

东城区 2019-2020 学年度第一学期期末教学统一检测

高一数学

2020. 1

本试卷共 4 页，满分 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共 50 分)

一、单项选择题：共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 设集合 $M = \{0\}$ ， $N = \{-1, 0, 1\}$ ，那么下列结论正确的是

- (A) $M = \emptyset$ (B) $M \in N$ (C) $M \cup N$ (D) $N \cup M$

(2) 下列函数为偶函数的是

- (A) $y = |x|$ (B) $y = \ln x$ (C) $y = e^x$ (D) $y = x^3$

(3) 已知函数 $y = \sin x$ 在区间 M 上单调递增，那么区间 M 可以是

- (A) $(0, 2\pi)$ (B) $(0, \pi)$ (C) $(0, \frac{3\pi}{2})$ (D) $(0, \frac{\pi}{2})$

(4) 命题“ $\forall x \in A, 2x \in B$ ”的否定为

- (A) $\exists x \in A, 2x \notin B$ (B) $\exists x \notin A, 2x \in B$
(C) $\forall x \in A, 2x \notin B$ (D) $\forall x \notin A, 2x \in B$

(5) 若 $a > b$ ，则下列不等式一定成立的是

- (A) $a^2 > b^2$ (B) $2^a > 2^b$ (C) $a^{\frac{1}{2}} > b^{\frac{1}{2}}$ (D) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(6) 下列各式正确的是

- (A) $\sin \frac{\pi}{5} < \sin \frac{6\pi}{5}$ (B) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) < \cos \frac{\pi}{6}$
(C) $\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right) < \tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$ (D) $\sin \frac{2\pi}{7} < \cos \frac{2\pi}{7}$

(7) “ a, b 为正实数”是“ $a+b > 2\sqrt{ab}$ ”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(8) 大西洋鲑鱼每年都要逆流而上 3000 英里游回它们出生的地方产卵繁殖. 研究鲑鱼的科学家发现鲑鱼的

流速 v (单位: m/s) 可以表示为 $v = \frac{1}{2} \log_3 \frac{O}{100}$, 其中 O 表示鲑鱼的耗氧量的单位数. 则该鲑鱼

流速为 2m/s 时的耗氧量与静止时耗氧量的比值为

- (A) 8100 (B) 900 (C) 81 (D) 9

二、多项选择题: 本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分。

(9) 关于函数 $f(x) = 1 + \cos x, x \in \left(\frac{\pi}{3}, 2\pi\right)$ 的图象与直线 $y = t$ (t 为常数) 的交点情况, 下列说法正

确的是

- (A) 当 $t < 0$ 或 $t \geq 2$ 时, 有 0 个交点
(B) 当 $t = 0$ 或 $\frac{3}{2} \leq t < 2$ 时, 有 1 个交点
(C) 当 $0 < t \leq \frac{3}{2}$ 时, 有 2 个交点
(D) 当 $0 < t < 2$ 时, 有 2 个交点

(10) 已知函数 $f(x) = 4^{|x|} + x^2 + a$, 下列命题正确的有

- (A) 对于任意实数 a , $f(x)$ 为偶函数
(B) 对于任意实数 a , $f(x) > 0$
(C) 存在实数 a , $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减
(D) 存在实数 a , 使得关于 x 的不等式 $f(x) \geq 5$ 的解集为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

第二部分 (非选择题 共 100 分)

三、填空题: 共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(11) 函数 $f(x) = \ln(1-x^2)$ 的定义域是_____.

(12) $\sin \frac{11\pi}{6}$ 的值为_____.

(13) 函数 $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$, 且在定义域内单调递减, 则符合要求的函数 $f(x)$ 可以为_____. (写出符合条件的一个函数即可)

(14) 在国庆 70 周年庆典活动中, 东城区教育系统近 2000 名师生参与了国庆中心区合唱、27 方阵群众游行、联欢晚会及 7 万只气球保障等多项重点任务. 设 $A = \{x | x \text{ 是参与国庆中心区合唱的学校}\}$, $B = \{x | x \text{ 是参与 27 方阵群众游行的学校}\}$, $C = \{x | x \text{ 是参与国庆联欢晚会的学校}\}$. 请用上述集合之间的运算来表示:

①既参与国庆中心区合唱又参与 27 方阵群众游行的学校的集合为_____;

②至少参与国庆中心区合唱与国庆联欢晚会中一项的学校的集合为_____.

(15) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1, \\ 2^x, & x < 1. \end{cases}$ 则 $f(-2) =$ _____ ; 若 $f(t) = 1$, 则实数 $t =$ _____.

(16) 某池塘中原有一块浮草, 浮草蔓延后的面积 y (平方米) 与时间 t (月) 之间的函数关系式是 $y = a^{t-1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 它的图象如下图所示, 给出以下命题:

①池塘中原有浮草的面积是 0.5 平方米;

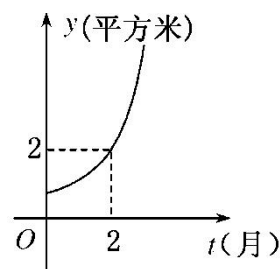
②第 8 个月浮草的面积超过 60 平方米;

③浮草每月增加的面积都相等;

④若浮草面积达到 10 平方米, 20 平方米, 30 平方米所经过的时间

分别为 t_1, t_2, t_3 , 则 $2t_2 > t_1 + t_3$.

其中正确命题的序号有_____. (注: 请写出所有正确结论的序号)



四、解答题: 共 5 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

(17) (本小题 12 分)

已知集合 $A = \{x | x^2 + 3x + 2 < 0\}$, 全集 $U = \mathbf{R}$.

(1) 求 $\complement_U A$;

(2) 设 $B = \{x | m-1 \leq x \leq m\}$, 若 $B \subseteq \complement_U A$, 求 m 的取值范围.

(18) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + \varphi)$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $f(0) = \sqrt{3}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的解析式和最小正周期;
- (2) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的最大值和最小值.

(19) (本小题 14 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α, β ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$) 的顶点与坐标原点 O 重合, 始边为 x 轴的非负半轴, 终边分别与单位圆交于 A, B 两点, A, B 两点的纵坐标分别为 $\frac{4}{5}, \frac{5}{13}$.

- (1) 求 $\tan \beta$ 的值;
- (2) 求 $\frac{\sin(\alpha + \pi) + \cos(\pi - \beta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} + \beta)}$ 的值.

(20) (本小题 16 分)

已知函数 $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$.

- (1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性并证明;
- (2) 判断 $f(x)$ 的单调性并说明理由;
- (3) 若 $f(ax-1) + f(2-x) > 0$ 对任意 $a \in (-\infty, 2]$ 恒成立, 求 x 的取值范围.

(21) (本小题 15 分)

对于集合 A , 定义函数 $f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \notin A, \\ -1, & x \in A. \end{cases}$

对于两个集合 A, B , 定义运算 $A * B = \{x | f_A(x) \cdot f_B(x) = -1\}$.

- (1) 若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 写出 $f_A(1)$ 与 $f_B(1)$ 的值, 并求出 $A * B$;
- (2) 证明: $f_{A*B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$;
- (3) 证明: *运算具有交换律和结合律, 即 $A * B = B * A$, $(A * B) * C = A * (B * C)$

东城区 2019-2020 学年度第一学期期末教学统一检测

高一数学参考答案及评分标准

2020.1

一、单项选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

- (1) C (2) A (3) D (4) A
(5) B (6) B (7) D (8) C

二、多项选择题（共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

- (9) AB (10) ACD

三、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

- (11) $(-1,1)$ (12) $\frac{1}{2}$
(13) $y = (\frac{1}{2})^x$ （答案不唯一） (14) $A \cap B; A \cup C$
(15) $\frac{1}{4}; 0$ 或 1 (16) ①②④

四、解答题（共 5 小题，共 70 分）

- (17)（共 12 分）

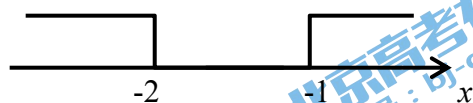
解：(1) 因为 $A = \{x | x^2 + 3x + 2 < 0\}$,

解得集合 $A = \{x | -2 < x < -1\}$.

因为全集 $U = \mathbf{R}$,

所以 $\complement_U A = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq -1\}$6 分

(II) 由题意可得 $\complement_U A$ 如下图:



当 $m-1 \geq -1$ 或 $m \leq -2$, 即 $m \geq 0$ 或 $m \leq -2$ 时, $B \subseteq \complement_U A$.

所以 m 的取值范围为 $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$12 分

- (18)（共 13 分）

解：(1) 因为 $f(0) = \sqrt{3}$, 所以 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$.

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$8分

(2) 因为 $x \in [0, 2\pi]$,

所以 $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.

当 $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 有最大值 2,

当 $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, 即 $x = 2\pi$ 时, $f(x)$ 有最小值 $-\sqrt{3}$13分

(19) (共 14 分)

解: (1) 因为 β 的终边与单位圆交于点 B , B 点的纵坐标为 $\frac{5}{13}$, 所以 $\sin \beta = \frac{5}{13}$.

因为 $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, 所以 $\cos \beta = -\frac{12}{13}$.

所以 $\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -\frac{5}{12}$6分

(2) 因为 α 的终边与单位圆交于点 A , A 点的纵坐标为 $\frac{4}{5}$, 所以 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

$\frac{\sin(\alpha + \pi) + \cos(\pi - \beta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} + \beta)}$

$= \frac{-\sin \alpha - \cos \beta}{\cos \alpha - \sin \beta}$

$= \frac{-\frac{4}{5} - \frac{12}{13}}{\frac{3}{5} - \frac{5}{13}}$

$= \frac{-\frac{4}{5} + \frac{12}{13}}{\frac{3}{5} - \frac{5}{13}}$

$$= \frac{4}{7}. \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

(20) (共 16 分)

解: (1) $f(x)$ 为奇函数.

因为 $f(x)$ 定义域为 \mathbf{R} ,

$$f(-x) = \frac{3^{-x} - 3^x}{2},$$

所以 $f(-x) = -f(x)$.

所以 $f(x)$ 为奇函数. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是增函数.

因为 $y = 3^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是增函数,

且 $y = 3^{-x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是减函数,

所以 $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是增函数. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

(3) 由 (1) (2) 知 $f(x)$ 为奇函数且 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是增函数.

又因为 $f(ax-1) + f(2-x) > 0$

所以 $f(ax-1) > -f(2-x) = f(x-2)$.

所以 $ax-1 > x-2$ 对任意 $a \in (-\infty, 2]$ 恒成立.

令 $g(a) = xa + (1-x)$, $a \in (-\infty, 2]$.

则只需
$$\begin{cases} x \leq 0, \\ g(2) = 2x + (1-x) > 0. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x \leq 0, \\ x > -1. \end{cases}$$
 所以 $-1 < x \leq 0$.

所以 x 的取值范围为 $(-1, 0]$. $\dots\dots\dots 16 \text{ 分}$

(21) (共 15 分)

解: (1) $f_A(1) = -1, f_B(1) = 1, A * B = \{1, 4, 5\}$3 分

(2) ①当 $x \in A$ 且 $x \in B$ 时, $f_A(x) = f_B(x) = -1$.

所以 $x \notin A * B$. 所以 $f_{A*B}(x) = 1$.

所以 $f_{A*B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$.

②当 $x \in A$ 且 $x \notin B$ 时, $f_A(x) = -1, f_B(x) = 1$.

所以 $x \in A * B$. 所以 $f_{A*B}(x) = -1$.

所以 $f_{A*B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$.

③当 $x \notin A$ 且 $x \in B$ 时, $f_A(x) = 1, f_B(x) = -1$.

所以 $x \in A * B$. 所以 $f_{A*B}(x) = -1$.

所以 $f_{A*B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$.

④当 $x \notin A$ 且 $x \notin B$ 时, $f_A(x) = f_B(x) = 1$.

所以 $x \notin A * B$. 所以 $f_{A*B}(x) = 1$.

所以 $f_{A*B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$.

综上, $f_{A*B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$11 分

(3) 因为 $A * B = \{x \mid f_A(x) \cdot f_B(x) = -1\}$,

$B * A = \{x \mid f_B(x) \cdot f_A(x) = -1\} = \{x \mid f_A(x) \cdot f_B(x) = -1\}$,

所以 $A * B = B * A$.

因为 $(A * B) * C = \{x \mid f_{A*B}(x) \cdot f_C(x) = -1\} = \{x \mid f_A(x) \cdot f_B(x) \cdot f_C(x) = -1\}$,

$A * (B * C) = \{x \mid f_A(x) \cdot f_{B*C}(x) = -1\} = \{x \mid f_A(x) \cdot f_B(x) \cdot f_C(x) = -1\}$,

所以 $(A * B) * C = A * (B * C)$15 分