

高三数学试卷

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:集合、逻辑、不等式、函数、导数、三角函数、解三角形、平面向量、复数、数列。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x \in \mathbf{Z} | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $N = \{x | y = \ln(1-x)\}$, 则 $M \cap N =$
A. $(1, 2]$ B. $\{1, 2\}$ C. $[-1, 1)$ D. $\{-1, 0\}$
2. 已知复数 z 满足 $2z + i \cdot \bar{z} = 3$, 则复数 z 的虚部为
A. -1 B. 2 C. $2i$ D. $-i$
3. 已知 x, y 为非零实数, 向量 a, b 为非零向量, 则“ $|a+b| = |a| + |b|$ ”是“存在非零实数 x, y , 使得 $xa + yb = 0$ ”的
A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 函数 $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x}$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为
A. $y = 3x - 3$ B. $y = 2x - 2$
C. $y = 3x - 2$ D. $y = 2x - 1$
5. 若 $\tan \theta = 2$, 则 $\frac{(\sin \theta + \cos \theta) \cos 2\theta}{\sin \theta} =$
A. $-\frac{2}{5}$ B. $-\frac{9}{10}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{9}{10}$
6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2 + a_5 + a_8 = 3$, 则 $2a_4 + a_7 =$
A. 6 B. 5 C. 4 D. 3
7. 已知函数 $f(x) = x^3 + x + 1$, 若 $f(1-x) + f(2x) > 2$, 则 x 的取值范围是
A. $(-\infty, -1)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$
8. $a = \sin \frac{\pi}{5}$, $b = e^{-\frac{1}{4}}$, $c = (\frac{1}{6})^{\frac{1}{8}}$, 则
A. $a < c < b$ B. $b < a < c$ C. $a < b < c$ D. $c < b < a$

二、选择题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(2x+1)$ 为奇函数, $f(x-1) = f(-x-1)$, 则
A. $f(1) = 0$ B. $f(3) = 0$
C. $f(5) = 0$ D. $f(7) = 0$
10. 已知函数 $f(x) = \sin 2x + \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$, 则
A. $f(x)$ 的最大值为 3
B. $f(x)$ 的最小正周期为 π
C. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称
D. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{12})$ 上单调递增
11. 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点在同一个圆上, 且 $AB = CD = 2, BC = 3, AD < 2$, 则 $\angle ABC$ 可能为
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$
12. 在一次数学活动课上, 老师设计了有序实数组 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, $a_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3, \dots, n$, $f(A)$ 表示把 A 中每个 1 都变为 0, 0 都变为 1, 所得到的新的有序实数组, 例如 $A = \{0, 1\}$, 则 $f(A) = \{1, 0\}$. 定义 $A_{k+1} = f(A_k), k = 1, 2, 3, \dots, n$, 若 $A_1 = \{0, 1\}$, 则
A. A_{101} 中有 2^{49} 个 0
B. A_{100} 中有 2^{49} 个 1
C. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$ 中 0 的总个数比 1 的总个数多 $2^{50} - 1$
D. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$ 中 1 的总个数为 $2^{51} - 1$

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。把答案填在答题卡中的横线上。

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 若点 D 满足 $\vec{BC} = \lambda \vec{CD}, \vec{AD} = \frac{3}{2} \vec{AC} - \frac{1}{2} \vec{AB}$, 则 $\lambda =$ \blacktriangle .
14. 已知实数 a, b 满足 $a > b > 0$, 则 $\frac{a}{a-b} + \frac{a}{b}$ 的最小值为 \blacktriangle .
15. 剪纸, 又叫刻纸, 是一种镂空艺术。如图, 原纸片为一圆形, 直径 $AB = 20$ cm, 需要剪去四边形 $ACDC_1$, 可以通过对折、沿 DC, AC 裁剪、展开实现。


已知点 C 在圆上且 $AD = 5$ cm, $\angle DCA = 45^\circ$, 则四边形 $ACDC_1$ 的面积为 \blacktriangle cm^2 .

16. 已知函数 $f(x) = \frac{e^{ax}}{x^a} - ex + a \ln x$ 的最小值为 1, 则 a 的取值范围为 \blacktriangle .

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x) = ax^4 + bx^3$ 在 $x=1$ 处有极值 -1 .

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - mx$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,求 m 的取值范围.

18. (12 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = \frac{n^2 + n}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = \frac{1}{a_n + a_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_n .

19. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 向量 $m = (c, a - b)$, $n = (\sin B - \sin C, \sin A + \sin B)$, 且 $m \perp n$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 D 为 AC 上一点, 且 $AD = BD, BC = 3$, 求 $\triangle BCD$ 面积的最大值.

20. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{4}{3}, a_{n+1} = \frac{(n+2)a_n}{a_n + n + 1}$.

(1) 证明 $\{\frac{2n+2}{a_n}\}$ 为等差数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若不等式 $a_1 a_2 a_3 \dots a_n \geq m \sqrt{2n+3}$ 对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, 求正数 m 的最大值.

21. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 a 是 b 和 $b+c$ 的等比中项.

(1) 证明: $A = 2B$.

(2) 求 $2\sin A - \sin(B-C)$ 的取值范围.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{m}{x} - 3$ 有两个零点.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 设 a, b 为 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $ab < me^2$.