何法：由于 $z_1+z_2=z_3=\sqrt{3}+\mathbf{i}$，在复平面内考虑 $P(\sqrt{3},1)$，由 $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=2$，平行四边形法则可知：$OABP$ 形成边长为 2，一条对角线为 2 的菱形，故另一条对角线长为 $\left|z_1-z_2\right|=2\sqrt{3}$.





16. 设有下列四个命题：

p_1：两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内.

p_2：过空间中任意三点有且仅有一个平面.

p_3：若空间两条直线不相交，则这两条直线平行.

p_4：若直线 $l\subset$ 平面 α，直线 $m\perp$ 平面 α，则 $m\perp l$.

则下列命题中所有真命题的序号是__________

① $p_1\wedge p_4$　　② $p_1\wedge p_2$　　③ $\neg p_2\vee p_3$　　④ $\neg p_3\vee\neg p_4$

【答案】：①③④

【解析】：

对于 p_1：可设 l_1 与 l_2 相交，所得平面为 α.若 l_3 与 l_1 相交，则交点 A 必在 α 内，同理，l_3 与 l_2 交点 B 在 α 内，故 AB 直线在 α 内，即 l_3 在 α 内，故 p_1 为真命题.

对于 p_2：过空间中任意三点，若三点共线，可形成无数多平面，故 p_2 为假命题.

对于 p_3：空间中两条直线的位置关系有相交、平行、异面，故 p_3 为假命题.

对于 p_4：若 $m \perp \alpha$，则 m 垂直于平面 α 内的所有直线，故 $m \perp l$，故 p_4 为真命题.

综上可知：$p_1 \wedge p_4$ 为真命题，$\neg p_2 \vee p_3$ 为真命题，$\neg p_3 \vee \neg p_4$ 为真命题.

故正确的有：①③④.

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

$\triangle ABC$ 中，$\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = \sin B \sin C$.

（1）求 A；

（2）若 $BC = 3$，求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

【答案】：（1）$A = \dfrac{2\pi}{3}$；（2）$3 + 2\sqrt{3}$

【解析】：（1）在 $\triangle ABC$ 中，设内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c

因为 $\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = \sin B \sin C$

由正弦定理得，$a^2 - b^2 - c^2 = bc$，即 $b^2 + c^2 - a^2 = -bc$

由余弦定理得，$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\dfrac{1}{2}$

因为 $0 < A < \pi$，所以 $A = \dfrac{2\pi}{3}$

（2）由（1）知 $A = \dfrac{2\pi}{3}$，因为 $BC = 3$，即 $a = 3$

由余弦定理得，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

所以 $9 = b^2 + c^2 + bc = (b+c)^2 - bc$

由基本不等式 $\sqrt{bc} \le \dfrac{b+c}{2}$ 知 $bc \le \dfrac{(b+c)^2}{4}$，结合上式得

$9=(b+c)^2-bc\geq\frac{3}{4}(b+c)^2$, $(b+c)^2\leq 12$，所以 $b+c\leq 2\sqrt{3}$

当且仅当 $b=c=\sqrt{3}$ 时取等号

所以△ ABC 周长的最大值为 $3+2\sqrt{3}$

解法 2：由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{3}{\sin\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{3}$

所以 $b=2\sqrt{3}\sin B$, $c=2\sqrt{3}\sin C$,由 $A+B+C=\pi$ 知 $C=\frac{\pi}{3}-B$， $0<B<\frac{\pi}{3}$

所以 $a+b+c=3+2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3}-B)$

$=3+2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\frac{1}{3}\sin B)$

$=3+\sqrt{3}\sin B+3\cos B$

$=3+2\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{3})$

因为 $0<B<\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，所以当且仅当 $B+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $B=\frac{\pi}{6}$ 时，

△ ABC 的周长的最大值为 $3+2\sqrt{3}$

18.（12 分）

某沙漠地区经过治理，生态系统得到很大改善，野生动物数量有所增加，为调查该地区某种野生动物的数量，将其分成面积相近的 200 个地块，从这些地块中用简单随机抽样的方法抽取 20 个作为样区，调查得到样本数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,20)$ ，其中 x_i 和 y_i 分别表示第 i 个样区的植物覆盖面积（单位：公顷）和这种野生动物的数量，并计算得 $\sum_{i=1}^{20}x_i=60$ ， $\sum_{i=1}^{20}y_i=1200$ ， $\sum_{i=1}^{20}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=80$ ， $\sum_{i=1}^{20}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=9000$ ， $\sum_{i=1}^{20}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=800$

（1）求该地区这种野生动物数量的估计值（这种野生动物数量的估计值等于样区这种野生动物数量的平均数乘以地块数）；

（2）求样本 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,20)$ 的相关系数（精确到 0.01）；

（3）根据现有统计资料，各地块间植物短盖面积差异很大，为提高样本的代表性以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计，请给出一种你认为更合理的抽样方法，并说明理由．

附：相关系数：$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，$\sqrt{2}\approx1.414$

【答案】：（1）12000；（2）0.94；（3）见解析

【解析】：（1）由题意可知，1 个样区这种野生动物数量的平均数$=\dfrac{1200}{20}=60$，故这种野生动物数量的估计值$=60\times200=12000$

（2）由参考公式得$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{800}{\sqrt{80\times9000}}=\dfrac{8}{6\sqrt{2}}\approx0.94$

（3）由题意可知，各地块间植物短盖面积差异很大，因此在调查时，先确定该地区各地块间植物短盖面积大小并且由小到大排序，每十个分为一组，采用系统抽样的方法抽取 20 个地块作为样区进行样本统计.

19.（12 分）

已知椭圆C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点$F$与抛物线$C_2$的焦点重合. C_1的中心与C_2的顶点重合，过F且与x轴垂直的直线交C_1于A，B两点，交C_2于C，D两点. 且$|CD|=\dfrac{4}{3}|AB|$.

（1）求C_1的离心率；

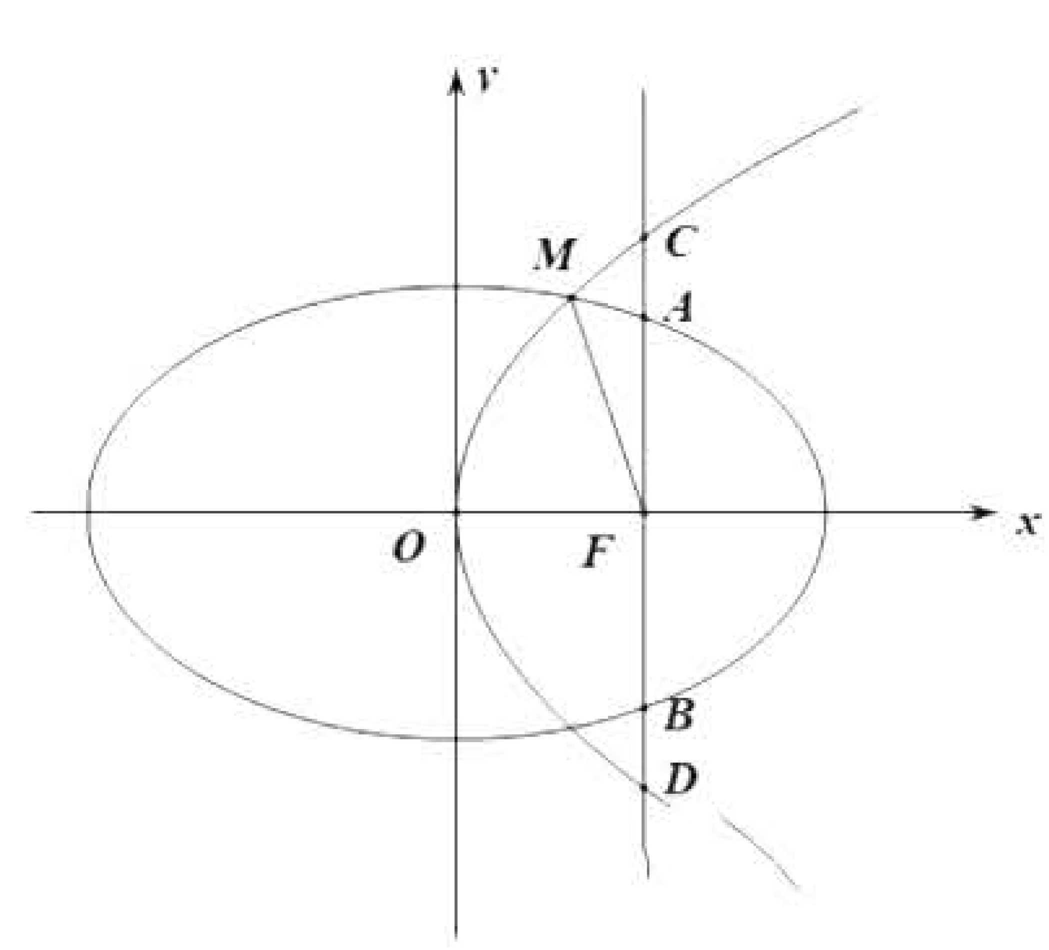
（2）设M是C_1与C_2的公共点. 若$|MF|=5$，求C_1与C_2的标准方程.

【答案】：（1）C_1的离心率为$\dfrac{1}{2}$；（2）$C_1:\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$，$C_2:y^2=12x$.

【解析】：（1）$\because F$为C_1的焦点且$AB\perp x$轴，$\therefore F(c,0)$，$|AB|=\dfrac{2b^2}{a}$.

设C_2的标准方程为$y^2=2px(p>0)$，$\because F$为C_2的焦点且$AB\perp x$轴，

$\therefore F(\dfrac{p}{2},0)$，$|AB|=2p$.



$\because|CD|=\dfrac{4}{3}|AB|$，$C_1$与$C_2$焦点重合，$\therefore\begin{cases}c=\dfrac{p}{2}\\2p=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{2b^2}{a}\end{cases}$.

消去p得：$4c=\dfrac{8b^2}{3a}$，$\therefore3ac=2b^2$，$\therefore3ac=2a^2-2c^2$，

设C_1的离心率为e，则$2e^2+3e-2=0$，$\therefore e=\dfrac{1}{2}$或$e=-2$（舍），故$C_1$的离心率为$\dfrac{1}{2}$．

（2）由（1）知$a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，$p=2c$．$\therefore C_1:\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$，$C_2:y^2=4cx$．

联立两曲线方程，消去y得$3x^2+16cx-12c^2=0$，$\therefore (3x-2c)(x+6c)=0$，

$\therefore x=\dfrac{2}{3}c$或$x=-6c$（舍），从而$|MF|=x+\dfrac{p}{2}=\dfrac{2}{3}c+c=\dfrac{5}{3}c=5$．$\therefore c=3$．

$\therefore C_1$与C_2的标准方程分别为$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$，$y^2=12x$．

20.（12分）

如图已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面是正三角形，侧面BB_1C_1C是矩形，M,N分别为BC,B_1C_1的中点，P为AM上一点，过B_1C_1和P的平面交AB于E，交AC于F．

（1）证明：$AA_1\parallel MN$，且平面$A_1AMN\perp$面EB_1C_1F

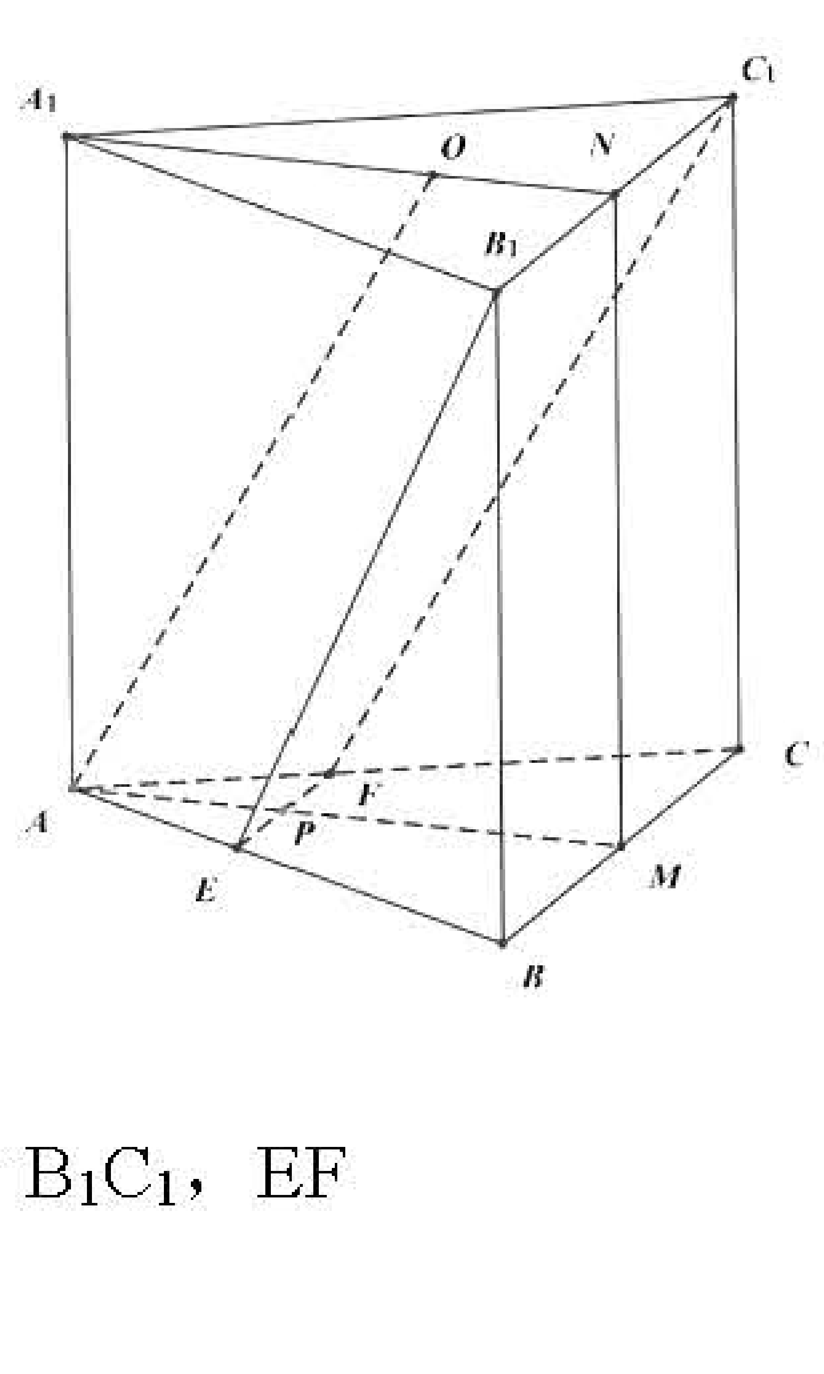
（2）设O为$A_1B_1C_1$的中心，若$AO\parallel$面EB_1C_1F，且AO=AB，求直线B_1E与平面A_1AMN所成角的正弦值.

【答案】：（1）见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】：

（1）证明：$\because M,N$分别为BC,B_1C_1的中点，底面为正三角形

$\therefore B_1N=BM$，四边形BB_1NM为矩形，$A_1N\perp B_1C_1$



$\therefore BB_1\parallel MN$，而$AA_1\parallel BB_1$，$MN\perp B_1C_1$

$\therefore AA_1\parallel MN$

又$\because MN\cap A_1N=N$

$\therefore$面$A_1AMN\perp$面EB_1C_1F

（2）$\because$三棱柱上下底面平行，平面EB_1C_1F与上下底面分别交于B_1C_1，EF

$\therefore EF\parallel B_1C_1\parallel BC$

$\because AO\parallel$面EB_1C_1F，$AO\subset$面$AMNA_1$，面$AMNA_1\cap$面$EB_1C_1F=PN$

$\therefore AO\parallel PN$，四边形APNO为平行四边形

而 O 为正三角形的中心，$AO=AB\therefore A_1N=3ON, AM=3AP, PN=BC=B_1C_1=3EF$

由（1）知直线 B_1E 在平面 A_1AMN 内的投影为 PN

直线 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角即为等腰梯形 EFC_1B_1 中 B_1E 与 PN 所成角

在等腰梯形 EFC_1B_1 中，令 EF=1，过 E 作 $EH\perp B_1C_1$ 于 H，则

$PN=B_1C_1=EH=3$，$B_1H=1, B_1E=\sqrt{10}$

$$\sin\angle B_1EH=\frac{B_1H}{B_1E}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

所以直线 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\sin^2 x\sin 2x$.

（1）讨论 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调性；

（2）证明：$\left|f(x)\right|\le\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

（3）证明：$\sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\ldots\sin^2 2^n x\le\dfrac{3^n}{4^n}$.

【答案】：（1）见解析；（2）见解析；（3）见解析

【解析】：（1）$f(x)=2\sin^3 x\cos x$，

$$f'(x)=2\sin^2 x\left(3\cos^2 x-\sin^2 x\right)=-8\sin^2 x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减；

当 $x\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；

（2）由 $f(x)=2\sin^3 x\cos x$ 得，$f(x)$ 为 R 上的奇函数.

$$f^2(x)=4\sin^6 x\cos^2 x=4\left(1-\cos^2 x\right)^3\cos^2 x=\frac{4\left(1-\cos^2 x\right)^3\times 3\cos^2 x}{3}$$

$$\le\frac{4}{3}\times\left(\frac{\left(3-3\cos^2 x+3\cos^2 x\right)}{4}\right)^4=\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

当$1-\cos^2 x=3\cos^2 x$，即$\cos x=\pm\frac{1}{2}$，时等号成立，故$\left|f(x)\right|\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

（3）由（2）知：$\sin^2 x\sin 2x\le\frac{3\sqrt{3}}{8}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$；$\sin^2 2x\sin 4x\le\frac{3\sqrt{3}}{8}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$；

$\sin^2 2^2x\sin 2^3x\le\frac{3\sqrt{3}}{8}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$；…； $\sin^2 2^{n-1}x\sin 2^n x\le\frac{3\sqrt{3}}{8}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$.

$$\sin^2 x\sin^3 2x\sin^3 4x\ldots\sin^3 2^{n-1}x\sin^2 2^n x\le\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3n}{2}}.$$

$$\sin^3 x\sin^3 2x\sin^3 4x\ldots\sin^3 2^{n-1}x\sin^3 2^n x=\sin x\left(\sin^2 x\sin^3 2x\sin^3 4x\ldots\sin^3 2^{n-1}x\sin^2 2^n x\right)\sin 2^n x\le\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3n}{2}}$$

所以：$\sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\ldots\sin^2 2^n x\le\frac{3^n}{4^n}$.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

已知C_1，C_2的参数方程分别为C_1:$\begin{cases}x=4\cos^2\theta\\y=4\sin^2\theta\end{cases}$,（$\theta$为参数），$C_2$:$\begin{cases}x=t+\frac{1}{t}\\y=t-\frac{1}{t}\end{cases}$,（$t$为参数），

（1）将C_1， C_2的参数方程化为普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，设C_1， C_2的交点为P,求圆心在极轴上，且经过极点和P的圆的极坐标方程.

【答案】:（1）见解析；（2） $\rho=\frac{17}{5}\cos\theta$

【解析】:（1）由题：C_1的普通方程为：$x+y-4=0,(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$；

因为C_2:$\begin{cases}x^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}+2\\y^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}-2\end{cases}$，故$C_2$的普通方程为：$x^2-y^2=4$；

（2）联立C_1，C_2，$\begin{cases}x+y-4=0\\x^2-y^2=4\end{cases}$解得：$\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$，所以点$P$坐标为：$P(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2})$，设以设所求圆圆心为$Q(a,0)$，半径为$a$，故圆心$Q(a,0)$到$P(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2})$的距离

$\sqrt{(\dfrac{5}{2}-a)^2+(\dfrac{3}{2}-0)^2}=a$，得$a=\dfrac{17}{10}$，所以圆$Q$的圆心为$Q(\dfrac{17}{10},0)$，半径为$\dfrac{17}{10}$，

圆Q的直角坐标方程为：$(x-\dfrac{17}{10})^2+y^2=(\dfrac{17}{10})^2$

即：$x^2+y^2-\dfrac{17}{5}x=0$，所以所求圆的极坐标方程为：$\rho=\dfrac{17}{5}\cos\theta$.

23．[选修4-5：不等式选讲]（10分）

$f(x)=|x-a^2|+|x+2a-1|$,

（1）当$a=2$时，求不等式$f(x)\geq 4$的解集.

（2）$f(x)\geq 4$，求a的取值范围.

【答案】:（1）解集为R；（2）$a\geq 1或a\leq -3$或$a=-1$

【解析】:（1）当$a=2$时，$f(x)=|x-4|+|x+3|\geq|x-4-(x+3)|=7$,

当$x\in[-3,4]$时，等号成立.所以$f(x)\geq 4$的解集为R.

（2）$f(x)=|x-a^2|+|x+2a-1|\geq|x-a^2-(x+2a-1)|=|(a+1)^2-2|$,

又$f(x)\geq 4$，所以$|(a+1)^2-2|\geq 4$，则$a\geq 1或a\leq -3$或$a=-1$.