

2023 北京陈经纶中学高二 3 月月考

数 学

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分）

1. 下列关于函数 $f(x) = x - \sin x$ 的说法正确的是（ ）

A. 增函数

B. 减函数

C. 在 $(0, \pi)$ 上单增，在 $(\pi, 2\pi)$ 上单减

D. 在 $(0, \pi)$ 上单减，在 $(\pi, 2\pi)$ 上单增

2. 某学校安排了 4 场线上讲座，其中讲座 A 只能安排在第一或最后一场，讲座 B 和 C 必须相邻，则不同的安排方法共有（ ）种

A. 4

B. 6

C. 8

D. 12

3. 在 $(x-2)^5$ 的展开式中， x^2 的系数为（ ）

A. -40

B. 40

C. -80

D. 80

4. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq 0 \\ e^x - 2, & x > 0 \end{cases}$ 的零点的个数为（ ）

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

5. 从分别标有 1, 2, 3, ..., 9 的 9 张卡片中不放回地随机抽取 2 次，每次抽取 1 张，则在抽取第 1 张为偶数的前提下，抽到第 2 张卡片上的数也为偶数的概率为（ ）

A. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{24}$

6. 若直线 $y = kx$ 为曲线 $y = \ln x$ 的一条切线，则实数 k 的值是（ ）

A. e

B. e^2

C. $\frac{1}{e}$

D. $\frac{1}{e^2}$

7. 某高中举办 2023 年“书香涵泳，润泽心灵”读书节活动，设有“优秀征文”、“好书推荐语展示”和“演讲”三个项目. 某班级有 4 名同学报名参加，要求每人限报一项，每个项目至少 1 人参加，则报名的不同方案有（ ）

A. 12 种

B. 36 种

C. 48 种

D. 72 种

8. 函数 $f(x) = \ln x - kx - k$ 在区间 $(2, 5)$ 上单调递减，则实数 k 的取值范围为（ ）

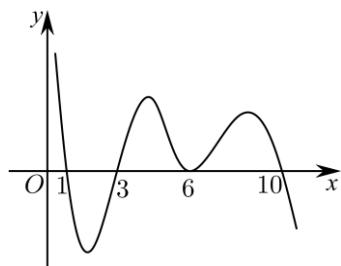
A. $\left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$

B. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

C. $\left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

9. 已知定义域为 $(0, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且函数 $g(x) = (\log_3 x - 1) \cdot f'(x)$ 的部分图象如图所示，则下列说法中正确的是（ ）



- A. $f(x)$ 有极小值 $f(6)$, 极大值 $f(1)$ B. $f(x)$ 有极小值 $f(6)$, 极大值 $f(10)$
 C. $f(x)$ 有极小值 $f(1)$, 极大值 $f(3)$ 和 $f(10)$ D. $f(x)$ 有极小值 $f(1)$, 极大值 $f(10)$

10. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x$, $x \in (0, \pi)$, 则 ()

- A. $f(x)$ 有一个零点 B. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减
 C. $f(x)$ 有两个极值点 D. $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

11. 设 $f(x) = (x-1)e^x$, 则 $f'(\ln 2) =$ _____.

12. 已知 $(2+x)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 =$ _____. (结果用数字作答)

13. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + b$, 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单增且最大值为 0, 写出一组符合要求的 a , b , $a =$ _____, $b =$ _____.

14. 根据党中央关于“精准”脱贫的要求, 我市某农业经济部门决定派出五位相关专家对三个贫困地区进行调研, 每个地区至少派遣一位专家, 其中甲、乙两位专家需要派遣至同一地区, 则不同的派遣方案种数为 _____ (用数字作答).

15. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + 1$, $a \in \mathbb{R}$, 则下列结论正确的是 _____.

- ① 对任意的 $a \in \mathbb{R}$, 存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x_0) = 0$;
 ② 若 x_1 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递减;
 ③ 函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1 - \ln(2a)}{2}$;
 ④ 若 $f(x)$ 有两个零点, 则 $0 < a < \frac{e}{2}$

三、解答题 (共 4 小题, 满分 55 分)

16. 在某区“创文明城区”(简称“创城”)活动中, 教委对本区 A, B, C, D 四所高中学校随机抽查了 100 人, 将调查情况进行整理后制成下表:

学校	A	B	C	D

抽查人数	50	15	10	25
“创城”活动中参与的人数	40	10	9	15

- (1) 在 100 名高中学生中，随机抽取 1 名学生，求该生没有参与“创城”活动的概率；
- (2) 在上表中从 B, C 两校没有参与“创城”活动的同学中随机抽取 2 人，求恰好 B, C 两校各有 1 人的概率是多少？
- (3) 在抽查的 100 名高中学生中随机抽取 2 人，已知其中的一名同学来自 D 校，则这 2 人不同校的概率是多少？

17. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{k}{2}x^2 (k > 0)$

- (1) 当 $k = 2$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；
- (2) 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值，求 k 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x) = e^x(x^2 + ax + 1)$.

- (1) 若 $a = 0$ ，求 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；
- (2) 若 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上恰有一个极小值点，求实数 a 的取值范围；
- (3) 若对于任意 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ， $f(x) > e^x(x^2 \cos x + 1)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ ，记集合 $T = \{S(i, j) | S(i, j) = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j, i < j, i, j \in \mathbb{N}^*\}$.

- (1) 对于数列 $a_n: 1, 2, 3, 4$ ，写出集合 T ；
- (2) 若 $a_n = 2n$ ，是否存在 $i, j \in \mathbb{N}^*$ ，使得 $S(i, j) = 1024$ ？若存在，求出一组符合条件的 i, j ；若不存在，说明理由.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分）

1. 【答案】A

【解析】

【分析】利用函数的单调性与导数的关系可得出结论.

【详解】因为 $f(x) = x - \sin x$ ，则 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，且 $f'(x)$ 不恒为零，所以，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

故选：A.

2. 【答案】C

【解析】

【分析】首先排 B, C ，共有 A_2^2 种，视为一个整体与 D 全排，共有 A_2^2 种，再排 A ，共有 A_2^1 种，即可得到答案.

【详解】设四场讲座为 A, B, C, D ，首先排 B, C ，共有 A_2^2 种，视为一个整体与 D 全排，共有 A_2^2 种，再排 A ，共有 A_2^1 种，综上所述共有 $A_2^2 A_2^2 A_2^1 = 8$ 种.

故选：C

3. 【答案】C

【解析】

【分析】

由题意利用二项展开式的通项公式，求得 x^2 的系数.

【详解】在 $(x-2)^5$ 的展开式中，含 x^2 的项为 $C_5^2 (-2)^3 \cdot x^2 = -80x^2$ ，故 x^2 的系数为：-80.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了利用二项式定理求指定项的系数，属于基础题.

4. 【答案】C

【解析】

【分析】分别求出 $x \leq 0$ 和 $x > 0$ 时， $f(x)$ 的零点个数即可得出答案.

【详解】当 $x \leq 0$ 时，令 $f(x) = x^2 + 2x - 3 = 0$ ，
则 $(x-1)(x+3) = 0$ ，解得： $x = 1$ （舍去）或 $x = -3$ ，
当 $x > 0$ 时，令 $e^x - 2 = 0$ ，解得： $x = \ln 2$ ，
所以 $f(x)$ 的零点个数为 2.

故选：C.

5. 【答案】A

【解析】

【分析】设事件A为第1张为偶数，事件B为第2张为偶数，则 $P(A) = \frac{4}{9}$ ， $P(AB) = \frac{1}{6}$ ，根据条件概率公式得到答案.

【详解】设事件A为第1张为偶数，事件B为第2张为偶数，

$$\text{则 } P(A) = \frac{4}{9}, P(AB) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}, \text{ 故 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{8}.$$

故选：A

6. 【答案】C

【解析】

【分析】根据导数的几何意义得出实数k的值.

【详解】设直线 $y = kx$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切于点 $(x_0, \ln x_0)$ ，函数 $y = \ln x$ 的导函数为 $y' = \frac{1}{x}$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} k = \frac{1}{x_0} \\ \ln x_0 = kx_0 \end{cases}, \text{ 解得 } k = \frac{1}{e}.$$

故选：C

7. 【答案】B

【解析】

【分析】由题得必有两人成一组，则总数为 $C_4^2 \cdot A_3^3$ 种.

【详解】由题4名同学分为3组，每组分别有1, 1, 2人，共有 $C_4^2 = 6$ 种，

再排列有 $C_4^2 \cdot A_3^3 = 36$ 种，

故选：B.

8. 【答案】B

【解析】

【分析】依题意可得 $f'(x) \leq 0$ 在区间 $(2, 5)$ 上恒成立，解出即可.

【详解】 $f'(x) = \frac{1}{x} - k$ ，函数 $f(x) = \ln x - kx - k$ 在区间 $(2, 5)$ 上单调递减，

$\therefore f'(x) \leq 0$ 在区间 $(2, 5)$ 上恒成立，即 $k \geq \frac{1}{x}$ 在区间 $(2, 5)$ 上恒成立，

而 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(2, 5)$ 上单调递减， $k \geq \frac{1}{2}$ ， $\therefore k$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ，

故选：B.

9. 【答案】D

【解析】

【分析】根据给定的函数 $g(x)$ 图象，分析判断 $f'(x)$ 值为正或负的 x 取值区间作答.

【详解】观察图象知，当 $g(x) > 0$ 时， $0 < x < 1$ 或 $3 < x < 10$ 且 $x \neq 6$ ，当 $g(x) < 0$ 时， $1 < x < 3$ 或 $x > 10$ ，

而当 $0 < x < 3$ 时， $\log_3 x - 1 < 0$ ，当 $x > 3$ 时， $\log_3 x - 1 > 0$ ，因此当 $0 < x < 1$ 或 $x > 10$ 时，

$$f'(x) < 0,$$

当 $1 < x < 10$ 时， $f'(x) \geq 0$ ，当且仅当 $x = 6$ 时取等号，则 $f(x)$ 在 $(0, 1), (10, +\infty)$ 上单调递减，在 $(1, 10)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(1)$ ，极大值 $f(10)$ ，A，B，C 不正确；D 正确.

故选：D

10. 【答案】B

【解析】

【分析】 $f'(x) = \frac{\cos x(\sin 2x - 2x)}{2\sin^2 x}$ ， $x \in (0, \pi)$ ，求出 $f'(x) = 0$ 时， $x = \frac{\pi}{2}$ ，并证明此解为 $f'(x) = 0$ 的唯一解，则可判断.

$$\text{【详解】 } f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x, f'(x) = \frac{\sin x - \sin^3 x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x(\sin 2x - 2x)}{2\sin^2 x}$$

令 $g(x) = \sin 2x - 2x$ ， $x \in (0, \pi)$ ，因为 $g'(x) = 2\cos 2x - 2$ ，

$$\because \cos 2x \in [-2, 2], \therefore g'(x) \leq 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减，

所以 $g(x) < g(0) = 0$ ，即 $\sin 2x - 2x < 0$ ， $x \in (0, \pi)$

所以当 $f'(x) = 0$ 时， $x = \frac{\pi}{2}$ ，且为唯一解，

所以 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减； $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ ，即 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上无零点，

同时表明 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有唯一极值点，故 A, C, D 错误，B 正确；

故选：B.

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

11. 【答案】 $2\ln 2 \neq \ln 4$

【解析】

【分析】直接求导代入即可.

【详解】 $f'(x) = xe^x$, $f'(\ln 2) = \ln 2 \cdot e^{\ln 2} = 2 \ln 2$.

故答案为: $2 \ln 2$.

12. 【答案】81

【解析】

【分析】令 $x=1$, 求二项展开式各项系数和.

【详解】 $(2+x)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$,

当 $x=1$ 时, 有 $(2+1)^4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 81$.

故答案为: 81

13. 【答案】 ①. 0 (答案不唯一) ②. $-\frac{1}{3}$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 $f'(x) = x^2 - ax$, 求出当 $f'(x) = 0$ 时, $x=0$ 或 a , 根据题意可知 $a \leq 0$, 取 $a=0$, 而 $f(1)=0$, 即可求出 b 值.

【详解】 $f'(x) = x^2 - ax$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x=0$ 或 a ,

若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增, 则 $a \leq 0$, 最大值为 $f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a + b = 0$,

则 $b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}$, 不妨取 $a=0$, 则 $b = -\frac{1}{3}$,

故答案为: 0; $-\frac{1}{3}$. (答案不唯一)

14. 【答案】36

【解析】

【分析】按人数分两类分别讨论不同的派遣方式即可.

【详解】由题意可知, 可分为两类:

一类: 甲乙在一个地区时, 剩余的三人分为两组,

再三组派遣到三个地区, 共有 $C_3^2 A_3^3 = 18$ 种不同的派遣方式;

另一类: 甲乙和剩余的三人中的一个人同在一个地区,

另外两人分别在两个地区, 共有 $C_3^1 A_3^3 = 18$ 种不同的派遣方式;

由分类计原理可得, 不同的派遣方式共有 $18+18=36$ 种不同的派遣方式.

故答案为: 36.

15. 【答案】②④

【解析】

【分析】先求得 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1-2ax^2}{x}$ ，分 $a \leq 0$ 和 $a > 0$ 讨论函数的单调性及最值，依次判断 4 个结论即可。

【详解】对③，由题意知： $x > 0$ ， $f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1-2ax^2}{x}$ ，当 $a \leq 0$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增，无最大值，故③错误；

对①当 $a > 0$ 时，在 $\left(0, \sqrt{\frac{1}{2a}}\right)$ 上， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增；在 $\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}, +\infty\right)$ 上， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；

故 $f(x)_{\max} = f\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = \ln \sqrt{\frac{1}{2a}} + \frac{1}{2}$ ，当 $\ln \sqrt{\frac{1}{2a}} + \frac{1}{2} < 0$ ，即 $a > \frac{e}{2}$ 时， $f(x)$ 无零点，故①错误；

对②，若 x_1 是 $f(x)$ 的极值点，则 $a > 0$ ， $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2a}}$ ，故在 $\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}, +\infty\right)$ 单调递减，②正确；

对④，若 $f(x)$ 有两个零点，则 $a > 0$ ，且 $f(x)_{\max} = f\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = \ln \sqrt{\frac{1}{2a}} + \frac{1}{2} > 0$ ，解得 $0 < a < \frac{e}{2}$ ，

又 x 趋近于 0 时， $f(x)$ 趋近于负无穷， x 趋近于正无穷时， $f(x)$ 趋近于负无穷，此时 $f(x)$ 有两个零点，④正确。

故答案为②④。

三、解答题（共 4 小题，满分 55 分）

16. 【答案】(1) $\frac{13}{50}$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) $\frac{25}{66}$

【解析】

【分析】根据古典概型的概率公式进行计算即可。

【小问 1 详解】

参与抽查的 100 名高中学生中，没有参与“创城”活动的有 26 人，

设在这 100 名高中学生中，随机抽取 1 名学生，该生没有参与“创城”活动为事件 E ，则 $P(E) = \frac{26}{100} = \frac{13}{50}$ 。

【小问 2 详解】

上表中从 B 校没有参与“创城”活动的同学有 5 人，C 校没有参与“创城”活动的同学有 1 人，设从中随机抽取 2 人，恰好 B，C 两校各有 1 人为事件 F ，

$$\text{则 } P(F) = \frac{C_5^1 C_1^1}{C_6^2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

【小问 3 详解】

在抽查的 100 名高中学生中随机抽取 2 人，其中的一名同学来自 D 校，设这 2 人不同校为事件 G，则

$$P(G) = \frac{C_{25}^1 C_{75}^1}{C_{100}^2} = \frac{25}{66}.$$

17. 【答案】(1) 单调增区间为 $(0, +\infty)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$; 单调递减区间为 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

(2) $k > 1$.

【解析】

【分析】(1) 代入 $k=2$ 时，求得 $f'(x) = \frac{x(2x+1)}{1+x}$ ，分别用 $f'(x) > 0$ 和 $f'(x) < 0$ 即可求得其单调区间；

(2) $f'(x) = \frac{x(kx+k-1)}{1+x}$, $x \in (-1, +\infty)$ ，利用极小值点与导函数图象的关系即可得到不等式，解出即可。

【小问 1 详解】

当 $k=2$ 时， $f(x) = \ln(1+x) - x + x^2$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + 2x = \frac{x(2x+1)}{1+x}, \text{ 由题得函数定义域为 } (-1, +\infty),$$

令 $f'(x) > 0$ ，解得 $x > 0$ 或 $-1 < x < -\frac{1}{2}$ ，故 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$,

令 $f'(x) < 0$ ，解得 $-\frac{1}{2} < x < 0$ ，故 $f(x)$ 的单调减区间为 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

【小问 2 详解】

$$f'(x) = \frac{x(kx+k-1)}{1+x}, x \in (-1, +\infty), \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x_1 = 0, x_2 = \frac{1-k}{k}, k > 0,$$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，则 $x_2 = \frac{1-k}{k} < 0$ ，解得 $k > 1$,

此时在 $x=0$ 左侧附近导函数小于 0，右侧附近导函数大于 0，

即在 $x=0$ 处取得极小值，所以 $k > 1$.

18. 【答案】(1) $y = x + 1$

(2) $(-2, 0)$

(3) $[0, +\infty)$

【解析】

【分析】(1) 求导，根据导数的几何意义可得切线斜率及方程；

(2) 求导, 可得函数单调区间与极值点, 再根据极值点范围可得参数范围;

(3) 由不等式恒成立可知 $a > x \cos x - x$ 恒成立, $g(x) = x \cos x - x$, 即 $a > g(x)_{\max}$, 求函数 $g(x)$ 的最值即可.

【小问 1 详解】

当 $a = 0$ 时, $f(x) = e^x(x^2 + 1)$, $f'(x) = e^x(x^2 + 2x + 1)$,

所以 $f'(0) = 1$, $f(0) = 1$,

所以切线方程为 $y = x + 1$.

【小问 2 详解】

由 $f(x) = e^x(x^2 + ax + 1)$, 得 $f'(x) = e^x[x^2 + (a+2)x + a+1]$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -a-1$, $x_2 = -1$.

①若 $x_1 \leq x_2$, 则 $a \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立,

因此, $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增, 无极值, 不符合题意.

②若 $x_1 > x_2$, 则 $a < 0$, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的情况如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, -a-1)$	$-a-1$	$(-a-1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

因此, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(-a-1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, -a-1)$ 上单调递减.

若 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上有且只有一个极小值点, 则需 $-1 < -a-1 < 1$,

所以 $-2 < a < 0$.

综上, a 的取值范围是 $(-2, 0)$.

【小问 3 详解】

因为 $e^x > 0$,

所以 $f(x) = e^x(x^2 + ax + 1) > e^x(x^2 \cos x + 1)$, 即 $x^2 + ax > x^2 \cos x$.

又因为 $x > 0$,

所以 $x^2 + ax > x^2 \cos x$, 即 $a > x \cos x - x$.

令 $g(x) = x \cos x - x$, 所以 $g'(x) = \cos x - x \sin x - 1 = (\cos x - 1) - x \sin x$.

因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $\cos x - 1 < 0$,

又 $x \sin x > 0$, 所以 $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 为 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上减函数, 所以 $g(x) < g(0) = 0$, 所以 $a \geq 0$

综上，实数 a 的取值范围为 $[0, +\infty)$ 。

【点睛】导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行：(1)考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系。(2)利用导数求函数的单调区间，判断单调性；已知单调性，求参数。(3)利用导数求函数的最值(极值)，解决生活中的优化问题。(4)考查数形结合思想的应用。

19. 【答案】(1) $T = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$;

(2) 不存在 $i, j \in \mathbb{N}^*$ ，使得 $S(i, j) = 1024$ ，理由见解析；

【解析】

【分析】(1) 根据题意给出的集合 T 新定义，即可得出答案；

(2) 使用假设法，假设存在 $i, j \in \mathbb{N}^*$ ，使得 $S(i, j) = 1024$ ，进行计算检验，从而得出结论；

【小问 1 详解】

解：

由题意得 $a_1 + a_2 = 3$ ， $a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$ ， $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ，

$a_2 + a_3 = 2 + 3 = 5$ ， $a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 3 + 4 = 9$ ， $a_3 + a_4 = 3 + 4 = 7$ ，

$\therefore T = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$ 。

【小问 2 详解】

假设存在 $i, j \in \mathbb{N}^*$ ，使得 $S(i, j) = 1024$ ，

则有 $1024 = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j = 2i + 2(i+1) + \cdots + 2j = (j-i+1)(i+j)$ ，

由于 $i+j$ 与 $j-i$ 奇偶性相同， $\therefore i+j$ 与 $j-i+1$ 奇偶性不同，

又 $\because i+j \geq 3$ ， $j-i+1 \geq 2$ ， $\therefore 1024$ 有大于等于 3 的奇数因子，

这与 1024 无 1 以外的奇数因子矛盾，

故不存在 $i, j \in \mathbb{N}^*$ ，使得 $S(i, j) = 1024$ 。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

Q 北京高考资讯