2019 北京朝阳高三（上）期末

数　　学（文）

2019．1

（考试时间 120 分钟　　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{x\in \mathbf{N}\,|\,1\le x\le 3\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{2,3\}$　　B. $\{2,3,4,5\}$　　C. $\{2\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

2. 下列函数在其定义域内既是奇函数又是增函数的是

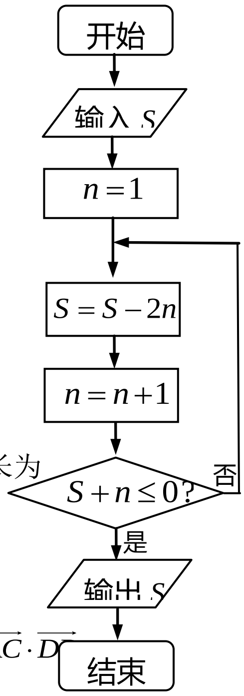
A. $y=\lg x$　　B. $y=x^3$　　C. $y=\sin x$　　D. $y=x^{\frac{1}{2}}$

3. 设 a 是实数，则“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 执行如图所示的程序框图，若输入的 $S=12$，则输出的 $S=$



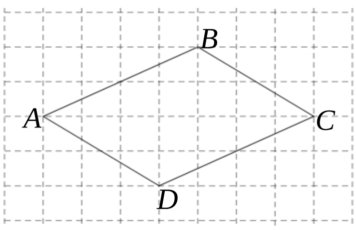
A. 5　　B. 6

C. -8　　D. -18

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，过 $A(4,4),B(4,0),C(0,4)$ 三点的圆被 x 轴截得的弦长为

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{2}$

6. 已知四边形的顶点 A，B，C，D 在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{D}$



7. 已知双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{16}=1(a>0)$的一条渐近线方程为$4x+3y=0$，$F_1$，$F_2$分别是双曲线$C$的左、右焦点，点$P$在双曲线上，且$|PF_1|=7$，则$|PF_2|=$

A. 1　　B. 13　　C. 17　　D. 1 或 13

8. 从计算器屏幕上显示的数为 0 开始，小明进行了五步计算，每步都是加 1 或乘以 2. 那么不可能是计算结果的最小的数是

A. 12　　B. 11　　C. 10　　D. 9

第二部分（非选择题 共 110 分）

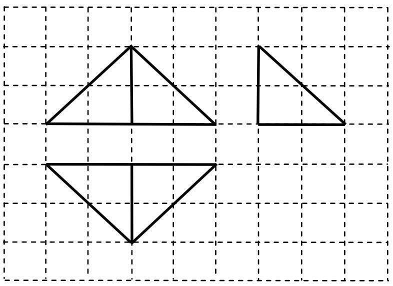
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9. 设复数z满足$(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$，则$|z|=$_____.

10. 已知数列$\{a_n\}$为等比数列，S_n为其前n项的和，若$a_1a_2a_3=64$，$a_5=32$，则$q=$_______；$S_6=$________.

11. 在$\triangle ABC$中，已知$A=150°$，$\cos C=\dfrac{12}{13}$，$BC=13$. 则$AB=$_______.

12. 如图，在边长为1的正方形网格中，粗实线表示一个三棱锥的三视图，则该三棱锥的表面积为_______________.



13. 对任意实数x，都有$\log_a(\mathrm{e}^x+3)\geq 1\,(a>0且a\neq 1)$，则实数$a$的取值范围是________.

14. 2018 年国际象棋奥林匹克团体赛中国男队、女队同时夺冠. 国际象棋中骑士的移动规则是沿着 3×2 格或 2×3 格的对角移动. 在历史上，欧拉、泰勒、哈密尔顿等数学家研究了“骑士巡游”问题：在$8\times 8=64$格的黑白相间的国际象棋棋盘上移动骑士，是否可以让骑士从某方格内出发不重复地走遍棋盘上的每一格？

图（一）给出了骑士的一种走法，它从图上标 1 的方格内出发，依次经过标 2, 3, 4, 5, 6，…，到达标 64 的方格内，不重复地走遍棋盘上的每一格，又可从标 64 的方格内直接走回到标 1 的方格内. 如果骑士的出发点在左下角标 50 的方格内，按照上述走法，_____（填“能”或“不能”）走回到标 50 的方格内.

若骑士限制在图（二）中的 3×4=12 格内按规则移动，存在唯一一种给方格标数字的方式，使得骑士从左上角标 1 的方格内出发，依次不重复经过 2, 3, 4, 5, 6, …, 到达右下角标 12 的方格内，分析图（二）中 A 处所标的数应为____.

35	38	27	16	29	42	55	18
26	15	36	39	54	17	30	43
37	34	13	28	41	32	19	56
14	25	40	33	20	53	44	31
63	12	21	52	1	8	57	46
24	51	64	9	60	45	2	5
11	62	49	22	7	4	47	58
50	23	10	61	48	59	6	3

图（一）

1			
A			
3			12

图（二）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（本小题满分 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n，若 $a_{n+1}=a_n+1\ (n\in\mathbf{N}^*)$，$S_3=12$．

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

16.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=(2\cos^2\dfrac{x}{2}-1)\tan x+\cos x$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的定义域及最小正周期；

（Ⅱ）若 $f(\alpha)=1$，且 $\alpha\in(-\pi,\pi)$，求 α 的值.

17. （本小题满分 13 分）

某日 A，B，C 三个城市 18 个销售点的小麦价格如下表：

销售点序号	所属城市	小麦价格（元/吨）	销售点序号	所属城市	小麦价格（元/吨）
1	A	2420	10	B	2500
2	C	2580	11	A	2460
3	C	2470	12	A	2460
4	C	2540	13	A	2500
5	A	2430	14	B	2500
6	C	2400	15	B	2450
7	A	2440	16	B	2460
8	B	2500	17	A	2460
9	A	2440	18	A	2540

（Ⅰ）求 B 市 5 个销售点小麦价格的中位数；

（Ⅱ）甲从 B 市的销售点中随机挑选一个购买 1 吨小麦，乙从 C 市的销售点中随机挑选一个购买 1 吨小麦，求甲花费的费用比乙高的概率；

（Ⅲ）如果一个城市的销售点小麦价格方差越大，则称其价格差异性越大. 请你对 A、B、C 三个城市按照小麦价格差异性从大到小进行排序（只写出结果）.

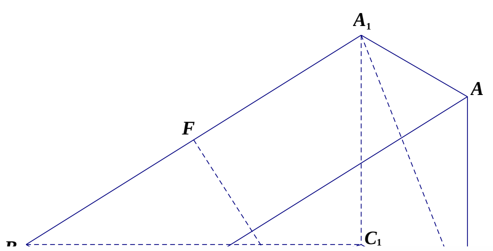
18. （本小题满分 14 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 BCC_1B_1 是平行四边形，$BC_1\perp C_1C$，平面 $A_1C_1CA\perp$ 平面 BCC_1B_1，且 E,F 分别是 BC,A_1B_1 的中点.

（Ⅰ）求证：$BC_1\perp A_1C$；

（Ⅱ）求证：$EF//$ 平面 A_1C_1CA；

（Ⅲ）在线段 AB 上是否存在点 P，使得 $BC_1\perp$ 平面 EFP？若存在，求出 $\dfrac{AP}{AB}$ 的值；若不存在，请说明理由.



19. （本小题满分 14 分）

过椭圆 W: $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点 F_1 作直线 l_1 交椭圆于 A,B 两点，其中 $A(0,1)$，另一条过 F_1 的直线 l_2 交椭圆于 C,D 两点（不与 A,B 重合），且 D 点不与点 $(0,-1)$ 重合．过 F_1 作 x 轴的垂线分别交直线 AD，BC 于 E，G．

（Ⅰ）求 B 点坐标和直线 l_1 的方程；

（Ⅱ）求证：$|EF_1|=|F_1G|$．

20. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=xe^x-\frac{m}{2}(x+1)^2(m\geq 0)$．

（Ⅰ）当 $m=0$ 时，求函数 $f(x)$ 的极小值；

（Ⅱ）当 $m>0$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有且只有一个零点，求 m 的取值范围．

数学试题答案

一、选择题（40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	A	C	C	C	B	B

二、填空题（30 分）

题号	9	10		11	12	13	14	
答案	$\sqrt{2}$	2	126	10	$8+4\sqrt{3}$	$(1,3]$	能	8

三、解答题（80 分）

15. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $a_{n+1}=a_n+1\ (n\in\mathbf{N}^*)$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列.

又因为 $S_3=12$，则 $a_1=3$，

所以，$a_n=a_1+(n-1)d=n+2(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}=\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}$，则

$$
\begin{aligned}
T_n&=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n\\
&=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\\
&=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\\
&=\frac{n}{3n+9}\ (n\in\mathbf{N}^*).
\end{aligned}
$$

……………13 分

16. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由题意可知，$f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\,|\,x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

$$f(x)=(2\cos^2\frac{x}{2}-1)\tan x+\cos x$$
$$=\cos x\tan x+\cos x$$
$$=\sin x+\cos x$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 2π.　　　　　　　　　　　　　　　　　　……………………7 分

（Ⅱ）解法一：由 $f(\alpha)=1$ 知， $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

解得 $\alpha=2k\pi$ 或 $\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$

又因为 $\alpha\in(-\pi,\pi)$，且 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$

所以 $\alpha=0$.

解法二：由 $f(\alpha)=1$ 知， $\sin\alpha+\cos\alpha=1$，则 $\sin 2\alpha=0$

解得 $\alpha=\frac{k\pi}{2}$， $k\in\mathbf{Z}$.

又因为 $\alpha\in(-\pi,\pi)$，且 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以 $\alpha=0$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……………………13 分

17. （本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）B 市一共有 5 个销售点，价格分别为：

2500，2500，2500，2450，2460

按照价格从低到高排列为：2450，2460，2500，2500，2500

B 市 5 个销售点小麦价格的中位数为 2500.　　　　　　……………………3 分

（Ⅱ）记事件“甲的费用比乙高”为 A

B 市 5 个销售点按照价格从低到高排列为：2450，2460，2500，2500，2500

C 市一共有 4 个销售点，价格分别为：

2580，2470，2540，2400

按照价格从低到高排列为：2400，2470，2540，2580

甲乙两个购买小麦分别花费的可能费用有如下组合：

（2450，2400），（2460，2400），（2500，2400），（2500，2400），（2500，2400），

（2450，2470），（2460，2470），（2500，2470），（2500，2470），（2500，2470），

（2450，2540），（2460，2540），（2500，2540），（2500，2540），（2500，2540），

（2450，2580），（2460，2580），（2500，2580），（2500，2580），（2500，2580），

一共有 20 组.

其中满足甲的费用高于乙的有如下组合：

（2450，2400），（2460，2400），（2500，2400），（2500，2400），（2500，2400），

（2500，2470），（2500，2470），（2500，2470）一共有 8 组.

所以，甲的费用比乙高的概率为： $P(A)=\dfrac{8}{20}=\dfrac{2}{5}$.　　　　………………10 分

（III）三个城市按照价格差异性从大到小排列为：C，A，B.　　　　………………13 分

18. （本小题满分 14 分）

（Ⅰ）因为 $BC_1\perp C_1C$，又平面 $A_1C_1CA\perp$ 平面 BCC_1B_1，

且平面 $A_1C_1CA\cap$ 平面 $BCC_1B_1=C_1C$，

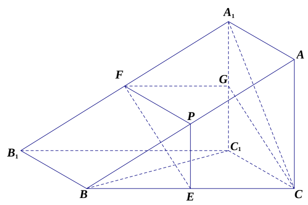
所以 $BC_1\perp$ 平面 ACC_1A_1.

又因为 $A_1C\subset$ 平面 A_1C_1CA，

所以 $BC_1\perp A_1C$.　　　　…………………4 分

（Ⅱ）取 A_1C_1 中点 G，连 FG, 连 GC.

在△ $A_1B_1C_1$ 中，因为 F,G 分别是 A_1B_1,A_1C_1 中点，



所以 $FG//B_1C_1$，且 $FG=\dfrac{1}{2}B_1C_1$.

在平行四边形 BCC_1B_1 中，因为 E 是 BC 的中点，

所以 $EC//B_1C_1$，且 $EC=\dfrac{1}{2}B_1C_1$.

所以 $EC//FG$，且 $EC=FG$.

所以四边形 $FECG$ 是平行四边形.

所以 $FE//GC$.

又因为 $FE \not\subset$ 平面 A_1C_1CA， $GC \subset$ 平面 A_1C_1CA，所以 $EF//$ 平面 A_1C_1CA.

…………………9 分

（III）在线段 AB 上存在点 P，使得 $BC_1 \perp$ 平面 EFP.

取 AB 的中点 P，连 PE，连 PF.

因为 $BC_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1， $AC \subset$ 平面 ACC_1A_1，$CG \subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $BC_1 \perp AC$，$BC_1 \perp CG$.

在△ABC 中，因为 P,E 分别是 AB,BC 中点，所以 $PE//AC$.

又由（II）知 $FE//CG$，

所以 $BC_1 \perp PE$， $BC_1 \perp EF$.

由 $PE \cap EF = E$ 得 $BC_1 \perp$ 平面 EFP.

故当点 P 是线段 AB 的中点时， $BC_1 \perp$ 平面 EFP. 此时，$\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{1}{2}$.

…………………14 分

19. （本小题满分 14 分）

解：（I）由题意可得直线 l_1 的方程为 $y=x+1$. 与椭圆方程联立，由 $\begin{cases} y=x+1 \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$

可求 $B(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3})$. ……………4 分

（II）当 l_2 与 x 轴垂直时，C,D 两点与 E，G 两点重合，由椭圆的对称性，$|EF_1|=|F_1G|$.

当 l_2 不与 x 轴垂直时，

设 $C(x_1,y_1)$， $D(x_2,y_2)$， l_2 的方程为 $y=k(x+1)$（$k\neq 1$）.

由 $\begin{cases} y=k(x+1) \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 y，整理得 $(2k^2+1)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$.

则 $x_1+x_2=\dfrac{-4k^2}{2k^2+1}$， $x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$.

由已知， $x_2 \neq 0$，

则直线 AD 的方程为 $y-1=\dfrac{y_2-1}{x_2}x$，令 $x=-1$，得点 E 的纵坐标 $y_E=\dfrac{x_2-y_2+1}{x_2}$. 把 $y_2=k\left(x_2+1\right)$ 代入得 $y_E=\dfrac{\left(x_2+1\right)(1-k)}{x_2}$.

由已知，$x_1\neq-\dfrac{4}{3}$，则直线 BC 的方程为 $y+\dfrac{1}{3}=\dfrac{y_1+\dfrac{1}{3}}{x_1+\dfrac{4}{3}}(x+\dfrac{4}{3})$，令 $x=-1$，得点 G 的纵坐标

$y_G=\dfrac{y_1-x_1-1}{3(x_1+\dfrac{4}{3})}$. 把 $y_1=k\left(x_1+1\right)$ 代入得 $y_G=\dfrac{\left(x_1+1\right)(k-1)}{3x_1+4}$.

$$y_E+y_G=\frac{\left(x_2+1\right)(1-k)}{x_2}+\frac{\left(x_1+1\right)(k-1)}{3x_1+4}=\frac{(1-k)\left[\left(x_2+1\right)(3x_1+4)-x_2\left(x_1+1\right)\right]}{x_2\cdot(3x_1+4)}$$

$$=\frac{(1-k)\left[2x_1x_2+3(x_1+x_2)+4\right]}{x_2\cdot(3x_1+4)}$$

把 $x_1+x_2=\dfrac{-4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$ 代入到 $2x_1x_2+3(x_1+x_2)+4$ 中，

$$2x_1x_2+3(x_1+x_2)+4=2\times\frac{2k^2-2}{2k^2+1}+3\times(\frac{-4k^2}{2k^2+1})+4=0.$$

即 $y_E+y_G=0$，即 $\left|EF_1\right|=\left|F_1G\right|$. ....14 分

20. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）当 $m=0$ 时：$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，令 $f'(x)=0$ 解得 $x=-1$，

又因为当 $x\in\left(-\infty,-1\right)$，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 为减函数；

当 $x\in\left(-1,+\infty\right)$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为增函数.

所以，$f(x)$ 的极小值为 $f(-1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. ....3 分

（Ⅱ）$f'(x)=(x+1)(\mathrm{e}^x-m)$. 当 $m>0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=\ln m$.

（i）若 $m=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则 $f'(x)=(x+1)(\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{\mathrm{e}})\geq0$. 故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上单调递增；

（ii）若 $m>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则 $\ln m>-1$. 故当 $f'(x)>0$ 时，$x<-1$ 或 $x>\ln m$；

当 $f'(x)<0$ 时，$-1<x<\ln m$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-1\right)$，$\left(\ln m,+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(-1,\ln m\right)$ 单调递减.

(iii) 若 $0<m<\frac{1}{\mathrm{e}}$，则 $\ln m<-1$. 故当 $f'(x)>0$ 时，$x<\ln m$ 或 $x>-1$；

当 $f'(x)<0$ 时，$\ln m<x<-1$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln m)$，$(-1,+\infty)$ 单调递增，在 $(\ln m,-1)$ 单调递减.

……………………8 分

（III）（1）当 $m=0$ 时，$f(x)=x\mathrm{e}^x$，令 $f(x)=0$，得 $x=0$.

因为当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，

所以此时 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有且只有一个零点.

（2）当 $m>0$ 时：

（ i ）当 $m=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，由（II）可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(-1)=-\frac{1}{\mathrm{e}}<0$，$f(1)=\mathrm{e}-\frac{2}{\mathrm{e}}>0$，

此时 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有且只有一个零点.

（ ii ）当 $m>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，由（II）的单调性结合 $f(-1)<0$，又 $f(\ln m)<f(-1)<0$，

只需讨论 $f(1)=\mathrm{e}-2m$ 的符号：

当 $\frac{1}{\mathrm{e}}<m<\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，$f(1)>0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有且只有一个零点；

当 $m\geq\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，$f(1)\leq 0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上无零点.

(iii) 当 $0<m<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，由（II）的单调性结合 $f(-1)<0$，$f(1)=\mathrm{e}-2m>0$，

$f(\ln m)=-\frac{m}{2}\ln^2 m-\frac{m}{2}<0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有且只有一个零点.

综上所述，$0\leq m<\frac{\mathrm{e}}{2}$.　　　　……………………13 分