顺义区 2021 届高三第一次统练

数学试卷参考答案

一.选择题(共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	A	A	C	A	C	C	D	B

二.填空题(本大题共 5 个小题,每小题 5 分,共 25 分)

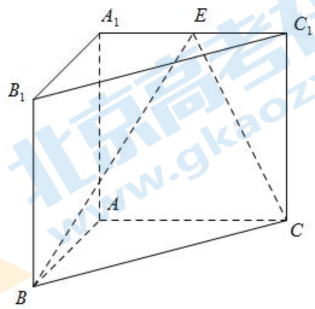
11. -1; 12. 4，$(2,\pm 2\sqrt{2})$(前 3 分，后 2 分); 13. $-1,0,1$（答案不唯一）；

14. $\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$(前 3 分，后 2 分); 15. ①③

三．解答题（本大题共 6 小题，共 85 分,其它答案参考给分）

16. （本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $CC_1 \perp$ 平面 ABC，



所以 $CC_1 \perp AB$. ------------------2 分

又 $AB \perp AC$，

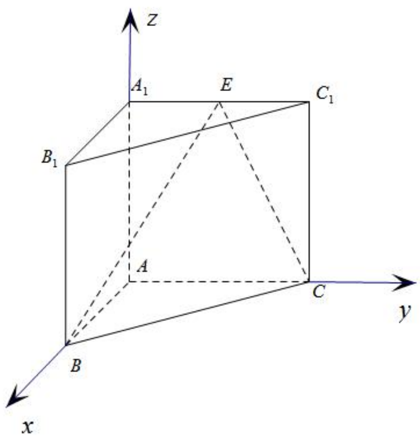
$AC \subset$ 平面 AA_1C_1C， $CC_1 \subset$ 平面 AA_1C_1C，

所以 $AB \perp$ 平面 AA_1C_1C. ------------------4 分

因为 $CE \subset$ 平面 AA_1C_1C，

所以 $AB \perp CE$. ------------------5 分

（Ⅱ）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $CC_1 \parallel AA_1$，



因为由 $CC_1 \perp$ 平面 ABC，

所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC.

所以 AB， AC， AA_1 两两垂直.

如图，以 A 为原点，建立空间直角坐标系 A-xyz， ------------6 分

所以 $A(0,0,0)$， $B(2,0,0)$， $C(0,2,0)$， $E(0,1,2)$.

设平面 BCE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$， $\overrightarrow{CE}=(0,-1,2)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$. 即 $\begin{cases}-2x+2y=0\\ -y+2z=0\end{cases}$.

令 $z=1$，则 $x=2$， $y=2$.

所以平面 BCE 的一个法向量为 $\vec{n}=(2,2,1)$. --------------------9 分

因为 $AB\perp$ 平面 AA_1C_1C，

所以平面 ACE 的一个法向量为 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$. ------------------10 分

所以 $\cos<\overrightarrow{AB},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AB}||\vec{n}|}=\dfrac{2}{3}$. --------------------------------13 分

所以二面角 $B-CE-A$ 的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$.

17.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题设图象知，周期 $T=2(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6})=\pi$，

因为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$． -----------------------------2 分

而由题意知 $A=2$，所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$． ------------------4 分

因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(\dfrac{\pi}{6},2)$，所以 $f(\dfrac{\pi}{6})=2\sin(\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=2$．

所以 $\dfrac{\pi}{3}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$．所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi(k\in Z)$

又因为 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$．

故函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$． -------------------7 分

（Ⅱ）$g(x)=2\sin[2(x-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{\pi}{6}]-2\cos 2x$

$=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})-2\cos 2x=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x-\cos 2x)$---------9 分

$=2\sqrt{3}(\sin 2x\cdot\dfrac{1}{2}-\cos 2x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2})=2\sqrt{3}\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$------------------11 分

因为 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\pi}{3} \le 2x - \frac{\pi}{3} \le \frac{2\pi}{3}$.

所以当 $2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ 时，即 $x = 0$ 时，$g(x)$ 取到最小值，

且最小值为 -3. --14 分

18.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）由题意知，是 C 款式运动鞋的回访顾客且对该款鞋满意的人数为

$300 \times 0.7 = 210$ --2 分

故此顾客是 C 款式运动鞋的回访顾客且对该款鞋满意的概率是 $\frac{210}{2000} = \frac{21}{200}$. --4 分

（Ⅱ）X 的取值为 0，1，2. ----------------------------------5 分

设事件 M 为“从 A 款式运动鞋的回访顾客中随机抽取的 1 人对该款式运动鞋满意”，

事件 N 为“从 E 款式运动鞋的回访顾客中随机抽取的 1 人对该款式运动鞋满意”，

且事件 M，N 相互独立.

根据题意，$P(M)$ 估计为 0.3，$P(N)$ 估计为 0.6.

则 $P(X=0) = P(\overline{M}\,\overline{N}) = (1-P(M))(1-P(N)) = 0.7 \times 0.4 = 0.28$ ----6 分

$P(X=1) = P(M\overline{N}) + P(\overline{M}N) = P(M)(1-P(N)) + (1-P(M))$

$= 0.3 \times 0.4 + 0.7 \times 0.6 = 0.54$ ----------7 分

$P(X=2) = P(MN) = P(M)P(N) = 0.3 \times 0.6 = 0.18$ ---------------8 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	0.28	0.54	0.18

----------------------------10 分

X 的期望是：$E(X) = 0 \times 0.28 + 1 \times 0.54 + 2 \times 0.18 = 0.9$. ----12 分

（Ⅲ）$D(\xi) < D(\eta)$. --14 分

19.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为椭圆经过点 $(0,1)$，所以 $b = 1$. --------------------------1 分

又因为椭圆经过点$(\sqrt{3},\frac{1}{2})$，所以 $\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4}=1$，解得$a=2$.-------3 分

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. --------------------------------4 分

（Ⅱ）由$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，可得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$.--------6 分

由题意，$\Delta>0$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

所以$x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$. -------------------------8 分

因为原点O到直线l的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

即$5m^2=4(1+k^2)$. ---9 分

因为$x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)$ -------------------------10 分

$$=\left(1+k^2\right)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$$

$$=(1+k^2)\frac{4m^2-4}{4k^2+1}-km\frac{8km}{4k^2+1}+m^2$$ ----------------11 分

$$=\frac{5m^2-4k^2-4}{4k^2+1}=0$$ ------------------------------13 分

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$. 即$OA\perp OB$.

因此以AB为直径的圆过原点O. --------------------------------14 分

20.（本小题满分 15 分）

解：（Ⅰ）当$a=2$时，$f\left(x\right)=x^2-2\ln x$，$f'\left(x\right)=2x-\frac{2}{x}$， ------------2 分

设切点为$(x_0,x_0^2-2\ln x_0)$，则$f'(x_0)=2x_0-\frac{2}{x_0}=3$，

解得$x_0=2$或$x_0=-\frac{1}{2}$（舍） ---------------------------------3 分

所以$f\left(2\right)=4-2\ln 2$.

切点为$(2,4-2\ln 2)$--4 分

所以所求切线方程为$y-4+2\ln 2=3(x-2)$.

即$3x-y-2-2\ln 2=0$.--5 分

（Ⅱ）因为$f'(x)=2x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-a}{x}$， -------------------------------6 分

由$a>0$及定义域$(0,+\infty)$，令$f'(x)=0$，得$x=\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$.-----------7 分

①当$\dfrac{\sqrt{2a}}{2}\le\dfrac{1}{e}$，即$0<a\le\dfrac{2}{e^2}$时，

在$(\dfrac{1}{e},e)$上$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$[\dfrac{1}{e},e]$上单调递增.

此时$f(x)$在$[\dfrac{1}{e},e]$上不可能存在两个零点；--------------------9 分

②当$\dfrac{\sqrt{2a}}{2}\ge e$，即$a\ge 2e^2$时，

在$(\dfrac{1}{e},e)$上$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$[\dfrac{1}{e},e]$上单调递减.

此时$f(x)$在$[\dfrac{1}{e},e]$上不可能存在两个零点；--------------------11 分

③当$\dfrac{1}{e}<\dfrac{\sqrt{2a}}{2}<e$，即$\dfrac{2}{e^2}<a<2e^2$时，要使$f(x)$在区间$[\dfrac{1}{e},e]$上恰有两个零点，

则$\begin{cases} f(\dfrac{\sqrt{2a}}{2})=\dfrac{1}{2}a[1-2\ln(\dfrac{\sqrt{2a}}{2})]<0 \\ f(\dfrac{1}{e})=a+\dfrac{1}{e^2}\ge 0 \\ f(e)=e^2-a\ge 0 \end{cases}$，即$\begin{cases} a\le e^2 \\ a>2e \end{cases}$，此时$2e<a\le e^2$.

综上，实数a的取值范围是$\left(2e,e^2\right]$.----------------------------15 分

21.（本小题满分 15 分）

解：（Ⅰ）数列$\{a_n\}$不满足性质①，理由如下：----------------------2 分

取数列$\{a_n\}$中的$a_1=2$，$a_2=4$，所以$2a_2-a_1=6$.

由 $2^m=6$，解得 $m=\log_2 6$，显然 m 不是整数.

所以在数列 $\{a_n\}$ 中不存在 a_m，使得 $2a_2-a_1=a_m$，

故数列 $\{a_n\}$ 不满足性质①；-----------------------------------4 分

（Ⅱ）数列 $\{a_n\}$ 同时满足性质①和性质②，理由如下：---------------5 分

对于 $\{a_n\}$ 中任意两项 a_i，$a_j(i>j)$，记 $a_m=2i-j$，

因此 $a_m=2a_i-a_j$，从而数列 $\{a_n\}$ 满足性质①；-----------------7 分

对于 $\{a_n\}$ 中任意项 $a_n(n\ge 3)$，记 $a_k=a_{n-1}$，$a_l=a_{n-2}\ (k>l)$，

显然有 $a_n=2a_k-a_l$，从而数列 $\{a_n\}$ 满足性质②；

综上，数列 $\{a_n\}$ 同时满足性质①和性质② ---------------------9 分

（Ⅲ）$\{a_n\}$ 是递增数列，$a_1=0$，则 $a_2>0$，根据性质① $2a_2-a_1=2a_2\in\{a_n\}$，

$2(2a_2)-a_2=3a_2\in\{a_n\},2(3a_2)-2a_2=4a_2\in\{a_n\},\cdots,$

由数学归纳法原理，可以证明

$\{na_2|n\in N\}=:\{0,a_2,2a_2,3a_2,\cdots\}\subseteq\{a_n\}$；------------------------12 分

另一个方面，我们用反证法证明 $\{a_n\}\subseteq\{na_2|n\in N\}=:\{0,a_2,2a_2,3a_2,\cdots\}$；

假设 $x=ta_2$（$t>0$）是 $\{a_n\}$ 中最小的不能写成 a_2 的整倍数的项，

根据性质②，存在两项 $a_k,a_l(k>l)$，使得 $x=2a_k-a_l$，

我们记 $a_k=ya_2,\ a_l=za_2$，其中 $y>z>0$，可知：

$ta_2=x=2ya_2-za_2=(2y-z)a_2$，

易知 $t=2y-z=(y-z)+y>y>z>0$，

根据 $x=ta_2$（$t>0$）的最小性，可知道

$y,z\in N^*$，可以得到 $t=2y-z\in N^*$，与 t 不是正整数矛盾.

综上所述，$\{a_n\}$ 是首项为 0，公差为 a_2 的等差数列. -------------15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ＂精益求精、专业严谨 ＂ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。