湘豫名校2020届高三年级12月份联考

数学(理科)

得分：__________

本试题卷共8页。时量120分钟，满分150分。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题(本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.)

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x|x>1\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$

A. $\{x|x\geqslant 1\}$　　B. $\{x|1<x\leqslant 3\}$

C. $\{x|x>1\}$　　D. $\{x|x\geqslant 3\}$

2. 复数 $z=i^{2019}(-1-2i)$ 的共轭复数为

A. $2-i$　　B. $2+i$　　C. $-2-i$　　D. $-2+i$

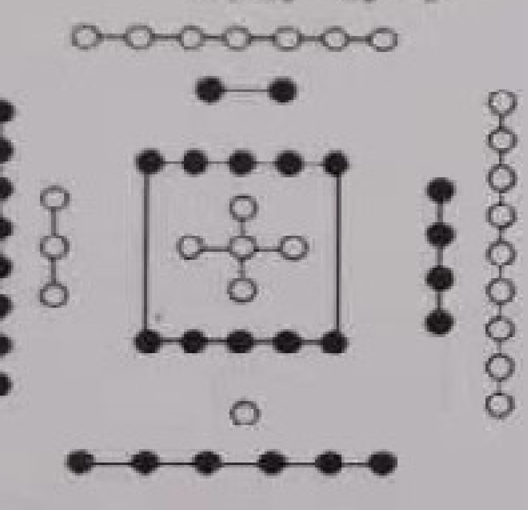
3. 若 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大，则展开式中各项的系数和是

A. -1　　B. 1　　C. 2^{10}　　D. 2^{11}

4. 若 $a=(\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}$，$b=\log_3 e$，$c=e^{\lg 3}$，则有

A. $c>a>b$　　B. $a>c>b$　　C. $c>b>a$　　D. $a>b>c$

5.《易·系辞上》有“河出图，洛出书”之说，河图、洛书是中国古代流传下来的两幅神秘图案，蕴含了深奥的宇宙星象之理，被誉为“宇宙魔方”，是中华文化，阴阳术数之源，其中河图的排列结构是一、六在后，二、七在前，三、八在左，四、九在右，五、十背中，如图，白圈为阳数，黑点为阴数，若从阴数和阳数中各取一数，则其差的绝对值为3的概率为



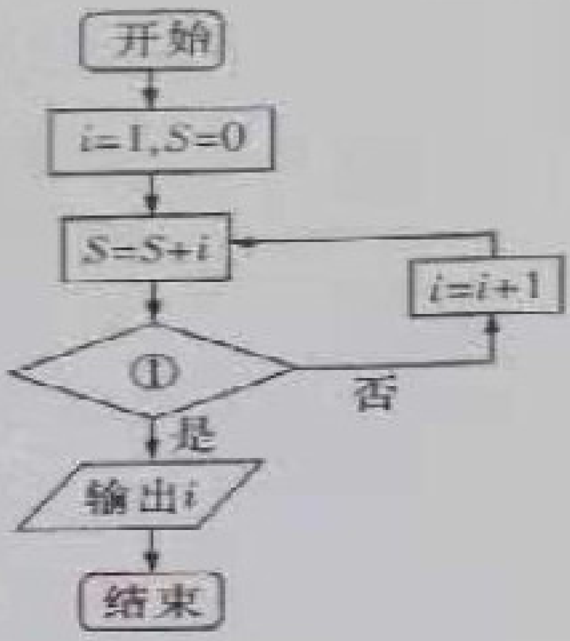
A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{6}{25}$　　C. $\dfrac{7}{25}$　　D. $\dfrac{8}{25}$

6. 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=2$，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$，$n\in\mathbf{N}^*$，则数列 $\{b_{a_n}\}$ 的前 n 项和为

A. $\dfrac{4}{3}(4^{n-1}-1)$　　B. $\dfrac{4}{3}(4^n-1)$

C. $\dfrac{1}{3}(4^{n-1}-1)$　　D. $\dfrac{1}{3}(4^n-1)$

7. 执行如图所示的程序框图，若输出的值为5，则框图中①处可以填入



A. $S\geqslant6$?

B. $S\geqslant10$?

C. $S\geqslant15$?

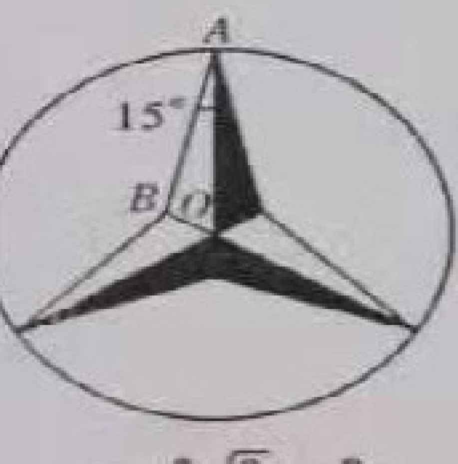
D. $S\geqslant21$?

8. 将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位长度得到 $f(x)$ 的图象，若函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，且 $f(x)$ 的最大负零点在区间 $\left(-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{12}\right)$ 上，则 φ 的取值范围是

A. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$　　B. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$　　D. $\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)$

9. 梅赛德斯—奔驰(Mercedes—Benz)创立于1900年，是世界上最成功的高档汽车品牌之一，其经典的"三叉星"商标象征着陆上、水上和空中的机械化. 已知该商标由1个圆形和6个全等的三角形组成(如图)，点 O 为圆心，$\angle OAB=15^\circ$，若在圆内任取一点，则此点取自阴影部分的概率为



A. $\frac{2\sqrt{3}-3}{2\pi}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}-3}{4\pi}$　　C. $\frac{6\sqrt{3}-9}{2\pi}$　　D. $\frac{6\sqrt{3}-9}{4\pi}$

10. 我们把 $F_n=2^{2^n}+1(n=0,1,2,\cdots)$ 叫"费马数"(费马是十七世纪法国数学家). 设 $a_n=\log_2(F_n-1)$，$n=1,2,3,\cdots$，S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和，则使不等式 $\frac{2^2}{S_1S_2}+\frac{2^3}{S_2S_3}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{S_nS_{n+1}}<\frac{63}{127}$ 成立的最大正整数 n 的值是

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

11. 在 $\triangle ABC$ 中，E，F 分别为 AB，AC 上的点，且满足 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FC}$，$P$ 为 EF 上的任一点，实数 x，y 满足 $\overrightarrow{PA}+x\overrightarrow{PB}+y\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，设 $\triangle ABC$，$\triangle PBC$，$\triangle PCA$，$\triangle PAB$ 的面积分别为 S，S_1，S_2，S_3，记 $\frac{S_i}{S}=\lambda_i(i=1,2,3)$，则 $\lambda_2\cdot\lambda_3$ 取到最大值时，x，y 的值分别为

A. 0，2　　B. 1，2

C. 1，1　　D. 2，1

12. 设 $f'(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数，函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\frac{1}{2}f'(1)e^{2x-2}+x^2-2f(0)x$，若 $g(x)=\sqrt{f(x)-x^2+2x}$，且方程 $g\left(\frac{x^2}{a}-x\right)-x=0$ 有两个不同实数解，则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,0)\cup\{1\}$　　B. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

C. $(0,1)$　　D. $(1,+\infty)$

二、填空题(本题共4小题,每小题5分,共20分.)

13. 已知 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x-3, x>0,\\ g(x), x<0\end{cases}$ 是奇函数,则 $f(g(-2))=$__________.

14. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)+a$,若 $f(0)+f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{2019}{2020}\right)+f(1)=2021$,则实数 $a=$______.

15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过 F_1 的直线 l 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相切于点 T,且直线 l 与双曲线 C 的右支交于点 P,若 $\overrightarrow{F_1P}=3\overrightarrow{F_1T}$,则双曲线 C 的离心率为______.

16. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长是1,在正方体的表面上与点 A 的距离是 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的点形成一条曲线,这条曲线的长度是______.$\left(参考数据 \cos 37°=\frac{4}{5}\right)$

三、解答题(共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题,考生根据要求作答.)

(一)必考题:共60分.

17.(本小题满分12分)

在$\triangle ABC$中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 $\sin^2 A+\sin^2 C-\sin A\sin C=\sin^2 B$.

(1)求角 B 的大小;

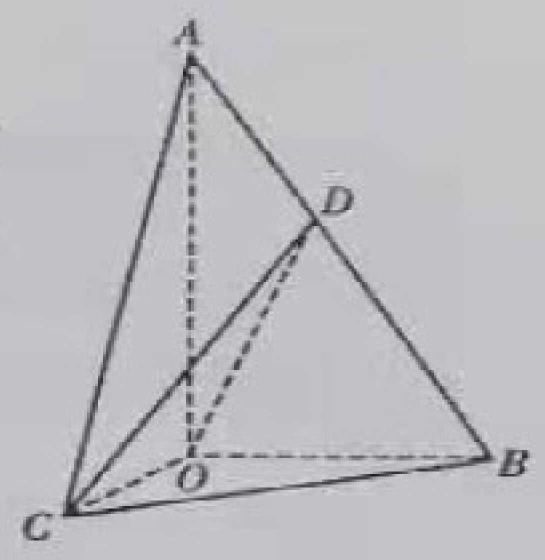
(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形,其外接圆的半径为$\frac{5\sqrt{3}}{3}$,求$\triangle ABC$的周长的取值范围.

18.（本小题满分12分）

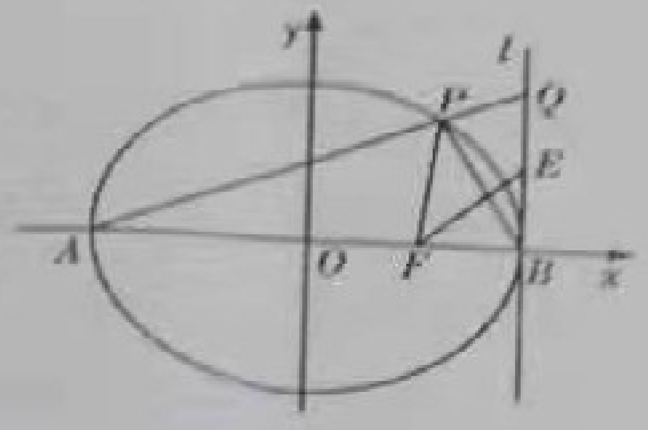
在Rt△AOB中，$\angle OAB=\frac{\pi}{6}$，斜边$AB=4$. Rt△AOC可以通过Rt△AOB以直线AO为轴旋转得到，且二面角$B-AO-C$为$120°$. 点D满足$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

(1)求证：平面$BOC\perp$平面AOB；

(2)求直线CD与平面AOB所成角的正弦值.



19.（本小题满分 12 分）



在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4t^2}+\frac{y^2}{3t^2}=1(t>0)$ 的左、右顶点分别为 A，B，右焦点为 F，过点 A 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线交椭圆 C 于另一点 P.

(1)求椭圆 C 的离心率；

(2)若 $t=1$，设直线 $l:x=2$，延长 AP 交直线 l 于点 Q，线段 BQ 的中点为 E，求证：点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 PF 上.

20.(本小题满分 12 分)

2019 年春节期间，当红影视明星翟天临"不知'知网'"学术不端事件在全国闹得沸沸扬扬，引发了网友对亚洲最大电影学府北京电影学院乃至整个中国学术界高等教育乱象的反思. 为进一步端正学风，打击学术造假行为，教育部日前公布的 2019 年部门预算中透露，2019 年教育部拟抽检博士学位论文约 6000 篇，预算为 800 万元. 国务院学位委员会、教育部 2014 年印发的《博士硕士学位论文抽检办法》通知中规定：每篇抽检的学位论文送 3 位同行专家进行评议，3 位专家中有 2 位以上(含 2 位)专家评议意见为"不合格"的学位论文，将认定为"存在问题学位论文"；有且只有 1 位专家评议意见为"不合格"的学位论文，将再送 2 位同行专家进行复评. 2 位复评专家中有 1 位以上(含 1 位)专家评议意见为"不合格"的学位论文，将认定为"存在问题学位论文". 设每篇学位论文被每位专家评议为"不合格"的概率均为 $p(0<p<1)$，且各篇学位论文是否被评议为"不合格"相互独立.

(1)相关部门随机地抽查了 300 位博士硕士的论文，每人一篇，抽检是否合格，抽检得到的部分数据如下表所示：

	合格	不合格
博士学位论文	150	50
硕士学位论文	50	

通过计算说明是否有 99.9%的把握认为论文是否合格与作者的学位高低有关系？

(2)若 $p=\dfrac{1}{2}$，记一篇抽检的学位论文被认定为"存在问题学位论文"的概率为 p_0，求 p_0 的值；

(3)若拟定每篇抽检论文不需要复评的评审费用为 900 元，需要复评的评审费用为 1500 元；除评审费外，其他费用总计为 100 万元. 现以此方案实施，且抽检论文为 6000 篇，问是否会超过预算？并说明理由.

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

临界值表：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}ax^2+1$ 有两个极值点 x_1,x_2（e为自然对数的底数）.

(1)求实数 a 的取值范围；

(2)求证：$\frac{x_1+x_2}{2}<\ln a$.

(二)选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22．(本小题满分 10 分)选修 4—4：坐标系与参数方程

直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\sqrt{3}\cos\alpha, \\ y=\sqrt{3}\sin\alpha \end{cases}$ (其中 α 为参数)，直线 l 的方程为 $x+\sqrt{3}y-2=0$．以坐标原点 O 为极点，以 x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系．

(1)求曲线 C 的普通方程和直线 l 的极坐标方程；

(2)已知射线 OA：$\theta=\frac{\pi}{3}$ 与曲线 C 和直线 l 分别交于 M 和 N 两点，求线段 MN 的长．

23．(本小题满分 10 分)选修 4—5：不等式选讲

已知关于 x 的不等式 $|x-m|+2x\leqslant 0$ 的解集为 $(-\infty,-1]$，其中 $m>0$．

(1)求 m 的值；

(2)若正数 a,b,c 满足 $a+b+c=m$，求证：$\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\geqslant 1$．

湘豫名校2020届高三年级12月份联考

数学(理科)参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	B	A	C	B	C	C	D	A	C	D

1. D 【解析】解一元二次不等式化简集合 A,得 $A=\{x|-1<x<3\}$,所以 $\complement_U A=\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3\}$,又 $B=\{x|x>1\}$,所以 $(\complement_U A)\cap B=\{x|x\geqslant 3\}$. 故选 D.

2. C 【解析】$\because z=\mathrm{i}^{2019}(-1-2\mathrm{i})=-\mathrm{i}(-1-2\mathrm{i})=-2+\mathrm{i}$,$\therefore \bar{z}=-2-\mathrm{i}$,故选 C.

3. B 【解析】$\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大,$\therefore$展开式中共有 11 项,$n=10$;$\therefore$令 $x=1$,则展开式中各项系数和为 $(1-2)^{10}=1$. 故选 B.

4. A 【解析】$a=(\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{3}}>3^0=1$,且 $3^{\frac{1}{3}}<8^{\frac{1}{3}}=2^{3\times\frac{1}{3}}=2$,$\therefore 1<a<2$.
$b=\log_3 \mathrm{e}<\log_3 3=1$,$c=\mathrm{e}^{\log_2 3}>\mathrm{e}^{\log_2 2}=\mathrm{e}>2$,故 $c>a>b$,选 A.

5. C 【解析】因为阳数为:1,3,5,7,9;阴数为:2,4,6,8,10,所以从阴数和阳数中各取一数的所有组合共有:$5\times5=25$ 个,满足差的绝对值为 3 的有:(1,4),(3,6),(5,2),(5,8),(7,10),(7,4),(9,6)共 7 个,则 $p=\dfrac{7}{25}$. 故选 C.

6. B 【解析】因为 $a_1=b_1=2$,$a_{n+1}-a_n=\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$,$n\in\mathbf{N}^*$,所以$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是等比数列,则 $a_n=2n$,$b_n=2^n$,所以 $b_{a_n}=2^{2n}=4^n$,故$\{b_{a_n}\}$是首项为 4,公比为 4 的等比数列,可得前 n 项和为 $\dfrac{4\cdot(1-4^n)}{1-4}=\dfrac{4}{3}(4^n-1)$,故选 B.

7. C 【解析】第一次循环:$S=1$,不满足条件,$i=2$;
第二次循环:$S=3$,不满足条件,$i=3$;
第三次循环:$S=6$,不满足条件,$i=4$;
第四次循环:$S=10$,不满足条件,$i=5$;
第五次循环:$S=15$,满足条件,输出的值为 5.
以判断框中的条件可填写“$S\geqslant15$?”. 故选 C.

8. C 【解析】$f(x)=\sin(2x-2\varphi)$,令 $2x-2\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,则 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}+\varphi$,$k\in\mathbf{Z}$.

故 y 轴右侧的第一条对称轴为 $x=\varphi+\dfrac{\pi}{4}$,左侧第一条对称轴为 $x=\varphi-\dfrac{\pi}{4}$,

所以$\begin{cases}\varphi+\dfrac{\pi}{4}\geqslant\dfrac{\pi}{3},\\ \varphi-\dfrac{\pi}{4}\leqslant 0,\end{cases}$ 所以$\dfrac{\pi}{12}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}$. 令 $f(x)=0$,则 $2x-2\varphi=k\pi$,故 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\varphi$,$k\in\mathbf{Z}$,

最大的负零点为 $x=\varphi-\dfrac{\pi}{2}$,所以$-\dfrac{5\pi}{12}<\varphi-\dfrac{\pi}{2}<-\dfrac{\pi}{12}$,$\therefore\dfrac{\pi}{12}<\varphi<\dfrac{5\pi}{12}$,综上,$\dfrac{\pi}{12}<\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}$,故选 C.

9. D 【解析】由已知可得$\angle AOB=60°$,则$\angle ABO=105°$. 又 $\sin 15°=\sin(45°-30°)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,$\sin 105°=\sin(45°+60°)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. 不妨设 $OA=4$,则由正弦定理可得 $OB=$

$\frac{OA\cdot\sin 15^\circ}{\sin 105^\circ}=\frac{4\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=8-4\sqrt{3}$，则 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times4\times(8-4\sqrt{3})\times\sin 60^\circ=8\sqrt{3}-12$，

所以阴影部分的面积为 $S'=3S_{\triangle AOB}=24\sqrt{3}-36$，圆 O 的面积为 $S=16\pi$，

则在圆内任取一点，则此点取自阴影部分的概率为 $P=\frac{S'}{S}=\frac{24\sqrt{3}-36}{16\pi}=\frac{6\sqrt{3}-9}{4\pi}$. 故选 D.

10. A 【解析】∵ $F_n=2^{2^n}+1(n=0,1,2,\cdots)$，∴ $a_n=\log_2(F_n-1)=2^n$，∴ $S_n=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$，

而 $\frac{2^{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\frac{2^{n+1}}{(2^{n+1}-2)(2^{n+2}-2)}=\frac{1}{2^{n+1}-2}-\frac{1}{2^{n+2}-2}$，

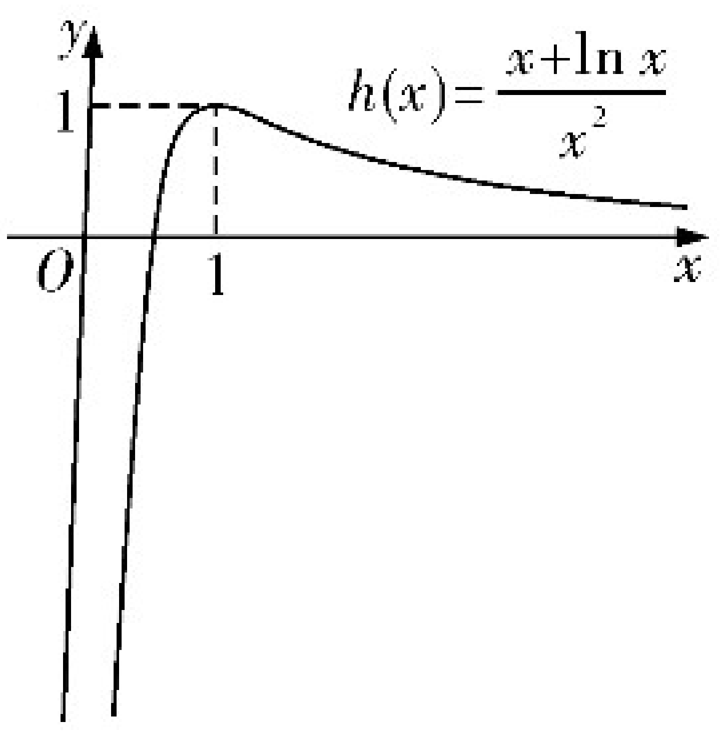
$\therefore \frac{2^2}{S_1S_2}+\frac{2^3}{S_2S_3}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\frac{1}{2^2-2}-\frac{1}{2^3-2}+\frac{1}{2^3-2}-\frac{1}{2^4-2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-2}-\frac{1}{2^{n+2}-2}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+2}-2}$，

$\therefore \frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+2}-2}<\frac{63}{127}$，∴ $\frac{1}{2^{n+2}-2}>\frac{1}{254}$，即 $2^{n+2}<256$，即 $n<6$，∴ $n=5$，故选 A.

11. C 【解析】由题意，可得∵ $EF\parallel AB$，∴ P 到 BC 的距离等于 $\triangle ABC$ 的 BC 边上高的 $\frac{1}{3}$，可得 $S_1=\frac{1}{3}S$，则 $S_2+S_3=\frac{2}{3}S$，$\lambda_2+\lambda_3=\frac{2}{3}$. 由此可得 $\lambda_2\cdot\lambda_3\leqslant\left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)^2=\frac{1}{9}$，当且仅当 $\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{3}$，即 $S_2=S_3$ 时，即 P 为 EF 的中点时，等号成立. ∴若延长 AP 交 BC 于点 D，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FC}$，则 D 为 BC 的中点，故 P 为 $\triangle ABC$ 的重心，$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$，∴ $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$. 由已知得 $\overrightarrow{PA}+x\overrightarrow{PB}+y\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，∴根据平面向量基本定理，得 $x=y=1$. 所以当 $\lambda_2\cdot\lambda_3$ 取到最大值时，x,y 的值分别为 1，1，故选 C.

12. D 【解析】由 $f(x)=\frac{1}{2}f'(1)e^{2x-2}+x^2-2f(0)x$，



得 $f'(x)=f'(1)e^{2x-2}+2x-2f(0)$，

令 $x=1$，得 $f'(1)=f'(1)+2-2f(0)$，故 $f(0)=1$.

又 $f(0)=\frac{1}{2}f'(1)e^{-2}$，则 $f'(1)=2e^2$，$f(x)=e^{2x}+x^2-2x$，

$\therefore g(x)=\sqrt{f(x)-x^2+2x}=e^x$.

$\because g\left(\frac{x^2}{a}-x\right)-x=0$，$\therefore e^{\left(\frac{x^2}{a}-x\right)}=x$，

$\therefore \frac{x^2}{a}-x=\ln x$，可得 $\frac{1}{a}=\frac{x+\ln x}{x^2}$.

构造函数 $h(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}(x>0)$，

则 $h'(x)=\frac{1-x-2\ln x}{x^3}$，令 $h'(x)=0$，则 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，所以函数 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值 1.

作出函数 $h(x)$ 的图象可知：当 $0<\frac{1}{a}<1$，即 $a>1$ 时，直线 $y=\frac{1}{a}$ 与函数 $h(x)$ 有两个交点，此时方程有两个实数解. 故 $a\in(1,+\infty)$，故选 D.

二、填空题

13. -2 【解析】∵ $f(x)$ 是奇函数，

$\therefore g(-2)=f(-2)=-f(2)=-(\log_2 2-3)=2$，

则 $f(2)=1-3=-2$，故 $f(g(-2))=-2$.

14. 1 【解析】∵函数 $f(x)=\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)+a$，∴ $f(x)$ 关于点 $\left(\frac{1}{2},a\right)$ 成中心对称，

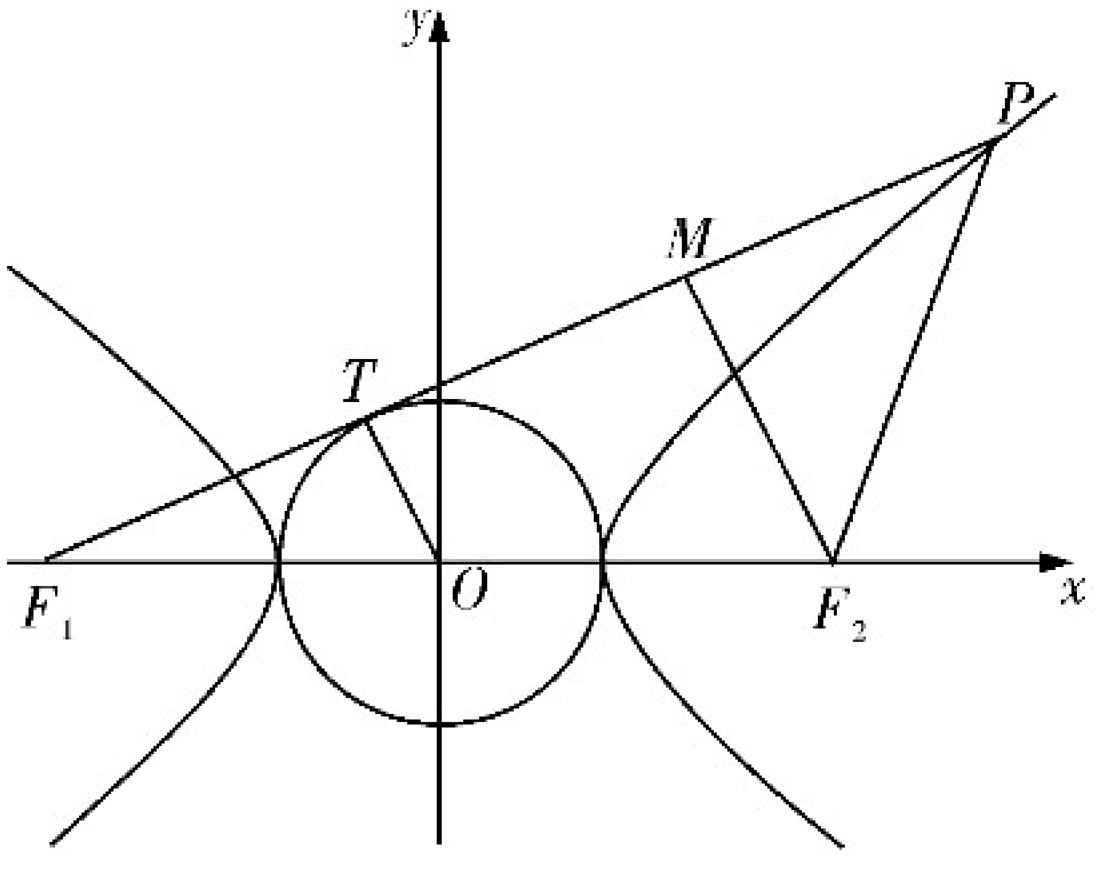
则 $f(x)+f(1-x)=2a$，则由 $f(0)+f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{2019}{2020}\right)+f(1)=2021$，

得 $f(1)+f\left(\frac{2019}{2020}\right)+f\left(\frac{2018}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2020}\right)+f(0)=2021$，

两式相加得 $2021\times[f(0)+f(1)]=2021\times2$，

即 $2021\times2a=2021\times2$，$\therefore a=1$.

15. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 【解析】如图，由题可知 $|OF_1|=|OF_2|=c$，$|OT|=a$，则 $|F_1T|=b$，又 $\overrightarrow{F_1P}=3\overrightarrow{F_1T}$，



$\therefore|TP|=2b$，$|F_1P|=3b$，又 $\because|PF_1|-|PF_2|=2a$，$|PF_2|=3b-2a$，作 $F_2M/\!/OT$，可得 $|F_2M|=2a$，$|TM|=b$，则 $|PM|=b$，在 $\triangle MPF_2$ 中，$|PM|^2+|MF_2|^2=|PF_2|^2$，

即 $b^2+(2a)^2=(3b-2a)^2$，

得 $2b=3a$，，又 $\because c^2=a^2+b^2$，化简可得 $4c^2=13a^2$，

$\therefore e=\frac{\sqrt{13}}{2}$，双曲线的离心率为 $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

16. $\frac{37\sqrt{5}+90}{120}\pi$ 【解析】由题意知，此曲线实质是以 A 点为球心，$\frac{\sqrt{5}}{2}$ 为半径的球在正方体表面的交线，正方体的各个面根据与球心位置关系分成两类，第一类是：$ABCD$，AA_1D_1D，AA_1B_1B 为过球心 A 的截面，截痕为大圆弧，圆弧半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，设各圆弧圆心角为 α，则 $\cos\alpha=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{4}{5}$，$\therefore\alpha=37^\circ=\frac{37\pi}{180}$，此时三个面上的大圆弧长和为 $3\times\frac{37\pi}{180}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{37\sqrt{5}\pi}{120}$；第二类是：$A_1B_1C_1D_1$，$B_1BCC_1$，$D_1DCC_1$ 为与球心距离为 1 的截面，截痕为小圆弧，圆弧半径为 $\frac{1}{2}$，圆心角为 $\frac{\pi}{2}$，此时这三个截痕长度和为 $3\times\frac{1}{4}\times2\pi\times\frac{1}{2}=\frac{3\pi}{4}$，

故这条曲线的总长为 $\frac{37\sqrt{5}\pi}{120}+\frac{3\pi}{4}=\frac{37\sqrt{5}+90}{120}\pi$.

三、解答题

17.【解析】(1) 由题意 $\sin^2A+\sin^2C-\sin A\sin C=\sin^2B$，

由正弦定理得 $a^2+c^2-ac=b^2$，…………（2 分）

$\therefore a^2+c^2-b^2=ac$，$\therefore\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，即 $\cos B=\frac{1}{2}$，…………（4 分）

又 $\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. …………（6 分）

(2) 由 (1) 知 $B=\frac{\pi}{3}$，且外接圆的半径为 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$，由正弦定理可得 $\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\times\frac{5\sqrt{3}}{3}$，

解得 $b=5$，…………（7 分）

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=2\times\frac{5\sqrt{3}}{3}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$，可得 $a+c=\frac{10\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin C)$，…………（8 分）

又 $A+C=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore a+c=\frac{10\sqrt{3}}{3}\left[\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\right]=\frac{10\sqrt{3}}{3}\times\left(\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)=10\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，…………（10 分）

$\because\triangle ABC$ 为锐角三角形，$\therefore 0<A<\frac{\pi}{2}$ 且 $0<C<\frac{\pi}{2}$，又 $C=\frac{2\pi}{3}-A$，得 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$.

$\therefore\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$. ······························ (11分)

$\therefore a+c\in(5\sqrt{3},10]$，故 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围是 $(5+5\sqrt{3},15]$. ·················· (12分)

18.【解析】(1) $\because\triangle AOB$ 为直角三角形，且斜边为 AB，$\therefore\angle AOB=\frac{\pi}{2}$. ······························ (1分)

将 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 以直线 AO 为轴旋转得到 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$，则 $\angle AOC=\frac{\pi}{2}$，即 $OC\perp AO$， ·················· (2分)

$\because OB\cap OC=O$，$OB\subset$ 平面 BOC，$OC\subset$ 平面 BOC，$\therefore AO\perp$ 平面 BOC. ·························· (4分)

又 $\because AO\subset$ 平面 AOB，$\therefore$ 平面 $BOC\perp$ 平面 AOB. ······································ (5分)

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$\angle OAB=\frac{\pi}{6}$，斜边 $AB=4$，$\therefore OB=\frac{1}{2}AB=2$，且 $OC=2$，······························ (6分)

又二面角 $B-AO-C$ 为 $120°$，则 $\angle COB=120°$，······································ (7分)

以 CO 为 x 轴，OA 为 z 轴，CB 上取一点 E 使得 $\angle COE=90°$，即以 OE 为 y 轴建立空间直角坐标系. ······
·· (8分)

$\therefore A(0,0,2\sqrt{3})$，$O(0,0,0)$，$B(-1,\sqrt{3},0)$，$C(2,0,0)$，

$\because\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(-1,\sqrt{3},-2\sqrt{3})$，$\therefore D\left(-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$. ·················· (9分)

$\therefore\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{7}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$，

设平面 AOB 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\therefore\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OB}=0$， ······························ (10分)

$\therefore\begin{cases}(x,y,z)\cdot(0,0,2\sqrt{3})=0,\\(x,y,z)\cdot(-1,\sqrt{3},0)=0,\end{cases}$ $\therefore$ 有 $\begin{cases}z=0,\\-x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=\sqrt{3}$，$z=0$，$\therefore\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,0)$. ······································ (11分)

设直线 CD 与平面 AOB 所成的角为 α，则 $\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CD}\rangle|=\frac{3\sqrt{3}}{10}$.

即直线 CD 与平面 AOB 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{3}}{10}$. ······································ (12分)

19.【解析】(1) 因为椭圆 $C:\frac{x^2}{4t^2}+\frac{y^2}{3t^2}=1$，所以 $a^2=4t^2$，$b^2=3t^2$，$c^2=t^2$， ······························ (2分)

又 $t>0$，所以 $a=2t$，$c=t$，所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. ······························ (4分)

(2) 直线 AP 的方程为 $y=k(x+2)$，将 $x=2$ 代入 $y=k(x+2)$ 得 $y=4k$，

所以 $Q(2,4k)$. ·· (5分)

因为 E 为线段 BQ 的中点，所以 $E(2,2k)$，因为焦点 F 的坐标为 $(1,0)$，

所以直线 EF 的斜率 $k_{EF}=2k$， ······································ (6分)

联立 $\begin{cases}y=k(x+2),\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 y 得 $(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$， ·················· (7分)

由 $x_Ax_P=\frac{16k^2-12}{3+4k^2}$，且 $x_A=-2$，$\therefore x_P=\frac{6-8k^2}{3+4k^2}$， ······························ (8分)

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{6-8k^2}{3+4k^2},\frac{12k}{3+4k^2}\right)$. ······································ (9分)

所以直线 PF 的斜率 $k_{PF}=\dfrac{\dfrac{12k}{3+4k^2}}{\dfrac{6-8k^2}{3+4k^2}-1}=\dfrac{4k}{1-4k^2}=\dfrac{2\times 2k}{1-(2k)^2}$, ………………………………………… (10分)

而直线 EF 的斜率为 $2k$,若设 $\angle EFB=\theta$,则有 $\tan\angle PFB=\tan 2\theta$,

即 $\angle PFB=2\angle EFB$. ……………………………………………………………………………… (11分)

所以点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 PF 上. ……………………………………………… (12分)

20.【解析】(1)依题意,完善表格如下:

	合格	不合格	总计
博士学位论文	150	50	200
硕士学位论文	50	50	100
总计	200	100	300

……………………………………………………………………………………………………… (1分)

算得观测值为 $K^2=\dfrac{300\times(150\times 50-50\times 50)^2}{200\times 100\times 200\times 100}=\dfrac{300\times 5000\times 5000}{200\times 100\times 200\times 100}=18.75>10.828$. ………… (3分)

故有99.9%的把握认为学位论文是否合格与作者学位高低有关系. ………………………………… (4分)

(2)因为一篇学位论文初评被认定为“存在问题学位论文”的概率为 $C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3=3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{2}$; ……………………………………………………………………………………………… (6分)

一篇学位论文复评被认定为“存在问题学位论文”的概率为 $C_3^1p(1-p)^2[1-(1-p)^2]=3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]=\dfrac{9}{32}$. ……………………………………………………………………………………… (7分)

所以一篇学位论文被认定为“存在问题学位论文”的概率为 $p_0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{32}=\dfrac{25}{32}$. ……………………… (8分)

(3)设每篇学位论文的评审费为 X 元,则 X 的可能取值为 900,1500.

$P(X=1500)=C_3^1p(1-p)^2$,$P(X=900)=1-C_3^1p(1-p)^2$,

所以 $E(X)=900\times[1-C_3^1p(1-p)^2]+1500\times C_3^1p(1-p)^2=900+1800p(1-p)^2$, ………………… (9分)

令 $g(p)=p(1-p)^2$,$p\in(0,1)$,则 $g'(p)=(1-p)^2-2p(1-p)=(3p-1)(p-1)$, ……………… (10分)

当 $p\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$时,$g'(p)>0$,$g(p)$在$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$上单调递增;当 $p\in\left(\dfrac{1}{3},1\right)$时,$g'(p)<0$,$g(p)$在$\left(\dfrac{1}{3},1\right)$上单调递减,所以 $g(p)$的最大值为 $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$. …………………………………………………………………… (11分)

所以实施此方案,最高费用为 $100+6000\times\left(900+1800\times\dfrac{4}{27}\right)\times 10^{-4}=800$(万元).

综上,若以此方案实施,不会超过预算. ………………………………………………………………… (12分)

21.【解析】(1)由 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}ax^2+1$,得 $f'(x)=e^x-ax$, ……………………………………………… (1分)

由题意知函数 $f(x)$有两个极值点,$\therefore f'(x)=0$ 有两个不等的实数解. …………………………… (2分)

即方程 $a=\dfrac{e^x}{x}(x\neq 0)$有两个不等的实数解.

设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}(x\neq 0)$,则 $g'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$,……………………………………………………………… (3分)

$\therefore g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,$(0,1)$上单调递减,$(1,+\infty)$上单调递增, …………………… (4分)

作出函数图象知当 $a>e$ 时,直线 $y=a$ 与函数 $g(x)$有两个交点,…………………………………… (5分)

当且仅当 $a>\mathrm{e}$ 时 $f(x)$ 有两个极值点，综上所述，$a>\mathrm{e}$. …………………………………………………（6分）

(2)因为 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个极值点，$x_1\neq x_2$，

$\therefore \mathrm{e}^{x_1}-ax_1=0,\mathrm{e}^{x_2}-ax_2=0,\therefore a=\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}}{x_1-x_2}$，…………………………………………………（7分）

故要证 $\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln a$，即证 $\mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}}<a$，即证 $\mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}}{x_1-x_2}$，即证 $\mathrm{e}^{\frac{x_1-x_2}{2}}<\dfrac{\mathrm{e}^{x_1-x_2}-1}{x_1-x_2}$，……………（8分）

不妨设 $x_1<x_2$，$\dfrac{x_1-x_2}{2}=t<0$，即证 $\mathrm{e}^t<\dfrac{\mathrm{e}^{2t}-1}{2t}$，即证 $2t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}+1>0$，……………………（9分）

设 $F(t)=2t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}+1(t<0)$，则 $F'(t)=2\mathrm{e}^t(t+1-\mathrm{e}^t)$，…………………………………………（10分）

易证 $t+1<\mathrm{e}^t$，$\therefore F'(t)<0$，所以 $F(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递减，$\therefore F(t)>F(0)=0$，……………（11分）

得证 $2t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}+1>0$. 综上所述：$\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln a$ 成立. …………………………………………（12分）

22.【解析】(1)由 $\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\cos\alpha,\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）得曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=3$. ……………（2分）

由直线 l 的方程为 $x+\sqrt{3}y-2=0$，得极坐标方程 $\sqrt{3}\rho\sin\theta+\rho\cos\theta-2=0$，

即 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$. …………………………………………………………………………（4分）

(2)曲线 C 的极坐标方程是 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2=0$，…………………………………………………（6分）

把 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入曲线 C 的极坐标方程得 $\rho^2-\rho-2=0$，解之得 $\rho=2$ 或 $\rho=-1$（舍），………………（8分）

把 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入直线 l 的极坐标方程得 $\rho=1$，…………………………………………………………（9分）

所以 $MN=|2-1|=1$. ………………………………………………………………………………（10分）

23.【解析】(1) $|x-m|+2x\leqslant 0$，即 $\begin{cases}x\geqslant m,\\ x-m+2x\leqslant 0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<m,\\ m-x+2x\leqslant 0,\end{cases}$ ……………………………（2分）

化简得：$\begin{cases}x\geqslant m,\\ x\leqslant\dfrac{m}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<m,\\ x\leqslant -m,\end{cases}$ 由于 $m>0$，所以不等式组的解集为 $(-\infty,-m]$，………………………（4分）

由题设可得 $-m=-1$，故 $m=1$. ……………………………………………………………………（5分）

(2)由(1)可知，$a+b+c=1$，…………………………………………………………………………（6分）

又由均值不等式有：$\dfrac{b^2}{a}+a\geqslant 2b,\dfrac{c^2}{b}+b\geqslant 2c,\dfrac{a^2}{c}+c\geqslant 2a$，…………………………………（8分）

三式相加可得：$\dfrac{b^2}{a}+a+\dfrac{c^2}{b}+b+\dfrac{a^2}{c}+c\geqslant 2b+2c+2a$，……………………………………（9分）

所以 $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{b}+\dfrac{a^2}{c}\geqslant a+b+c=1$. …………………………………………………………（10分）