人大附中 2022-2023 学年度第一学期高三年级 统练五

数 学

2022. 12. 13

一、单选题(共 50 分，每小题 5 分)

1. 若 $z=1+i$，则 $|z^2-2z|=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

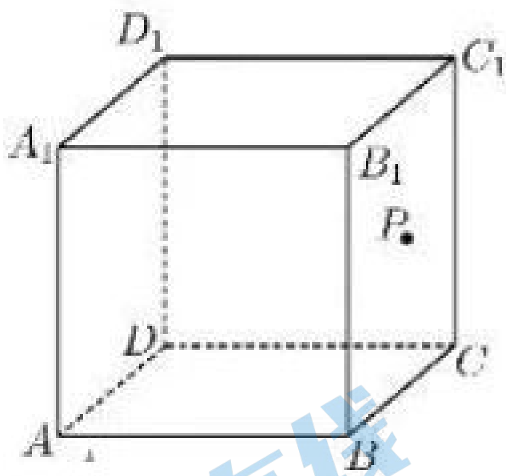
2. 若 l,m 是两条不同的直线，m 垂直于平面 α，则“$l\perp m$”是“$l//\alpha$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 如图，若正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的侧面 BCC_1B_1 内动点 P 到棱 A_1B_1 的距离等于它到棱 BC 的距离，则点 P 所在的曲线为（　）

A. 椭圆　　B. 双曲线　　C. 抛物线　　D. 圆



4. 恩格尔系数 $n=\dfrac{\text{食品消费支出总额}}{\text{消费支出总额}}\times100\%$，国际上常用恩格尔系数 n 来衡量一个地区家庭的富裕程度，恩格尔系数越低，人民生活越富裕.某地区家庭 2021 年底恩格尔系数 n 为 50%，刚达到小康，预计从 2022 年起该地区家庭每年消费支出总额增加 30%，食品消费支出总额增加 20%，依据以上数据，预计该地区家庭恩格尔系数 n 满足 $30\%<n\le40\%$ 达到富裕水平，至少经过（　　）年（参考数据：$\lg0.6\approx-0.22$，$\lg0.8\approx-0.10$，$\lg12\approx1.08$，$\lg13\approx1.11$）

A. 8 年　　B. 7 年　　C. 4 年　　D. 3 年

5. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$AA_1=2$，点 P、Q 分别是棱 BB_1，AB 上的动点，则下列判断错误的是（　　）

A. 任意给定的点 P，存在点 Q，使得 $PQ//$ 平面 A_1C_1D

B. 任意给定的点 Q，存在点 P，使得 $PQ//$ 平面 A_1C_1D

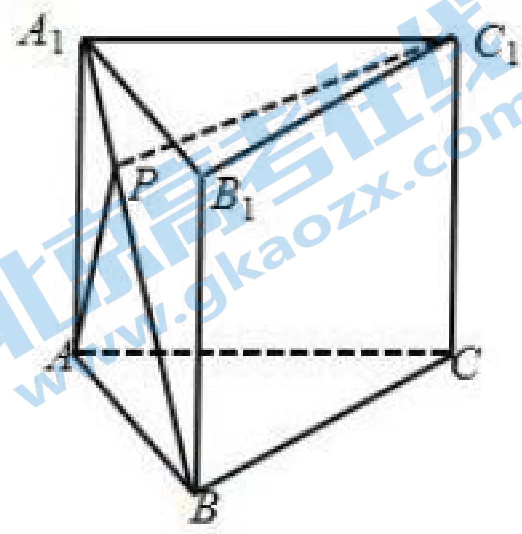
C. 任意给定的点 P，存在点 Q，使得 $CP\perp D_1Q$

D. 任意给定的点 Q，存在点 P，使得 $CP\perp D_1Q$

6．如图所示，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=1$，$AB=BC=\sqrt{3}$，$\cos\angle ABC=\frac{1}{3}$，$P$ 是 A_1B 上的一动点，则 $AP+PC_1$ 的最小值为（　　）

A．$\sqrt{5}$　　　　B．$\sqrt{7}$

C．$1+\sqrt{3}$　　　　D．3



7．已知圆的方程 $x^2+y^2=25$，过 $M(-4,3)$ 作直线 MA,MB 与圆交于点 A,B，且 MA,MB 关于直线 $y=3$ 对称，则直线 AB 的斜率等于（　　）

A．$-\frac{4}{3}$　　　　B．$-\frac{3}{4}$　　　　C．$-\frac{5}{4}$　　　　D．-2

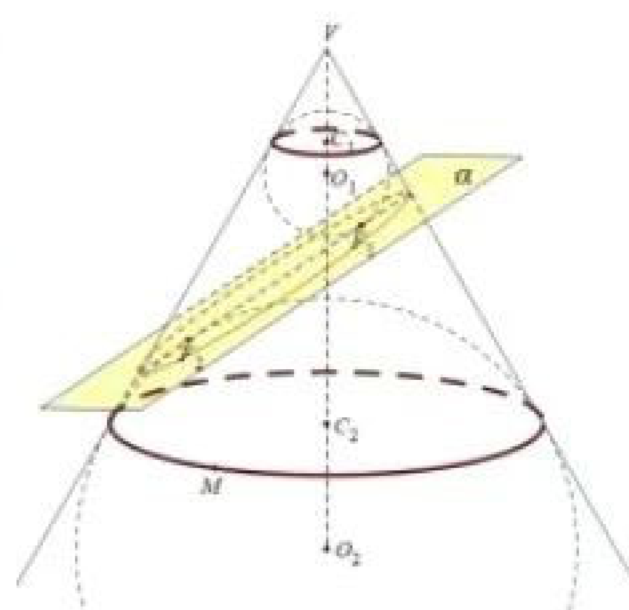
8．已知 EF 是棱长为 8 的正方体外接球的一条直径，点 M 在正方体表面上运动，则 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}$ 的最小值为（　　）

A．-48　　　　B．-32　　　　C．-16　　　　D．0

9．已知抛物线 $C:y^2=4x$，点 P 为抛物线上任意一点，过点 P 向圆 $D:x^2+y^2-6x+8=0$ 作切线，切点分别为 A,B，则四边形 $PADB$ 的面积的最小值为（　　）

A．3　　　　B．$2\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{7}$　　　　D．$\sqrt{5}$

10．如图所示，在圆锥内放入两个球 O_1，O_2，它们都与圆锥相切（即与圆锥的每条母线相切），切点圆（图中粗线所示）分别为 $\odot C_1$，$\odot C_2$．这两个球都与平面 α 相切，切点分别为 F_1，F_2，丹德林（G.Dandelin）利用这个模型证明了平面 α 与圆锥侧面的交线为椭圆，F_1，F_2 为此椭圆的两个焦点．这两个球也称为 Dandelin 双球．若圆锥的母线与它的轴的夹角为 $30°$，$\odot C_1$，$\odot C_2$ 的半径分别为 1，4，点 M 为 $\odot C_2$ 上的一个定点，点 P 为椭圆上的一个动点．则从点 P 沿圆锥表面到达点 M 的路线长与线段 PF_1 的长之和的最小值是



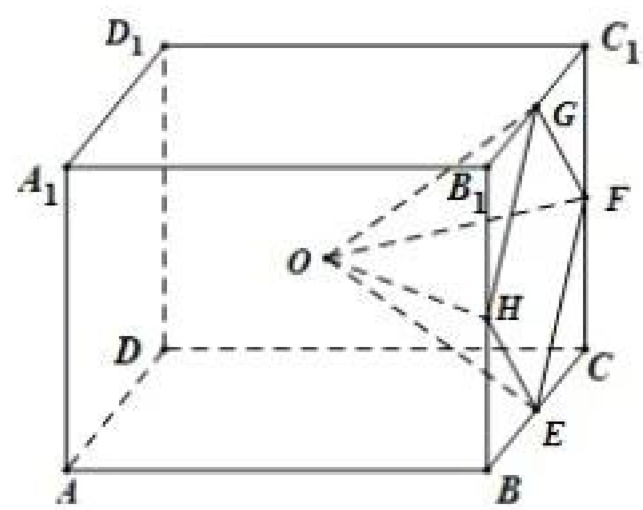
（A）6　　　（B）8　　　（C）$3\sqrt{3}$　　　（D）$4\sqrt{3}$

二、填空题(共 25 分，每小题 5 分)

11．已知直线 $ax+by+1=0$ 与直线 $4x+3y+5=0$ 平行，且 $ax+by+1=0$ 在 y 轴上的截距为 $\frac{1}{3}$，则 $a+b$ 的值为______.

12．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4+a_6+a_9=12$，则 $a_3+5a_7=$______.

13．学生到工厂劳动实践，利用 $3D$ 打印技术制作模型.如图，该模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O-EFGH$ 后所得的几何体，其中 O 为长方体的中心，E,F,G,H 分别为所在棱的中点，$AB=BC=6\text{cm}, AA_1=4\text{cm}$，$3D$ 打印所用原料密度为 $0.9g/cm^3$，不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量为__________g.



14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+ax+1, & x\le 1,\\ 3ax+1, & x>1.\end{cases}$

① 当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的极值点个数为__________;

② 若 $f(x)$ 恰有两个极值点，则 a 的取值范围是________.

15．设集合 S，T，$S\subseteq\mathbf{N}^*$，$T\subseteq\mathbf{N}^*$，S，T 中至少有两个元素，且 S，T 满足：

对于任意 x，$y\in S$，若 $x\neq y$，都有 $xy\in T$；对于任意 x，$y\in T$，若 $x<y$，则 $\frac{y}{x}\in S$；

给出下列四个结论：

① 若 S 有 3 个元素，则 $S\cup T$ 可能有 4 个元素

② 若 S 有 3 个元素，则 $S\cup T$ 可能有 5 个元素

③ 若 S 有 4 个元素，则 $S\cup T$ 一定有 7 个元素

④ 若 S 有 4 个元素，则 $S\cup T$ 可能有 6 个元素

其中所有正确结论的序号是__________.

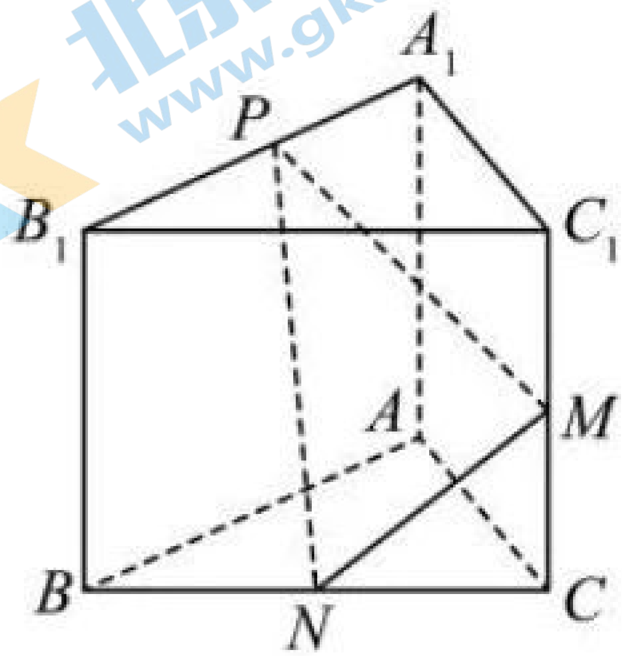
三、解答题(共 25 分)

16．（本小题满分 12 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中侧棱与底面垂直，且 $AB=AC=2$，$AA_1=4$，$AB\perp AC$，M，N，P 分别为 CC_1，BC，A_1B_1 的中点.

(1)求证：$PN//$ 面 ACC_1A_1；

(2)求平面 PMN 与平面 ACC_1A_1 所成锐二面角的余弦值.



17．（本小题满分 13 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$，点 $A(2,1)$，过点 $B(3,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M，N.

(1)若直线 l 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，求△ AMN 的面积；

(2)设直线 AM 和直线 AN 的斜率分别为 k_{AM} 和 k_{AN}，求证：$k_{AM}+k_{AN}$ 为定值.

人大附中 2022-2023 学年度第一学期高三年级统练五

参考答案

2022.12.13

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

（1）D　（2）B　（3）C　（4）C　（5）C

（6）B　（7）A　（8）B　（9）C　（10）A

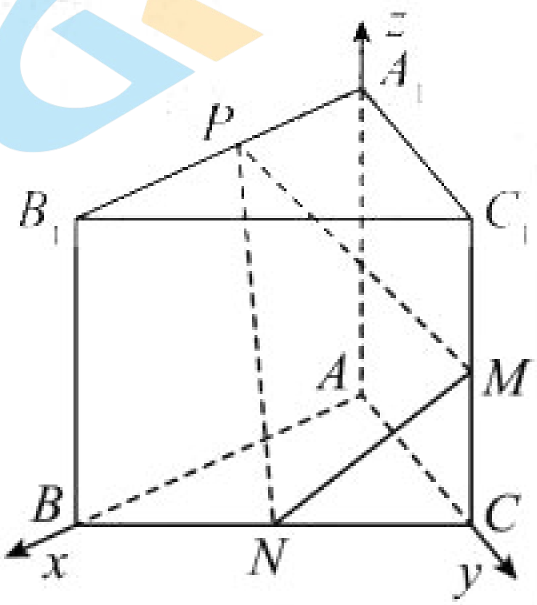
二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）-7　（12）24　（13）118.8　（14）2；$(-\frac{1}{2},2)$　（15）①②③

三、解答题（共 2 小题，共 25 分）

（16）（共 12 分）

【解】(1) 方法一：以点 A 为坐标原点，AB、AC、AA_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，



则 $A_1(0,0,4)$，$B(2,0,0)$，$M(0,2,2)$，$N(1,1,0)$，$P(1,0,4)$.

取向量 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$ 为平面 ACC_1A_1 的一个法向量，$\overrightarrow{PN}=(0,1,-4)$，

$\therefore \overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{AB}=0\times2+1\times0+(-4)\times0=0$，$\therefore \overrightarrow{PN}\perp\overrightarrow{AB}$.

又$\because PN\not\subset$平面 ACC_1A_1，$\therefore PN$ // 平面 ACC_1A_1；

方法二：设 D 为 B_1C_1 的中点.

$\because P$，D 分别为 A_1B_1，B_1C_1 的中点，

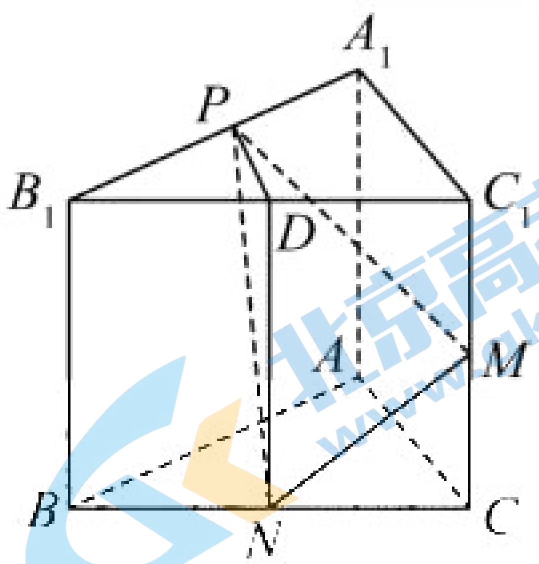
$\therefore PD$ // A_1C_1，且 $A_1C_1\subset$平面 ACC_1A_1，$PD\not\subset$平面 ACC_1A_1，$\therefore PD$ // 平面 ACC_1A_1，

$\because D$，N 分别为 B_1C_1，BC 的中点，

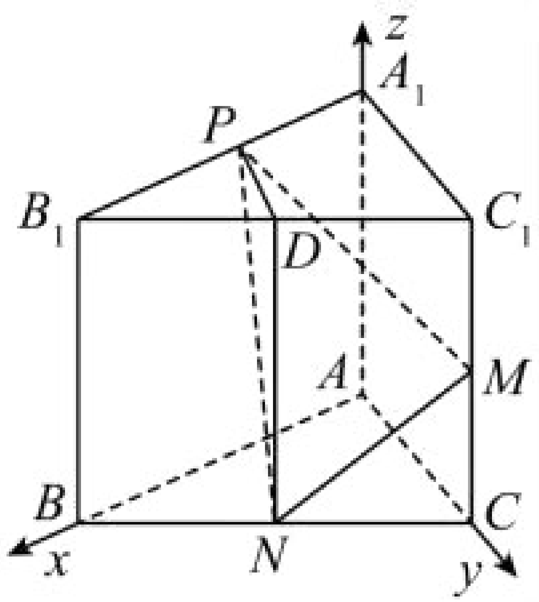
$\therefore DN \parallel CC_1$，且 $CC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1，$DN \not\subset$ 平面 ACC_1A_1，

$\therefore DN \parallel$ 平面 ACC_1A_1，又 $PD \cap DN = D$，PD、$DN \subset$ 平面 PDN，$\therefore$ 平面 $PDN \parallel$ 平面 ACC_1A_1，

又 $\because PN \subset$ 平面 PDN，$\therefore PN \parallel$ 平面 ACC_1A_1．



（2）以点 A 为坐标原点，AB、AC、AA_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，



$\overrightarrow{PN} = (0,1,-4)$，$\overrightarrow{PM} = (-1,2,-2)$，

取向量 $\overrightarrow{AB} = (2,0,0)$ 为平面 ACC_1A_1 的一个法向量，

设平面 PMN 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PM} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} -x+2y-2z=0 \\ y-4z=0 \end{cases}$，

令 $z=1$，则 $x=6$，$y=4$，则 $\vec{n}=(6,4,1)$，

$$\therefore \cos<\overrightarrow{AB},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2\times6+0\times4+0\times1}{2\sqrt{6^2+4^2+1^2}}=\frac{6\sqrt{53}}{53},$$

$\therefore$ 平面 PMN 与平面 ACC_1A_1 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{6\sqrt{53}}{53}$．

（17）（共 13 分）

（1）由题设，直线 MN 为 $y=\frac{1}{2}(x-3)$，即 $x-2y-3=0$，设 $M(x_M,y_M),N(x_N,y_N)$

联立 $\begin{cases}x-2y-3=0\\x^2+2y^2=6\end{cases}$，

整理得：$x^2-2x-1=0$，则 $x_M+x_N=2$，$x_Mx_N=-1$，

所以 $|x_M-x_N|=\sqrt{(x_M+x_N)^2-4x_Mx_N}=2\sqrt{2}$，则 $|MN|=\sqrt{1+k^2}\,|x_M-x_N|=\sqrt{10}$，

又 $A(2,1)$ 到直线 MN 距离为 $\frac{3}{\sqrt{5}}$，故△ AMN 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sqrt{5}}\times\sqrt{10}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$．

（2）由题设，直线 l 的斜率一定存在，设直线 $l:y=k(x-3)$，

联立椭圆并整理得：$(1+2k^2)x^2-12k^2x+18k^2-6=0$，

$$\text{则}\begin{cases}\Delta>0\\x_N+x_M=\dfrac{12k^2}{1+2k^2}\\x_Nx_M=\dfrac{6(3k^2-1)}{1+2k^2}\end{cases},$$

$k_{AM}=\frac{y_M-1}{x_M-2}$，$k_{AN}=\frac{y_N-1}{x_N-2}$，

且 $y_M=k(x_M-3)$，$y_N=k(x_N-3)$，

$$\text{则 } k_{AM}+k_{AN}=\frac{(x_Ny_M+x_My_N)-(x_N+x_M)-2(y_N+y_M)+4}{x_Nx_M-2(x_N+x_M)+4}$$

$$=\frac{2kx_Nx_M-(5k+1)(x_N+x_M)+12k+4}{x_Nx_M-2(x_N+x_M)+4}$$

$$=\frac{-\frac{4(k^2-1)}{1+2k^2}}{\frac{2(k^2-1)}{1+2k^2}}=-2$$

为定值.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〃 精益求精、专业严谨 〃 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。