2023 北京牛栏山一中高二 10 月月考

数　　学

第I卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，四个选项中只有一是符合题目.）

1. 在空间直角坐标系中，已知点 $A(1,2,3), B(3,3,5)$，则线段 AB 的长度为（　）

A. 3　　B. 4　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{6}$

2. 在空间直角坐标系中，点 $A(1,1,1)$，点 $B(3,-1,4)$，则点 A 关于点 B 的对称点坐标是（　）

A. $(2,-2,3)$　　B. $(5,-3,7)$　　C. $(5,-1,3)$　　D. $(4,0,5)$

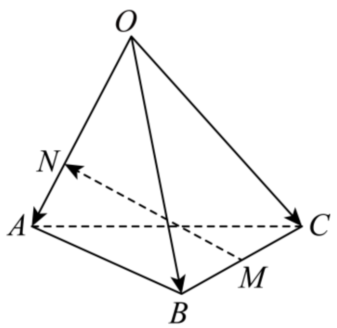
3. 经过点 $(2,1)$，且倾斜角为 $45°$ 的直线方程是（　）

A. $y=x-3$　　B. $y=x+1$　　C. $y=-x+3$　　D. $y=x-1$

4. 直线 $x+(m+2)y-1=0$ 与直线 $mx+3y-1=0$ 平行，则 m 的值为（　　）

A. －3　　B. 1　　C. 1 或－3　　D. －1 或 3

5. 如图，空间四边形 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$，点 M 为 BC 中点，点 N 在侧棱 OA 上，且 $ON=2NA$，则 $\overrightarrow{MN}=$（　）



A. $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　B. $-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　C. $\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$　　D. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

6. 直线 $x\sin a+y+1=0\,(a\in \mathrm{R})$ 的倾斜角的取值范围是（　）

A. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$　　C. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$　　D. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$

7. 给出下列命题：

①经过点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线都可以用方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 表示；

②若直线 l 的方向向量 $\vec{a}=(0,1,-1)$，平面 α 的法向量 $\vec{n}=(1,-1,-1)$，则 $l//\alpha$；

③直线 $y=ax-3a+2\,(a\in \mathbf{R})$ 必过定点 $(3,2)$；

④如果向量 $\vec{a},\vec{b}$ 与任何向量不能构成空间向量的一个基底，那么 $\vec{a},\vec{b}$ 一定共线.

其中真命题的个数是（　）

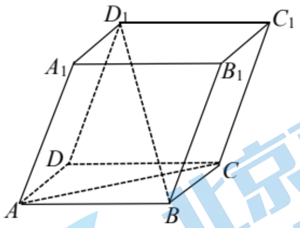
A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

8. 已知空间三点 $O(0,0,0)$，$A(-1,1,0)$，$B(0,2,2)$，在直线 OB 上有一点 H 满足 $AH\perp OB$，则点 H 的坐标为（　）

A. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$　　C. $\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

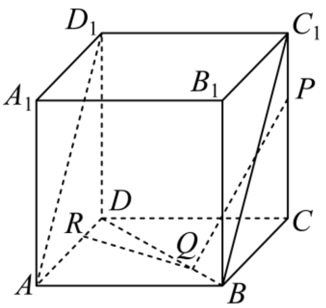
9. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=AA_1=1$，

$\angle BAD=\frac{\pi}{2},\angle BAA_1=\angle DAA_1=\frac{\pi}{4}$，则直线 BD_1 与直线 AC 所成角的余弦值为（　）



A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P,Q 分别是线段 CC_1,BD 上的点，R 是直线 AD 上的点，满足 $PQ//$ 平面 $ABC_1D_1,PQ\perp RQ$，且 P、Q 不是正方体的顶点，则 $|PR|$ 的最小值是（　）



A. $\frac{\sqrt{30}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{30}}{4}$

第II卷

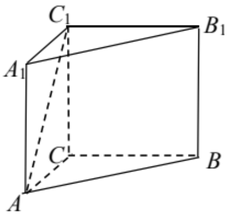
二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．请把结果填在答题纸上的相应位置．）

11. 直线 $x+\sqrt{3}y+1=0$ 的倾斜角为______.

12. 已知点 $P(-1,b)$ 到直线 $2x+y-1=0$ 的距离为 2，则 $b=$________.

13. 已知向量 $\vec{a}=(1,-1,m),\vec{b}=(2,1,0),\vec{c}=(0,1,-1)$ 共面，则 $m=$________.

14. 《九章算术》中将底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的三棱柱称为堑堵．在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 $AC=BC=1,AA_1=1$，点 P 是直线 AC_1 上的动点，则 P 到直线 BB_1 的最短距离是________.



15. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别是 AB,CC_1 的中点.

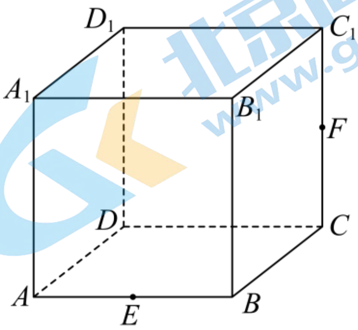
① $EF//AC_1$；

② A_1F 与 BD 所成角为 $90°$；

③ $A_1E\perp$ 平面 ADF；

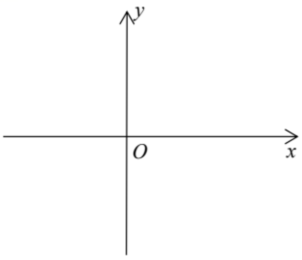
④ A_1F 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

其中所有正确说法的序号是________.



三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明过程或演算步骤.）

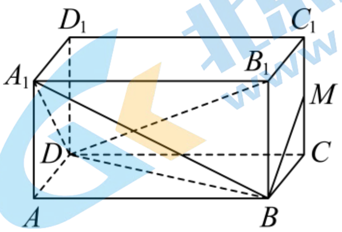
16. 已知直线 $l_1: x-y-1=0$ 与直线 $l_2: x-2y+3=0$ 交于点 P.



（1）直线 l 过点 P 且平行于直线 $x-4y+2=0$，求直线 l 的方程；（结果写成一般式）

（2）直线 l_1 与 y 轴交于 A，l_2 与 x 轴交于点 B，请在直角坐标系中画出两条直线，求 $\triangle ABP$ 中 AB 边上的高线所在的直线方程.

17. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2, AD=AA_1=1, M$ 是 CC_1 中点.



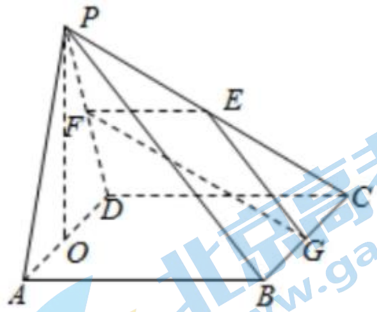
（1）求直线 BM 与 DB_1 所成角的余弦值；

（2）求平面 A_1BD 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值.

18.（1）直线 l 过点 $P(1,2)$ 且在两坐标轴上的截距相等，求直线 l 的方程；

（2）直线 m 过点 $P(1,2)$ 且与 x,y 轴正半轴分别交于 M,N 两点，O 为坐标原点，求三角形 OMN 面积取最小值时直线 m 的方程.

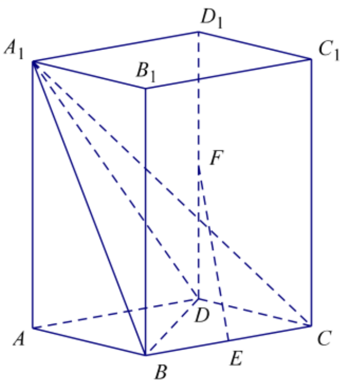
19. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面是边长为 4 的正方形，$\triangle PAD$ 是正三角形，$CD\perp$ 平面 PAD，E、F、G、O 分别是 PC、PD、BC、AD 的中点.



（1）求证：$PO\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）已知点 M 是线段 PG 上的动点，并且到平面 EFG 的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，求线段 GM 的长.

20. 如图，在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，$AB=2,\angle BAD=60°,AA_1=a$，$E,F$ 分别是棱 BC,DD_1 的中点.



（1）求证：$EF//$ 平面 A_1BD；

（2）若二面角 A_1-BD-A 的大小是 $45°$，求 a 值，并求直线 A_1C 与平面 A_1BD 所成角的正弦值.

21. 对于正整数集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\left(n\in\mathbf{N}^*,n\geq3\right)$，如果去掉其中任意一个元素 $a_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 之后，剩余的所有元素组成的集合都能分为两个交集为空集的集合，且这两个集合的所有元素之和相等，就称集合 A 为“平衡集”.

（1）判断集合 $Q=\{2,4,6,8,10\}$ 是否是“平衡集”并说明理由；

（2）求证：若集合 A 是“平衡集”，则集合 A 中元素的奇偶性都相同；

（3）证明：四元集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，其中 $a_1<a_2<a_3<a_4$ 不可能是“平衡集”．

参考答案

第I卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，四个选项中只有一是符合题目.）

1. 【答案】A

【分析】根据距离公式计算即可.

【详解】$|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(3-2)^2+(5-3)^2}=3$.

故选：A.

2. 【答案】B

【分析】直接根据中点坐标公式即可得结果.

【详解】设点 A 关于点 B 的对称点坐标 $Q(x,y,z)$，

由中点坐标公式可得 $\begin{cases}x+1=6\\y+1=-2\\z+1=8\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=5\\y=-3\\z=7\end{cases}$，即 $Q(5,-3,7)$，

故选：B.

3. 【答案】D

【分析】由倾斜角求斜率，应用点斜式求直线方程.

【详解】由题设，直线斜率为 $\tan 45°=1$，又过 $(2,1)$，

所以，直线方程为 $y-1=x-2\Rightarrow x-y-1=0$（或 $y=x-1$）.

故选：D

4. 【答案】A

【分析】由题意可得 1×3＝（m+2）m，解方程求出 m，然后检验即可

【详解】根据直线 x+（m+2）y - 1＝0 与直线 m+3y - 1＝0 平行，

可得 1×3＝（m+2）m，解得 m＝1 或 - 3，

当 m＝1 时，两直线的方程重合，不符合题意；

当 m＝ - 3 时，两直线的方程为 x - y - 1＝0 和 3x - 3y+1＝0，两直线平行，符合题意，

故 m＝ - 3.

故选：A.

5. 【答案】C

【分析】由图形中线段关系，应用向量加减、数乘的几何意义用 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 表示出 $\overrightarrow{MN}$.

【详解】$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})-\overrightarrow{OB}$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$.

故选：C

6.【答案】C

【分析】由直线斜率$-\sin a\in[-1,1]$，结合斜率与倾斜角的关系求倾斜角的范围.

【详解】由题设，直线斜率为$-\sin a\in[-1,1]$，

若倾斜角为$\theta\in[0,\pi)$，则$\tan\theta\in[-1,1]$，故$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

故选：C

7.【答案】B

【分析】对于①④，可举出反例；对于②，计算向量数量积得到$\vec{a}\perp\vec{n}$，从而得到$l//\alpha$；对于③，变形后得到直线所过定点.

【详解】对于①，当经过点$P_0\left(x_0,y_0\right)$的直线斜率不存在时，不能用方程$y-y_0=k\left(x-x_0\right)$表示，①错误；

对于②，因为$\vec{a}\cdot\vec{n}=(0,1,-1)\cdot(1,-1,-1)=-1+1=0$，故$\vec{a}\perp\vec{n}$，

则直线l与$\vec{n}$垂直，则$l//\alpha$，②正确；

对于③，直线$y=ax-3a+2(a\in\mathbf{R})$变形为$y-2=a(x-3)(a\in\mathbf{R})$，必过定点$(3,2)$，③正确；

对于④，不共线的向量$\vec{a},\vec{b}$与零向量不能构成空间向量的一个基底，④错误.

故选：B

8.【答案】D

【分析】设$\overrightarrow{OH}=\lambda\overrightarrow{OB}$，由向量垂直的坐标表示可构造方程求得$\lambda$，进而可得点$H$坐标.

【详解】由题意知：$\overrightarrow{OA}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,2,2)$，

设$\overrightarrow{OH}=\lambda\overrightarrow{OB}=(0,2\lambda,2\lambda)(\lambda\in\mathbf{R})$，$\therefore\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=(1,2\lambda-1,2\lambda)$，

$\because AH\perp OB$，$\therefore\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}=0+2(2\lambda-1)+4\lambda=0$，解得：$\lambda=\frac{1}{4}$，

$\therefore\overrightarrow{OH}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，又$O(0,0,0)$，$\therefore H\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

故选：D.

9.【答案】D

【分析】由线段的位置关系及向量加减的几何意义有$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，利用向量数量积的运算律求$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}$、$|\overrightarrow{BD_1}|$，最后应用夹角公式求直线夹角余弦值.

【详解】由$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，

所以

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$，

又 $AB=AD=AA_1=1$，$\angle BAD=\frac{\pi}{2},\angle BAA_1=\angle DAA_1=\frac{\pi}{4}$，

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}=0+\frac{\sqrt{2}}{2}-1+1+\frac{\sqrt{2}}{2}-0=\sqrt{2}$，而 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$，

$|\overrightarrow{BD_1}|=\sqrt{(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})^2}=\sqrt{\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}}$

$=\sqrt{1+1+1+\sqrt{2}-0-\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，

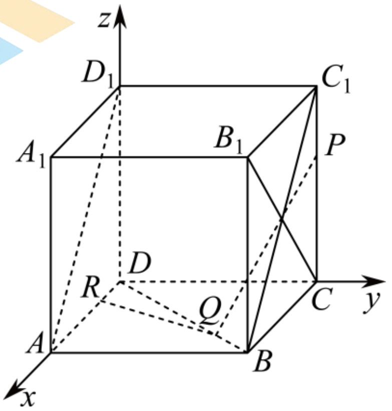
综上，直线 BD_1 与直线 AC 所成角的余弦值为 $|\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD_1}|}|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：D

10.【答案】A

【分析】根据正方体的性质得到 $B_1C\perp$ 平面 ABC_1D_1，然后建立空间直角坐标系，设 $P(0,1,z)$，$Q(x,x,0)$，$R(y,0,0)$，根据 PQ // 平面 ABC_1D_1，$PQ\perp RQ$ 得到 $-x+z=0$，$2x-y=1$，然后得到 $|PR|=\sqrt{5x^2-4x+2}$，最后求最值即可.

【详解】



因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，$B_1C\perp BC_1$，

因为 $B_1C\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AB\perp B_1C$，

因为 $AB\cap BC_1=B$，$AB,BC_1\subset$ 平面 ABC_1D_1，所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC_1D_1，

如图，以 D 为原点，分别以 DA,DC,DD_1 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，

$B_1(1,1,1)$，$C(0,1,0)$，

设 $P(0,1,z)$，$Q(x,x,0)$，$R(y,0,0)$，$x,y,z\in(0,1)$

$\overrightarrow{PQ}=(x,x-1,-z)$，$\overrightarrow{RQ}=(x-y,x,0)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-1,0,-1)$，

因为 PQ // 平面 ABC_1D_1，所以 $\overrightarrow{B_1C}\cdot\overrightarrow{PQ}=-x+z=0$，

因为 $PQ\perp RQ$，所以 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RQ}=x(x-y)+x(x-1)=0$，即 $2x-y=1$，

$|PR|=\sqrt{y^2+1+z^2}=\sqrt{(2x-1)^2+1+x^2}=\sqrt{5x^2-4x+2}$，

所以当 $x=\dfrac{2}{5}$ 时，$|PR|$ 最小，最小为 $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

故选：A.

第II卷

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．请把结果填在答题纸上的相应位置.）

11.【答案】$\dfrac{5\pi}{6}$ ##150°

【分析】根据倾斜角和斜率的关系即可求解.

【详解】直线 $x+\sqrt{3}y+1=0$ 的斜率 $k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

设其倾斜角为 θ，故可得 $\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，又 $\theta\in[0,\pi)$，故 $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$.

故答案为：$\dfrac{5\pi}{6}$

12.【答案】$3\pm2\sqrt{5}$

【分析】根据点到直线的距离公式即可求解.

【详解】由题意可得 $\dfrac{|-2+b-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\Rightarrow b=3\pm2\sqrt{5}$，

故答案为：$3\pm2\sqrt{5}$

13.【答案】$\dfrac{3}{2}$ ##1.5

【分析】由向量共面定理，结合向量线性关系的坐标运算求参数即可.

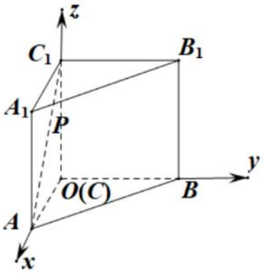
【详解】由题设 $\vec{a}=x\vec{b}+y\vec{c}$ 且 $x,y\in\mathrm{R}$，即 $(1,-1,m)=x(2,1,0)+y(0,1,-1)=(2x,x+y,-y)$，

所以 $\begin{cases}2x=1\\x+y=-1\\-y=m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=-\dfrac{3}{2}\\m=\dfrac{3}{2}\end{cases}$.

故答案为：$\dfrac{3}{2}$

14.【答案】1

【分析】建立空间直角坐标系，利用点到直线的距离公式求解.

【详解】

如图以点 C 为原点，CA 为 x 轴，CB 为 y 轴，CC_1 为 z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A\ 1,0,0\ ,B\ \ 0,1,0\ ,B_1\ \ 0,1,1\ ,C_1\ \ 0,0,1$ ，

且 $\overrightarrow{AC_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,1)$，

因为点 P 是直线 AC_1 上的动点，设点 $P(x,0,z)$，

则 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC_1}$，即 $x-1,0,z\ =\lambda\ -1,0,1$ ，

可得 $x=1-\lambda,z=\lambda$，即 $P(1-\lambda,0,\lambda)$，$\overrightarrow{BP}=\ 1-\lambda,-1,\lambda$ ，

则 P 到直线 BB_1 的距离是 $\sqrt{\overrightarrow{BP}^2-\ \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BB_1}\ ^2}=\sqrt{\ 1-\lambda\ ^2+1+\lambda^2-\lambda^2}=\sqrt{\ 1-\lambda\ ^2+1}$，

则当 $\lambda=1$ 时，P 到直线 BB_1 的最短距离是 1.

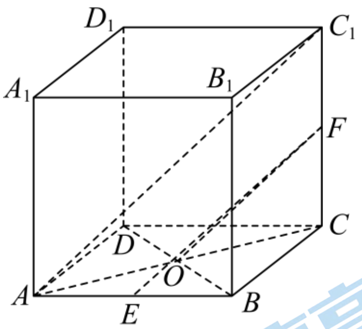
故答案为：1

15.【答案】②③

【分析】连接 AC_1,EF，连接 AC,BD 交于 O，连接 OF，易得 $AC_1//OF$，由平行公理判断①；利用线面垂直性质及判定判断②③；转化为求 A_1F 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角，结合线面角定义及已知求其正弦值判断④.

【详解】连接 AC_1,EF，连接 AC,BD 交于 O，连接 OF，则 O 是 AC 中点，

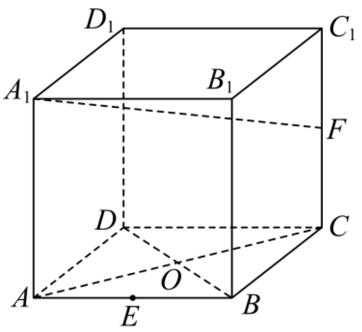
所以 F 是 CC_1 的中点，则 $AC_1//OF$，而 $E\in OF$，故 $EF//AC_1$ 不成立，①错；



如下图，$BD\perp AC$，$CF\perp$ 面 $ABCD$，$BD\subset$ 面 $ABCD$，则 $CF\perp BD$，

由 $AC\cap CF=C$，$AC,CF\subset$ 面 $ACFA_1$，则 $BD\perp$ 面 $ACFA_1$，$A_1F\subset$ 面 $ACFA_1$，

所以 A_1F 与 BD 垂直，②对；

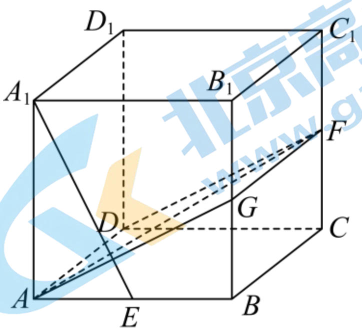


如下图，若 G 为 BB_1 中点，连接 AG,GF，显然 $GF//BC//AD$，则面 ADF 即为面 $AGFD$，

由题设易知：$\mathrm{Rt}\triangle AEA_1 \cong \mathrm{Rt}\triangle BGA$，则 $\angle BAG+\angle AEA_1=90^\circ$，即 $EA_1\perp GA$，

由 $AD\perp$ 面 ABB_1A，$EA_1\subset$ 面 ABB_1A，则 $AD\perp EA_1$，

$GA\cap AD=A$，$GA,AD\subset$ 面 $AGFD$，则 $EA_1\perp$ 面 $AGFD$，即 $A_1E\perp$ 平面 ADF，③对；

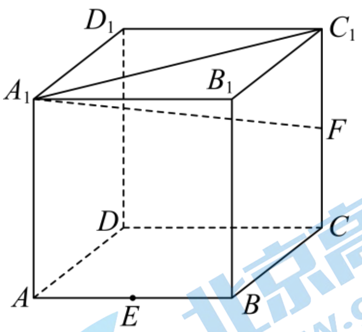


如下图，由面 $ABCD//$ 面 $A_1B_1C_1D_1$，则 A_1F 与平面 $ABCD$ 所成角，即为 A_1F 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角，

由 $C_1F\perp$ 面 $A_1B_1C_1D_1$，连接 A_1C_1，则 $\angle FA_1C_1$ 或其补角即为所求线面角，

在 $\mathrm{Rt}\triangle FA_1C_1$ 中，$A_1C_1=\sqrt{2}AB,FA_1=\sqrt{A_1C_1^2+\dfrac{C_1C^2}{4}}=\dfrac{3}{2}AB$，

所以 $\sin\angle FA_1C_1=\dfrac{FC_1}{FA_1}=\dfrac{\frac{1}{2}AB}{\frac{3}{2}AB}=\dfrac{1}{3}$，④错.



故答案为：②③

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明过程或演算步骤.）

16. 【答案】（1）$x-4y+11=0$

（2）$3x-y-11=0$

【分析】(Ⅰ) 联立两个直线的方程求出 P 的坐标，根据平行直线系方程即可代入求解，

（2）根据两直线垂直满足的斜率关系，即可由点斜式方程求解.

【小问 1 详解】

联立方程得 $\begin{cases}x-y-1=0\\x-2y+3=0\end{cases}$，解可得 $\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$，则 P 的坐标为 $(5,4)$，

由于直线 l 平行于直线 $x-4y+2=0$，设直线 l 的方程为 $x-4y+b=0$；

将 $P(5,4)$ 代入得 $b=11$，

所以直线 l 的方程为 $x-4y+11=0$

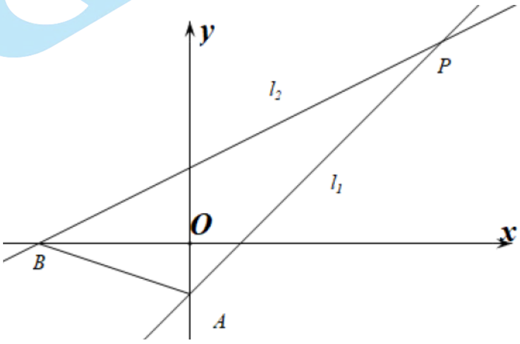
【小问 2 详解】

由题意可知 $A(0,-1),B(-3,0)$,所以 $k_{BA}=\dfrac{-1-0}{0+3}=-\dfrac{1}{3}$，

故 AB 边上的高线所在的直线斜率为 3，

又高所在直线经过点 $P(5,4)$，

所以由点斜式可得 $y-4=3(x-5)$，即 $3x-y-11=0$



17.【答案】(1) $\dfrac{\sqrt{30}}{30}$；

（2）$\dfrac{2}{3}$.

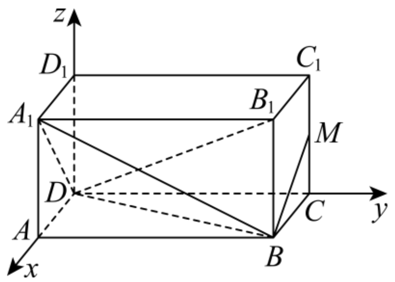
【分析】(1)(2) 构建空间直角坐标系，应用向量法求线线角、面面角的余弦值即可.

【小问 1 详解】

构建如下图示的空间直角坐标系，$B(1,2,0),M(0,2,\dfrac{1}{2}),B_1(1,2,1),D(0,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{BM}=(-1,0,\dfrac{1}{2})$，$\overrightarrow{DB_1}=(1,2,1)$，则 $|\cos\langle\overrightarrow{BM},\overrightarrow{DB_1}\rangle|=|\dfrac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{DB_1}}{|\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{DB_1}|}|=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{30}}{30}$；

所以直线 BM 与 DB_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{30}$.



【小问 2 详解】

由（1），$\vec{m}=(0,0,1)$ 是面 $ABCD$ 的一个法向量，$A_1(1,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1),\overrightarrow{DB}=(1,2,0)$，若 $\vec{n}=(x,y,z)$ 面 A_1BD 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=x+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=x+2y=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $\vec{n}=(-2,1,2)$，

所以 $|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}|=\dfrac{2}{1\times 3}=\dfrac{2}{3}$；

所以平面 A_1BD 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值 $\dfrac{2}{3}$.

18.【答案】（1）$2x-y=0$ 或 $x+y-3=0$；（2）$2x+y-4=0$.

【分析】（1）讨论截距是否为 0，应用点斜式、截距式及所过的点求直线方程；

（2）由题意直线斜率一定存在且不为 0，设直线为 $kx-y+2-k=0$，求出与坐标轴交点坐标，并得到三角形面积关于 k 的关系式，利用基本不等式求最小值，并确定取值条件，即得直线方程.

【详解】（1）若截距都为 0 时，则所求直线为 $y=2x\Rightarrow 2x-y=0$；

若截距不为 0 时，设直线为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a}=1\Rightarrow a=3$，

所以 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1\Rightarrow x+y-3=0$；

综上，所求直线为 $2x-y=0$ 或 $x+y-3=0$.

（2）由题意，直线斜率一定存在且小于 0，

设直线为 $y-2=k(x-1)\Rightarrow kx-y+2-k=0$，故 $M(1-\dfrac{2}{k},0),N(0,2-k)$，

所以三角形 OMN 面积 $S=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{2}{k})(2-k)=2+\dfrac{1}{2}[(-k)+(-\dfrac{4}{k})]\ge 2+\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{(-k)\cdot(-\dfrac{4}{k})}=4$，

当且仅当 $\begin{cases}-k=-\dfrac{4}{k}\\ k<0\end{cases}\Rightarrow k=-2$ 时三角形 OMN 面积取最小值为 4，

所以，对应直线为 $2x+y-4=0$.

19.【答案】（1）证明过程见解析

（2）$\frac{2\sqrt{7}}{3}$

【分析】（1）根据三线合一得到线线垂直，进而由$CD\perp$平面PAD，得到$CD\perp PO$，证明出线面垂直；

（2）建立空间直角坐标系，设$M\left(0,a,\frac{\sqrt{3}(4-a)}{2}\right)$，由点到平面距离公式得到方程，求出线段$GM$的长.

【小问 1 详解】

因为$\triangle PAD$是正三角形，O为BC的中点，

所以$PO\perp AD$，

因为$CD\perp$平面PAD，$PO\subset$平面PAD，所以$CD\perp PO$，

因为$CD\cap AD=D$，$CD,AD\subset$平面$ABCD$，

所以$PO\perp$平面$ABCD$；

【小问 2 详解】

连接OG，因为$PO\perp$平面$ABCD$，$OA,OG\subset$平面$ABCD$，

所以$PO\perp OA$，$PO\perp OG$，

因为底面是边长为 4 的正方形，则OP,OA,OG两两垂直，

以O为坐标原点，OA,OG,OP所在直线分别为x,y,z轴，建立空间直角坐标系，

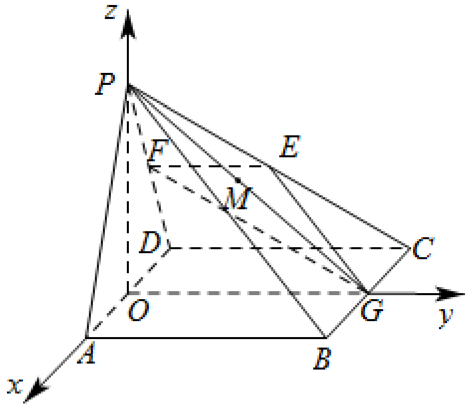
则$D(-2,0,0),C(-2,4,0),P\left(0,0,2\sqrt{3}\right),F\left(-1,0,\sqrt{3}\right),E\left(-1,2,\sqrt{3}\right),G(0,4,0)$，

设$M\left(0,a,\frac{\sqrt{3}(4-a)}{2}\right)$，平面$EFG$的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=(x,y,z)\cdot(0,-2,0)=-2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EG}=(x,y,z)\cdot\left(1,2,-\sqrt{3}\right)=x+2y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

解得$y=0$，令$z=1$，则$x=\sqrt{3}$，故$\vec{n}=\left(\sqrt{3},0,1\right)$，

则M到平面EFG的距离为$d=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{MG}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|\left(\sqrt{3},0,1\right)\cdot\left(0,4-a,-\frac{\sqrt{3}(4-a)}{2}\right)\right|}{\sqrt{3+1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，



解得 $a=\frac{8}{3}$，故 $M\left(0,\frac{8}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，故 $|GM|=\sqrt{\left(\frac{8}{3}-4\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-0\right)^2}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

20.【答案】（1）证明过程见解析

（2）$a=\sqrt{3}$，直线 A_1C 与平面 A_1BD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【分析】（1）作出辅助线，得到四边形 $PFEB$ 为平行四边形，$EF//BP$，进而证明出线面平行；

（2）建立空间直角坐标系，由二面角大小求出 $a=\sqrt{3}$，再利用线面角的求解公式得到答案.

【小问 1 详解】

取 A_1D 的中点 P，连接 PF,PB，

因为 E,F 分别是棱 BC,DD_1 的中点，所以 $PF//A_1D_1$ 且 $PF=\frac{1}{2}A_1D_1$，$BE=\frac{1}{2}BC$，

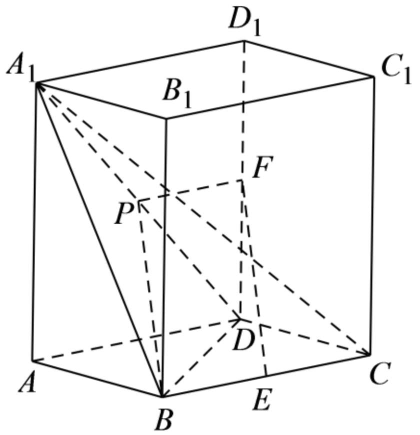
因为直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BC//A_1D_1$ 且 $BC=A_1D_1$，

所以 $PF//BE$，且 $PF=BE$，

故四边形 $PFEB$ 为平行四边形，所以 $EF//BP$，

因为 $EF\not\subset$ 平面 A_1BD，$PB\subset$ 平面 A_1BD，

所以 $EF//$ 平面 A_1BD；



【小问 2 详解】

连接 AC，与 BD 相交于点 O，连接 A_1C_1, B_1D_1 相交于点 H，

因为底面 $ABCD$ 是菱形，所以 AC, BD 相互垂直，则 AC, BD, OH 两两垂直，

以 O 为坐标原点，OA, OB, OH 所在直线分别为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系，

因为 $AB=2, \angle BAD=60°, AA_1=a$，所以 $AD=BD=2$，$OB=1, AO=\sqrt{3}$，

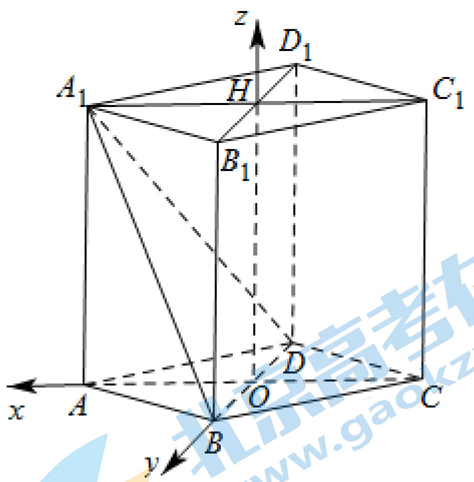
故 $A\left(\sqrt{3},0,0\right) A_1\left(\sqrt{3},0,a\right), B\left(0,1,0\right), D\left(0,-1,0\right), C\left(-\sqrt{3},0,0\right)$，

设平面 A_1BD 的法向量为 $\vec{m}=\left(x,y,z\right)$，

则 $\begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(x,y,z\right)\cdot\left(0,-2,0\right)=-2y=0 \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1D}=\left(x,y,z\right)\cdot\left(-\sqrt{3},-1,-a\right)=-\sqrt{3}x-y-az=0 \end{cases}$，

解得 $y=0$，令 $x=1$，则 $z=-\dfrac{\sqrt{3}}{a}$，故 $\vec{m}=\left(1,0,-\dfrac{\sqrt{3}}{a}\right)$

平面 ABD 的法向量为 $\vec{n}=\left(0,0,1\right)$，



则 $\left|\cos\left\langle \vec{m},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|\left(1,0,-\dfrac{\sqrt{3}}{a}\right)\cdot(0,0,1)\right|}{\sqrt{1+\dfrac{3}{a^2}}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{a}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{a^2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

解得 $a=\sqrt{3}$，

则 $\vec{m}=(1,0,-1)$

设直线 A_1C 与平面 A_1BD 所成角大小为 θ，

则 $\sin\theta=\cos\left\langle \vec{m},\overrightarrow{A_1C}\right\rangle=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1C}\right|}=\dfrac{\left|(1,0,-1)\cdot\left(-2\sqrt{3},0,-\sqrt{3}\right)\right|}{\sqrt{1+1}\times\sqrt{12+3}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

21.【答案】（1）$Q=\{2,4,6,8,10\}$ 不是“平衡集”，利用见解析

（2）证明见解析　（3）证明见解析

【分析】（1）根据定义直接判断即可得到结论.

（2）设 $a_1+a_2+\ldots+a_n=M$，由“平衡集”定义可知 $M-a_i(i=1$，2，$\cdots$，$n)$ 为偶数，所以 $a_i(i=1$，2，$\cdots$，$n)$ 的奇偶性相同.

（3）依次去掉 a_1，a_2 可得 $a_1=a_2$，显然与 $a_1<a_2$ 矛盾，所以集合 $A=\{a_1$，a_2，a_3，$a_4\}$ 不可能是“平衡集”.

【小问 1 详解】

集合 $Q=\{2,4,6,8,10\}$ 不是“平衡集”，理由如下：

当去掉 1 或 5 或 9 时，满足条件，

当去掉 4 时，$2+10\neq 6+8$，不满足条件，

当去掉 8 时，$2+10\neq 4+6$，不满足条件，

所以集合 $Q=\{2,4,6,8,10\}$ 不是“平衡集”.

【小问 2 详解】

设集合 $A=\{a_1$，a_2，$\cdots$，$a_n\}$，$a_1+a_2+\ldots+a_n=M$，

由于集合 A 是“平衡集”，设去掉 $\forall a_i(i\in N^*)$，则 $A=A_1\cup A_2\cup\{a_i\}$，其中 $A_1\cap A_2=\varnothing$，且 A_1,A_2 中的元素和相等，不妨设 A_1 中的元素和为 $n,n\in N$，所以 $M=2n+a_i$，

$M-a_i=2n(i=1$，2，$\cdots$，$n)$ 为偶数，

$\therefore a_i(i=1$，2，$\cdots$，$n)$ 的奇偶性相同，方可保证 $(M-a_i)$ 一直为偶数，

即集合 A 中元素的奇偶性都相同.

【小问 3 详解】

若集合 $A=\{a_1$，a_2，a_3，$a_4\}$ 是“平衡集”，且 $a_1<a_2<a_3<a_4$，

去掉a_1，则$a_2+a_3=a_4$，

去掉a_2，则$a_1+a_3=a_4$，

$\therefore a_1=a_2$，显然与$a_1<a_2$矛盾，

$\therefore$集合$A=\{a_1，a_2，a_3，a_4\}$不可能是“平衡集”．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

微信搜一搜

京考一点通