理科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，$A=\{-1,0,1\}$，$B=\{1,2\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$　　【A】

A．$\{-2,3\}$　　B．$\{-2,2,3\}$　　C．$\{-2,-1,0,3\}$　　D．$\{-2,-1,0,2,3\}$

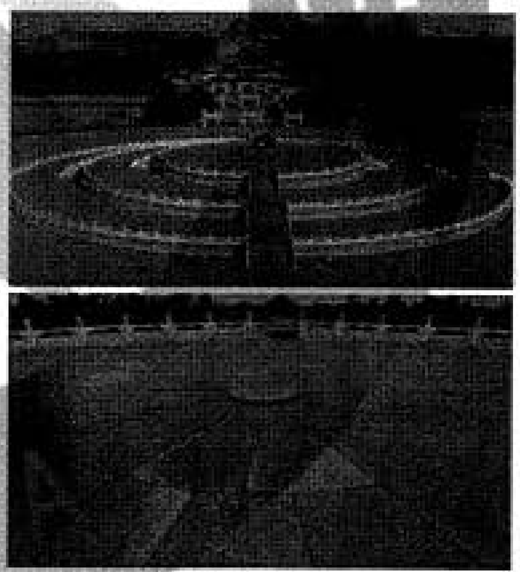
2．若 α 为第四象限角，则　　【D】

A．$\cos 2\alpha>0$　　B．$\cos 2\alpha<0$　　C．$\sin 2\alpha>0$　　D．$\sin 2\alpha<0$

3．在新冠肺炎疫情防控期间，某超市开通网上销售业务，每天能完成1 200份订单的配货，由于订单量大幅增加，导致订单积压．为解决困难，许多志愿者踊跃报名参加配货工作．已知该超市某日积压500份订单未配货，预计第二天的新订单超过1 600份的概率为0.05．志愿者每人每天能完成50份订单的配货，为使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于0.95，则至少需要志愿者　　【B】

A．10名　　B．18名　　C．24名　　D．32名

4．北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层．上层中心有一块圆形石板（称为天心石），环绕天心石砌9块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加9块．下一层的第一环比上一层的最后一环多9块，向外每环依次也增加9块．已知每层环数相同，且下层比中层多729块，则三层共有扇面形石板（不含天心石）　　【C】



A．3 699块　　B．3 474块　　C．3 402块　　D．3 339块

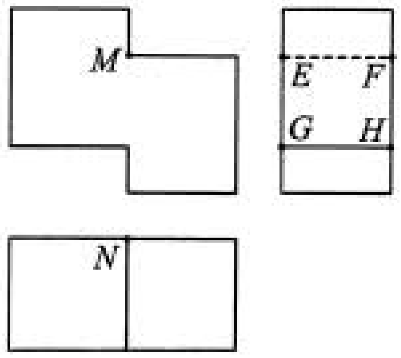
5．若过点 $(2,1)$ 的圆与两坐标轴都相切，则圆心到直线 $2x-y-3=0$ 的距离为　　【B】

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　D．$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

6．数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{m+n}=a_m a_n$．若 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=2^{15}-2^5$，则 $k=$　　【C】

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

7. 右图是一个多面体的三视图，这个多面体某条棱的一个端点在正视图中对应的点为M，在俯视图中对应的点为N，则该端点在侧视图中对应的点为　　【A】



A. E　　B. F

C. G　　D. H

8. 设O为坐标原点，直线$x=a$与双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线分别交于$D$，$E$两点．若$\triangle ODE$的面积为8，则$C$的焦距的最小值为　　【B】

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

9. 设函数$f(x)=\ln|2x+1|-\ln|2x-1|$，则$f(x)$　　【D】

A. 是偶函数，且在$(\frac{1}{2},+\infty)$单调递增　　B. 是奇函数，且在$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$单调递减

C. 是偶函数，且在$(-\infty,-\frac{1}{2})$单调递增　　D. 是奇函数，且在$(-\infty,-\frac{1}{2})$单调递减

10. 已知$\triangle ABC$是面积为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$的等边三角形，且其顶点都在球O的球面上．若球O的表面积为16π，则O到平面ABC的距离为　　【C】

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 若$2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，则　　【A】

A. $\ln(y-x+1)>0$　　B. $\ln(y-x+1)<0$

C. $\ln|x-y|>0$　　D. $\ln|x-y|<0$

12. 0-1周期序列在通信技术中有着重要应用．若序列$a_1a_2\cdots a_n\cdots$满足$a_i\in\{0,1\}$ $(i=1,2,\cdots)$，且存在正整数m，使得$a_{i+m}=a_i\,(i=1,2,\cdots)$成立，则称其为0-1周期序列，并称满足$a_{i+m}=a_i\,(i=1,2,\cdots)$的最小正整数$m$为这个序列的周期．对于周期为$m$的0-1序列$a_1a_2\cdots a_n\cdots$，$C(k)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}a_ia_{i+k}\,(k=1,2,\cdots,m-1)$是描述其性质的重要指标．下列周期为5的0-1序列中，满足$C(k)\leqslant\frac{1}{5}\,(k=1,2,3,4)$的序列是　　【C】

A. 11010⋯　　B. 11011⋯　　C. 10001⋯　　D. 11001⋯

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $45°$，$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，则 $k=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$．

14．4 名同学到 3 个小区参加垃圾分类宣传活动，每名同学只去 1 个小区，每个小区至少安排 1 名同学，则不同的安排方法共有 $\underline{\ 36\ }$ 种．

15．设复数 z_1，z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=2$，$z_1+z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，则 $|z_1-z_2|=$ $\underline{2\sqrt{3}}$．

16．设有下列四个命题：

p_1：两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内．

p_2：过空间中任意三点有且仅有一个平面．

p_3：若空间两条直线不相交，则这两条直线平行．

p_4：若直线 $l\subset$ 平面 α，直线 $m\perp$ 平面 α，则 $m\perp l$．

则下述命题中所有真命题的序号是 $\underline{\quad ①③④ \quad}$．

① $p_1\wedge p_4$　　② $p_1\wedge p_2$　　③ $\neg p_2\vee p_3$　　④ $\neg p_3\vee\neg p_4$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）

$\triangle ABC$ 中，$\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=\sin B\sin C$．

（1）求 A；

（2）若 $BC=3$，求 $\triangle ABC$ 周长的最大值．

解：（1）由正弦定理和已知条件得 $BC^2-AC^2-AB^2=AC\cdot AB$．　①

由余弦定理得 $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos A$．　②

由①，②得 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$．因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$．

（2）由正弦定理及（1）得 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}=2\sqrt{3}$，从而

$$AC=2\sqrt{3}\sin B，\quad AB=2\sqrt{3}\sin(\pi-A-B)=3\cos B-\sqrt{3}\sin B．$$

故 $BC+AC+AB=3+\sqrt{3}\sin B+3\cos B=3+2\sqrt{3}\sin(B+\dfrac{\pi}{3})$．

又 $0<B<\dfrac{\pi}{3}$，所以当 $B=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$\triangle ABC$ 周长取得最大值 $3+2\sqrt{3}$．

18．（12 分）

某沙漠地区经过治理，生态系统得到很大改善，野生动物数量有所增加．为调查该地区某种野生动物的数量，将其分成面积相近的200个地块，从这些地块中用简单随机抽样的方法抽取20个作为样区，调查得到样本数据(x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots,20)$，其中x_i和y_i分别表示第i个样区的植物覆盖面积（单位：公顷）和这种野生动物的数量，并计算得$\sum_{i=1}^{20}x_i=60$，$\sum_{i=1}^{20}y_i=1\,200$，$\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2=80$，$\sum_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2=9\,000$，$\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=800$．

（1）求该地区这种野生动物数量的估计值（这种野生动物数量的估计值等于样区这种野生动物数量的平均数乘以地块数）；

（2）求样本(x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots,20)$的相关系数（精确到0.01）；

（3）根据现有统计资料，各地块间植物覆盖面积差异很大．为提高样本的代表性以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计，请给出一种你认为更合理的抽样方法，并说明理由．

附：相关系数$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，$\sqrt{2}\approx1.414$．

解：（1）由已知得样本平均数$\overline{y}=\dfrac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}y_i=60$，从而该地区这种野生动物数量的估计值为$60\times200=12\,000$．

（2）样本(x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots,20)$的相关系数

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{800}{\sqrt{80\times9000}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx0.94.$$

（3）分层抽样：根据植物覆盖面积的大小对地块分层，再对200个地块进行分层抽样．

理由如下：由(2)知各样区的这种野生动物数量与植物覆盖面积有很强的正相关．由于各地块间植物覆盖面积差异很大，从而各地块间这种野生动物数量差异也很大，采用分层抽样的方法较好地保持了样本结构与总体结构的一致性，提高了样本的代表性，从而可以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计．

19.（12 分）

已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的右焦点 F 与抛物线 C_2 的焦点重合，C_1 的中心与 C_2 的顶点重合．过 F 且与 x 轴垂直的直线交 C_1 于 A，B 两点，交 C_2 于 C，D 两点，且 $|CD|=\dfrac{4}{3}|AB|$．

（1）求 C_1 的离心率；

（2）设 M 是 C_1 与 C_2 的公共点．若 $|MF|=5$，求 C_1 与 C_2 的标准方程．

解：（1）由已知可设 C_2 的方程为 $y^2=4cx$，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$．

不妨设 A，C 在第一象限，由题设得 A，B 的纵坐标分别为 $\dfrac{b^2}{a}$，$-\dfrac{b^2}{a}$；C，D 的纵坐标分别为 $2c$，$-2c$，故 $|AB|=\dfrac{2b^2}{a}$，$|CD|=4c$．

由 $|CD|=\dfrac{4}{3}|AB|$ 得 $4c=\dfrac{8b^2}{3a}$，即 $3\times\dfrac{c}{a}=2-2(\dfrac{c}{a})^2$．解得 $\dfrac{c}{a}=-2$（舍去），$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$．

所以 C_1 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$．

（2）由（1）知 $a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，故 $C_1:\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$．

设 $M(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{{x_0}^2}{4c^2}+\dfrac{{y_0}^2}{3c^2}=1$，${y_0}^2=4cx_0$，故

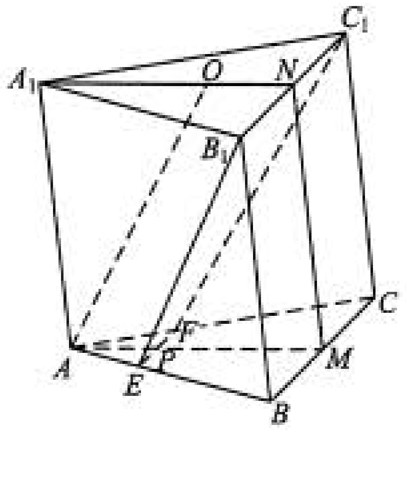
$$\frac{{x_0}^2}{4c^2}+\frac{4x_0}{3c}=1. \qquad ①$$

由于 C_2 的准线为 $x=-c$，所以 $|MF|=x_0+c$，而 $|MF|=5$，故 $x_0=5-c$，代入①得 $\dfrac{(5-c)^2}{4c^2}+\dfrac{4(5-c)}{3c}=1$，即 $c^2-2c-3=0$，解得 $c=-1$（舍去），$c=3$．

所以 C_1 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$，$C_2$ 的标准方程为 $y^2=12x$．

20.（12 分）

如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，侧面 BB_1C_1C 是矩形，M，N 分别为 BC，B_1C_1 的中点，P 为 AM 上一点．过 B_1C_1 和 P 的平面交 AB 于 E，交 AC 于 F．



（1）证明：$AA_1/\!/MN$，且平面 $A_1AMN\perp$ 平面 EB_1C_1F；

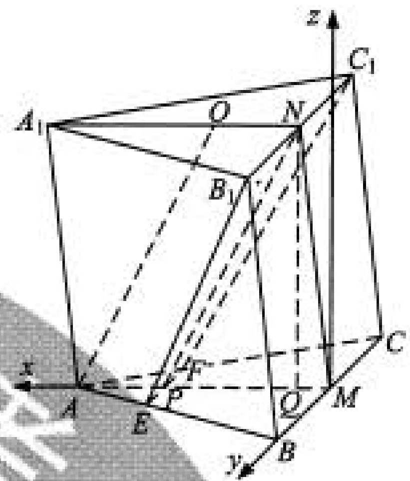
（2）设 O 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心．若 $AO/\!/$ 平面 EB_1C_1F，且 $AO=AB$，求直线 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角的正弦值．

解：（1）因为 M，N 分别为 BC，B_1C_1 的中点，所以 $MN//CC_1$．又由已知得 $AA_1//CC_1$，故 $AA_1//MN$．

因为 $\triangle A_1B_1C_1$ 是正三角形，所以 $B_1C_1 \perp A_1N$．又 $B_1C_1 \perp MN$，故 $B_1C_1 \perp$ 平面 A_1AMN．

所以平面 $A_1AMN \perp$ 平面 EB_1C_1F．

（2）由已知得 $AM \perp BC$．以 M 为坐标原点，$\overrightarrow{MA}$ 的方向为 x 轴正方向，$|\overrightarrow{MB}|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 $M-xyz$，则 $AB=2$，$AM=\sqrt{3}$．



连结 NP，则四边形 $AONP$ 为平行四边形，故 $PM=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$E(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3},0)$．由（1）知平面 $A_1AMN \perp$ 平面 ABC．作 $NQ \perp AM$，垂足为 Q，则 $NQ \perp$ 平面 ABC．

设 $Q(a,0,0)$，则 $NQ=\sqrt{4-(\frac{2\sqrt{3}}{3}-a)^2}$，$B_1(a,1,\sqrt{4-(\frac{2\sqrt{3}}{3}-a)^2})$，故

$$\overrightarrow{B_1E}=(\frac{2\sqrt{3}}{3}-a,-\frac{2}{3},-\sqrt{4-(\frac{2\sqrt{3}}{3}-a)^2})，|\overrightarrow{B_1E}|=\frac{2\sqrt{10}}{3}．$$

又 $\boldsymbol{n}=(0,-1,0)$ 是平面 A_1AMN 的法向量，故

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{B_1E}\rangle)=\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{B_1E}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1E}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{B_1E}|}=\frac{\sqrt{10}}{10}．$$

所以直线 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$．

21．（12 分）

已知函数 $f(x)=\sin^2 x\sin 2x$．

（1）讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 的单调性；

（2）证明：$|f(x)| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$；

（3）设 $n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\cdots\sin^2 2^n x \leqslant \frac{3^n}{4^n}$．

解：（1）$f'(x)=\cos x(\sin x\sin 2x)+\sin x(\sin x\sin 2x)'$

$$=2\sin x\cos x\sin 2x+2\sin^2 x\cos 2x$$

$$=2\sin x\sin 3x．$$

当 $x\in(0,\frac{\pi}{3})\cup(\frac{2\pi}{3},\pi)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ 时，$f'(x)<0$．

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{3})$，$(\frac{2\pi}{3},\pi)$ 单调递增, 在区间 $(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ 单调递减.

（2）因为 $f(0)=f(\pi)=0$，由（1）知，$f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 的最大值为 $f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，最小值为 $f(\frac{2\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$．而 $f(x)$ 是周期为 π 的周期函数，故

$$|f(x)|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

（3）由于

$$\begin{aligned}&(\sin^2x\sin^2 2x\cdots\sin^2 2^nx)^{\frac{3}{2}}\\&=|\sin^3x\sin^3 2x\cdots\sin^3 2^nx|\\&=|\sin x||\sin^2x\sin^3 2x\cdots\sin^3 2^{n-1}x\sin 2^nx||\sin^2 2^nx|\\&=|\sin x||f(x)f(2x)\cdots f(2^{n-1}x)||\sin^2 2^nx|\\&\leqslant|f(x)f(2x)\cdots f(2^{n-1}x)|,\end{aligned}$$

所以 $\sin^2x\sin^2 2x\cdots\sin^2 2^nx\leqslant(\frac{3\sqrt{3}}{8})^{\frac{2n}{3}}=\frac{3^n}{4^n}$．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修4－4：坐标系与参数方程]（10 分）

已知曲线 C_1，C_2 的参数方程分别为

$$C_1:\begin{cases}x=4\cos^2\theta,\\y=4\sin^2\theta\end{cases}(\theta\text{为参数}),\quad C_2:\begin{cases}x=t+\frac{1}{t},\\y=t-\frac{1}{t}\end{cases}(t\text{为参数}).$$

（1）将 C_1，C_2 的参数方程化为普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系．设 C_1，C_2 的交点为 P，求圆心在极轴上，且经过极点和 P 的圆的极坐标方程．

解：（1）C_1 的普通方程为 $x+y=4\ (0\leqslant x\leqslant4)$．

由 C_2 的参数方程得 $x^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2$，$y^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2$，所以 $x^2-y^2=4$．

故 C_2 的普通方程为 $x^2-y^2=4$．

（2）由$\begin{cases}x+y=4,\\x^2-y^2=4\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=\dfrac{5}{2},\\y=\dfrac{3}{2},\end{cases}$ 所以P的直角坐标为$(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$．

设所求圆的圆心的直角坐标为$(x_0,0)$，由题意得

$$x_0^2=(x_0-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{4},$$

解得$x_0=\dfrac{17}{10}$．

因此，所求圆的极坐标方程为$\rho=\dfrac{17}{5}\cos\theta$．

23．[选修4—5：不等式选讲]（10分）

已知函数$f(x)=|x-a^2|+|x-2a+1|$．

（1）当$a=2$时，求不等式$f(x)\geqslant 4$的解集；

（2）若$f(x)\geqslant 4$，求a的取值范围．

解：（1）当$a=2$时，

$$f(x)=\begin{cases}7-2x, & x\leqslant 3,\\1, & 3<x\leqslant 4,\\2x-7, & x>4.\end{cases}$$

因此，不等式$f(x)\geqslant 4$的解集为$\{x\,|\,x\leqslant\frac{3}{2}$或$x\geqslant\frac{11}{2}\}$．

（2）因为$f(x)=|x-a^2|+|x-2a+1|\geqslant|a^2-2a+1|=(a-1)^2$，故当$(a-1)^2\geqslant 4$，即$|a-1|\geqslant 2$时，$f(x)\geqslant 4$．所以当$a\geqslant 3$或$a\leqslant -1$时，$f(x)\geqslant 4$．

当$-1<a<3$时，$f(a^2)=|a^2-2a+1|=(a-1)^2<4$．

所以a的取值范围是$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$．