北京市陈经纶中学期中诊断

高一年级 数学学科 统一卷

（时间：120 分钟 满分：150 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，有且只有一项是符合题目要求的.

1．i 是虚数单位，若复数$(1-2i)(a+i)$是纯虚数，则实数 a 的值为

A．2 B．-2 C．$\frac{1}{2}$ D．$-\frac{1}{2}$

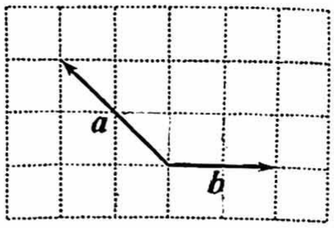
2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=\sqrt{5}$，$c=2$，$\cos A=\frac{2}{3}$，则 $b=$

A．$\sqrt{2}$ B．$\sqrt{3}$ C．2 D．3

3.已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$在正方形网格中的位置如图所示. 若网格中每个小正方形的边长均为 1，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

A．4 B．$4\sqrt{2}$

C．-4 D．$-4\sqrt{2}$

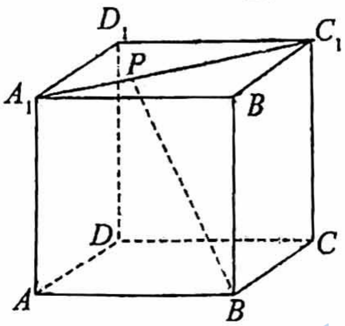


4．已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为非零向量，则“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$”是“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为锐角”的

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件

C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

5．如图，P 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 面对角线 A_1C_1 上的动点，下列直线中，始终与直线 BP 异面的是

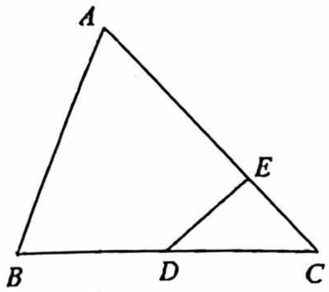


A．直线 DD_1 B．直线 B_1C C．直线 AD_1 D．直线 AC

6.已知两个单位向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的夹角为 120°，则向量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量为

A．$-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$ B．$\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$ C．$-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$ D．$\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$

7．如图，在$\triangle ABC$中，点 D，E 满足$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CE}$.若$\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ $(x,y\in R)$，则$x+y=$（ ）



A. $-\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

8 已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=60°$，$b=\sqrt{3}$，若满足条件的三角形有且只有一个，则 a 的取值范围是

A. $\{a|0<a<\sqrt{3}\}$　　B. $\{a|0<a<\sqrt{3}$ 或 $a=2\}$

C. $\{a|0<a\le\sqrt{3}\}$　　D. $\{a|0<a\le\sqrt{3}$ 或 $a=2\}$

9. 已知 a、b 是异面直线，P 是 a、b 外一点，经过点 P 且与 a、b 都相交的直线

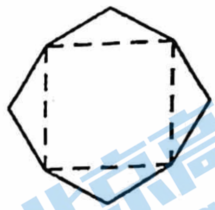
A. 至少有 1 条　　B. 最多有 1 条

C. 有且只有 1 条　　D. 可能有 0 条也可能多于 1 条

10. 某班设计了一个八边形的班徽（如图），它由腰长为 1、顶角为 α 的四个等腰三角形，及其底边构成的正方形所组成，该八边形的面积为

A. $2\sin\alpha-2\cos\alpha+2$　　B. $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+3$

C. $3\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+1$　　D. $2\sin\alpha-\cos\alpha+1$



二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11.设 $z=\frac{1+3i}{1+i}$，则 $|\bar{z}|$ 等于________.

12.已知 $A(1,2)$，$B(m,6)$，若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则实数 m 的值为__________.

13. 在 ΔABC 中，$A=120°$，$b=3,c=5$，则 $a=$____；若 D 为 BC 中点，则 $AD=$____.

14.已知函数 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，$x\in[0,3\pi]$. 则函数 $f(x)$ 的一个零点为____；若 $\exists x_1,x_2,x_3\in[0,3\pi]$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，则 $x_1+x_2+x_3$ 的最小值与最大值之和为_____.

15.关于函数 $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$，有下列结论：

①$y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称；

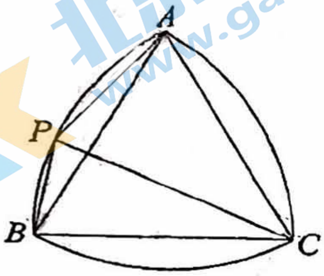
②$y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称；

③$y=f(x)$ 的表达式可写成$y=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$；

④若 $f(x_1)=f(x_2)=0$，则 x_1-x_2 必是 π 的整数倍.

其中所有正确结论的序号是__________.

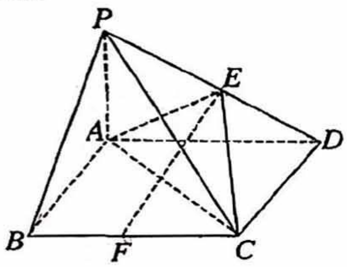
16．莱洛三角形在建筑、工业上应用广泛，如图所示，分别以正三角形 ABC 的顶点为圆心，以边长为半径作圆弧，由这三段圆弧组成的曲边三角形即为莱洛三角形，已知 A,B 两点间的距离为 2，点 P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上的一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值为______.



三、解答题：本大题共 5 小题，共 70 分.

17（本题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，E 是 PD 上的点.



（Ⅰ）若 E，F 分别是 PD 和 BC 的中点，求证：$EF//$ 平面 PAB;

（Ⅱ）若 $PB//$ 平面 AEC，求证：E 是 PD 的中点

18.（本题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\sin x\cos x+\cos^2 x$.

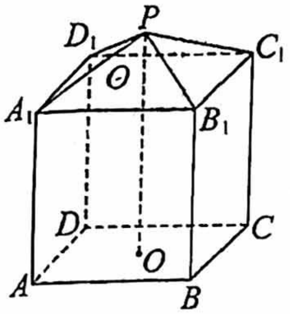
(I) 求 $f(-\frac{\pi}{4})$ 的值；

(II) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(III) 求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

19.（本题满分 13 分）

现需要设计一个仓库，由上下两部分组成，如图所示，上部分的形状是正四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$，下部分的形状是正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，正四棱柱的高 O_1O 是正四棱锥的高 PO_1 的 4 倍.



(Ⅰ) 若 $AB=6\text{m}$，$PO_1=2\text{m}$，则仓库的容积（含上下两部分）是多少？

(Ⅱ) 若上部分正四棱锥的侧棱长为 6m，当 PO_1 为多少时，下部分的正四棱柱侧面积最大，最大面积是多少？

20. （本题满分 15 分）

若存在 $\triangle ABC$ 同时满足条件①、条件②、条件③、条件④中的三个，请选择一组这样的三个条件并解答下列问题：

（Ⅰ）求 $\angle A$ 的大小；

（Ⅱ）求 $\cos B$ 和 a 的值.

条件 ①：$\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$；

条件 ②：$a=\frac{7}{3}c$；

条件③：$b-a=1$；

条件④：$b\cos A=-\frac{5}{2}$.

21.（本题满分 15 分）

集合 A 中的元素个数记为 $|A|$，若 $M\subseteq A$ 且 $|M|=2$，则称 M 为集合 A 的二元子集.

已知集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}(n\geq 3)$.若对集合 A 的任意 m 个不同的二元子集 $A_1,A_2,\cdots A_m$，均存在集合 B 同时满足：① $B\subseteq A$；② $|B|=m$；③ $|B\cap A_i|\leq 1(1\leq i\leq m)$，则称集合 A 具有性质 $P(m)$.

（Ⅰ）当 $n=3$ 时，若集合 A 具有性质 $P(m)$，请直接写出集合 A 的所有二元子集以及 m 的一个取值；

（Ⅱ）当 $n=6$ 时，判断集合 A 是否具有性质 $P(4)$？并说明理由；

（Ⅲ）若集合 A 具有性质 $P(2023)$，求 n 的最小值.

北京市陈经纶中学期中诊断高一年级数学学科答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	C	B	D	C	A	D	B	A

二、填空题：

11. $\sqrt{5}$

12. -12

13. 7；$\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

14. $\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{8\pi}{3}$中的一个；$\dfrac{23\pi}{3}$【前 3 后 2】

15. ①③【对一个 3 分，有错选 0 分】

16. $10-4\sqrt{7}$

三、解答题：

17．证明 (1)【6 分】如图，取 PA 的中点 G，连接 BG，EG，

在△PAD 中，因为 E，G 分别为所在边的中点，所以 $EG\,/\!/\,AD$，且 $EG=\dfrac{1}{2}AD$，

又因为底面 $ABCD$ 为平行四边形，F 为 BC 的中点，

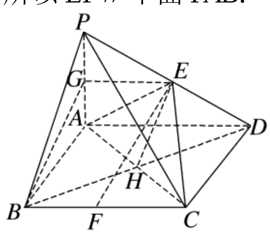
所以 $BF\,/\!/\,AD$，且 $BF=\dfrac{1}{2}AD$，

所以 $EG\,/\!/\,BF$，且 $EG=BF$，

所以四边形 $BFEG$ 为平行四边形，

所以 $EF\,/\!/\,BG$，因为 $EF\not\subset$平面 PAB，$BG\subset$平面 PAB，

所以 $EF\,/\!/$ 平面 PAB.



(2) 【6 分】如图，连接 BD，交 AC 于点 H，连接 EH，

因为 $PB\,/\!/$ 平面 ACE，$PB\subset$平面 PBD，平面 $PBD\cap$平面 $ACE=EH$，

所以 $PB\,/\!/\,EH$，在△PBD 中，H 为 BD 的中点，

所以 E 为 PD 的中点.

18.解：（I）【4 分】 $f(-\dfrac{\pi}{4})=\sin(-\dfrac{\pi}{4})\cos(-\dfrac{\pi}{4})+\cos^2(-\dfrac{\pi}{4})$

$=(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2$

$=0$.

（II）【5 分】 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（III）【6 分】因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$，

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $f(\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$；

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为 $f(\frac{\pi}{2})=0$.

19．解：（1）【5 分】∵ $PO_1=2\text{m}$，正四棱柱的高 O_1O 是正四棱锥的高 PO_1 的 4 倍，∴ $O_1O=8\text{m}$.

所以仓库的容积 $V=\frac{1}{3}\times 6^2\times 2+6^2\times 8=312\text{m}^3$

（2）【8 分】若正四棱锥的侧棱长为 6*m*，设 $PO_1=x\text{ m}$，

则 $O_1O=4x\text{ m}$，$A_1O_1=\sqrt{36-x^2}\text{ m}$，$A_1B_1=\sqrt{2}\sqrt{36-x^2}\text{ m}$.

∴正四棱柱侧面积 $S=4\cdot 4x\cdot\sqrt{2}\sqrt{36-x^2}=16\sqrt{2}x\cdot\sqrt{36-x^2}\,(0<x<6)$，

∴ $S\leqslant 16\sqrt{2}\times\dfrac{x^2+\left(\sqrt{36-x^2}\right)^2}{2}=288\sqrt{2}$，

当且仅当 $x=\sqrt{36-x^2}$，即 $x=3\sqrt{2}$ 时，$S_{\max}=288\sqrt{2}\text{ m}^2$.

所以当 $PO_1=3\sqrt{2}\text{ m}$ 时，正四棱柱侧面积最大，最大为 $288\sqrt{2}\text{ m}^2$.

20.选择①②③ 【2 分】

（Ⅰ）【5 分】因为 $a=\frac{7}{3}c$，$\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

由正弦定理可得：$\sin A=\frac{a}{c}\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $b-a=1$，所以 $a<b$，所以 $0<\angle A<\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle A=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）【8 分】在 $\triangle ABC$ 中，$a=\frac{7}{3}c$，所以 $a>c$，所以 $0<\angle C<\frac{\pi}{2}$，

因为 $\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，所以 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{13}{14}$.

$$
\begin{aligned}
\text{所以 } \cos B &= \cos(\pi-(A+C)) \\
&= -\cos(A+C) \\
&= \sin A\sin C-\cos A\cos C \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}-\frac{1}{2}\times\frac{13}{14} \\
&= -\frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

由正弦定理得 $\frac{\frac{4\sqrt{3}}{7}}{b}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{a}$，即 $7b=8a$.

因为 $b-a=1$，所以 $a=7$.

选择 ①②④【2 分】

（Ⅰ）【5 分】因为 $a=\frac{7}{3}c$，$\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，由正弦定理可得：

$\sin A=\frac{a}{c}\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中，$b\cos A=-\frac{5}{2}$，所以 $0<\angle C<\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle A=\frac{2\pi}{3}$.

（Ⅱ）【8 分】在 $\triangle ABC$ 中，$a=\frac{7}{3}c$，所以 $a>c$，所以 $0<\angle C<\frac{\pi}{2}$，

因为 $\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，所以 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{13}{14}$.

$$
\begin{aligned}
\text{所以 } \cos B &= \cos(\pi-(A+C)) \\
&= -\cos(A+C) \\
&= \sin A\sin C-\cos A\cos C, \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}+\frac{1}{2}\times\frac{13}{14} \\
&= \frac{11}{14}
\end{aligned}
$$

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$

因为 $b\cos A=-\frac{5}{2}$，所以 $b=\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=5$．由正弦定理得

$a=\frac{\sin A}{\sin B}\cdot b=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}\times 5=7$.

21. 解： 解：（Ⅰ）集合 A 的所有元素个数为 2 的子集有：$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$ ⋯2 分

满足题意的集合 B 可以是：$\{1\}$ 或 $\{2\}$ 或 $\{3\}$，此时 $m=1$ …………3 分

或者也可以是：$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$，此时 $m=2$ ………4 分

（Ⅱ）集合 A 不具有性质 $P(4)$，理由如下：

反证法：假设存在集合 B，即对任意的 A_1,A_2,A_3,A_4，$|B|=4$，

$|B\cap A_i|\le 1(1\le i\le 4)$ ……5 分

则取 $A_1=\{1,2\}$，$A_2=\{3,4\}$，$A_3=\{5,6\}$，$A_4=\{2,3\}$

（A_4 任意构造，符合题意即可）………7 分

此时由于 $|B|=4$，由抽屉原理可知，必有 $|B\cap A_i|=2(1\le i\le 3)$ ……8 分

与题设矛盾，假设不成立，因此集合 A 不具有性质 $P(4)$ …………9 分

（Ⅲ）首先证明 $n\ge 2\times 2023-1=4045$

反证法：假设 $n\le 2\times 2023-2=2\times 2022=4044$，由集合 A 具有性质 $P(2023)$，则存在集合 B，

对任意 $A_1,A_2,\cdots,A_{2023}$，$|B|=2023$，$|B\cap A_i|\le 1(1\le i\le 2023)$

则取 $A_1=\{1,2\}$，$A_2=\{3,4\}$，$A_3=\{5,6\}$，…，

$A_{2022}=\{2\times 2022-1,2\times 2022\}$，$A_{2023}=\{1,2\times 2022\}$

（A_{2023} 任意构造，符合题意即可）……………………10 分

此时由于 $|B|=2023$，由抽屉原理可知，必有 $|B\cap A_{i_0}|=2(1\le i_0\le 2022)$

……………11 分

与题设矛盾，假设不成立，因此 $n\ge 4045$ …………………12 分（共 3 分）

然后证明：$n_{\min}=4045$

当 $n=4045$ 时，$|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_{2023}|=4046>n$，由抽屉原理可知，

存在 $A_i\cap A_j\ne\varnothing(1\le i<j\le 2023)$，

不妨设为 $A_{2022}\cap A_{2023}\ne\varnothing$，取 $a_0\in A_{2022}\cap A_{2023}$，$a_i\in A_i(1\le i\le 2021)$

…………13 分

设 $B=A\setminus\{a_0,a_1,\cdots,a_{2021}\}$，此时 $|B|\ge 4045-2022=2023$，

且 $|B\cap A_i|\le 1(1\le i\le 2023)$ ……………14 分

故 $n=4045$ 符合题意，综上可知 $n_{\min}=4045$.………………15 分（共 3 分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。