绝密★启用前

2024届新高三秋季入学摸底考试

数　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1\. 已知集合 $P=\{x\in\mathbf{N}\mid x(x-3)\leqslant 0\}$，$Q=\{x\mid x\geqslant 2\}$，则 $P\cap Q=$

A. $\{2\}$　　B. $\{3\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{0,2,3\}$

2\. 已知复数 $z=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 z 的虚部为

A. i　　B. -1　　C. 2　　D. 1

3\. 函数 $f(x)=2^x+\log_2 x$ 的零点所在区间是

A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

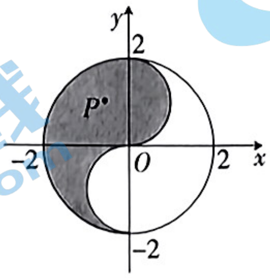
4\. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_n=\begin{cases}n^2, n\leqslant 5,\\ 5n-4, n>5,\end{cases}$ 则 $a_6=$

A. 1　　B. 5　　C. 7　　D. 9

5\. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin x,\sqrt{3}\cos x)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1$，则 $f(x)$ 图象的一条对称轴的方程是

A. $x=\dfrac{\pi}{6}$　　B. $x=-\dfrac{\pi}{6}$　　C. $x=\dfrac{\pi}{3}$　　D. $x=-\dfrac{\pi}{3}$

6\. “太极图”因其形状如对称的阴阳两鱼互抱在一起，故也被称为“阴阳鱼太极图”．如图是放在平面直角坐标系中的“太极图”，图中曲线为圆或半圆，已知点 $P(x,y)$ 是阴影部分（包括边界）的动点，则 $\dfrac{y}{x-2}$ 的最小值为



A. $-\dfrac{2}{3}$　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. $-\dfrac{4}{3}$　　D. -1

7\. 已知函数 $f(x)=2x\ln x$ 的极小值为 a，极小值点为 b，零点为 c．若底面半径为1的圆锥的高 $h=a+2b+c$，则该圆锥的体积为

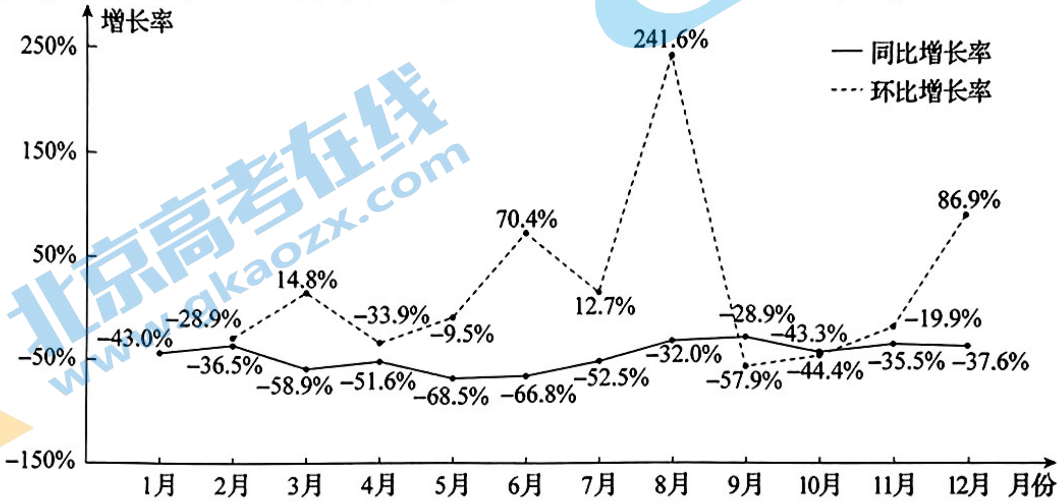
A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. π

8. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，且过点 $M(a,b)$，直线 l 与 x 轴交于点 C，点 D 在 E 的右支上，且满足$\overrightarrow{MD}=\lambda\overrightarrow{MC}$，则 $\lambda=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 在我们发布的各类统计数据中，同比和环比都是反映增长速度的核心数据指标. 如图是某专业机构统计的 2022 年 1—12 月中国校车销量走势图，则下列结论正确的是



A. 8 月校车销量的同比增长率与环比增长率都是全年最高

B. 1—12 月校车销量的同比增长率的平均数小于环比增长率的平均数

C. 1—12 月校车销量的环比增长率的极差大于同比增长率的极差

D. 1—12 月校车销量的环比增长率的方差小于同比增长率的方差

10. 已知 $-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，且 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，则

A. $\sin\alpha=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　B. $\tan\alpha=5$

C. $\cos 2\alpha=-\frac{24}{25}$　　D. $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{17\sqrt{2}}{50}$

11. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，记 $g(x)=f'(x)$. 若 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，$g(-x)=g(x)$，且 $g(0)=1$，则

A. $g(1)=0$　　B. $f(x)$ 为奇函数

C. $g(x)=g(x+4)$　　D. $\sum_{k=1}^{2\,023}g(k)=-1$

12. 已知正六棱柱 $ABCDEF\text{-}A'B'C'D'E'F'$ 的底面边长为 2，侧棱长为 1，所有顶点均在球 O 的球面上，则

A. 直线 DE' 与直线 AF' 异面

B. 若 M 是侧棱 CC' 上的动点，则 $AM+ME'$ 的最小值为 7

C. 直线 AF' 与平面 DFE' 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$

D. 球 O 的表面积为 17π

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 数据 1,2,2,2,3,4,5,6 的 75% 分位数为________.

14. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，M 是 C 上的动点，$\triangle MF_1F_2$ 的面积的最大值为 3，则 C 的长轴长的最小值为________.

15. 已知$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^n$的展开式中只有第5项的二项式系数最大,写出展开式中的一个有理项________.

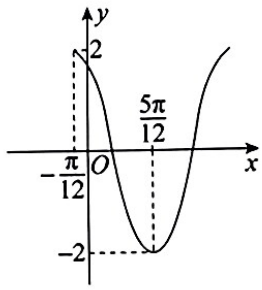
16. 记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$\cos B=\frac{2}{3}$,P为$\triangle ABC$内一点.若点P满足$\overrightarrow{CP}+\frac{b}{c}\overrightarrow{BP}=\frac{a}{c}\overrightarrow{PA}$,且$\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$,则$x+y$的最大值为________.

四、解答题:本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$在一个周期内的图象如图所示,将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度,再将图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍,纵坐标不变,得到函数$g(x)$的图象.

(1)求$g(x)$的解析式;

(2)在$\triangle ABC$中,若$g(A)=-\sqrt{3}$,$AB=2$,$AC=5$,求BC.



18. (12分)记公比不为1的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,已知$a_3,\frac{5}{2},\frac{7}{2},S_3$成等差数列.

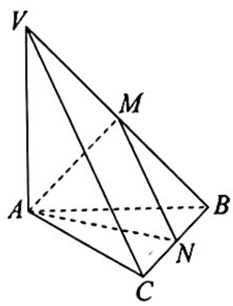
(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$b_n=\frac{2n-1}{a_n}$,求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

19. (12分)如图,在三棱锥$V-ABC$中,$VA\perp$平面ABC,$VA=AB=2BC=2$,$AB\perp BC$,M是VB的中点,N为BC上的动点.

(1)证明:平面$AMN\perp$平面VBC;

(2)当$VC\parallel$平面AMN时,求平面AMN与平面ABC夹角的余弦值.



20.（12 分）研学旅行作为一种新兴的教学方式，越来越受中学生的青睐，国家也颁布了一系列政策推进研学旅行发展. 为了解学生对“暑期研学旅行”的满意度，某教育部门对 200 名中学生进行了问卷调查，部分结果如下表. 参与问卷调查的男女比例为 3∶2.

（1）完成下面的 2×2 列联表，并判断是否有 99.9% 的把握认为“暑期研学旅行”的满意度与性别有关联；

性别	满意度		合计
	满意	不满意	
男生	100		
女生		30	
合计			

（2）该教育部门采用分层随机抽样的方法从参与问卷调查持“不满意”态度的学生中抽取了 5 名学生. 现从这 5 名学生中随机抽取 3 人进行座谈，记抽取的女生人数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(\chi^2\geqslant k_0)$	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21.（12 分）已知抛物线 $C:x^2=8y$，F 为 C 的焦点，过点 F 的直线 l 与 C 交于 H,I 两点，且在 H,I 两点处的切线交于点 T.

（1）当 l 的斜率为 -1 时，求 $|HI|$；

（2）证明：$FT\perp HI$.

22.（12 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+ax$，$g(x)=xe^{x-1}+x\ln x$，$f'(x)$，$g'(x)$ 分别为 $f(x)$，$g(x)$ 的导函数，且对任意的 $x_1\in(0,1]$，存在 $x_2\in(0,1]$，使 $f'(x_1)\leqslant g'(x_2)-2$.

（1）求实数 a 的取值范围；

（2）证明：$\forall x>0$，有 $g(x)\geqslant f'(x)$.

密　封　线　内　不　要　答　题

2024 届新高三秋季入学摸底考试

数学参考答案及评分细则

1.【答案】C

【解析】因为 $P=\{x\in\mathbf{N}|x(x-3)\leqslant 0\}=\{0,1,2,3\}$，所以 $P\cap Q=\{2,3\}$. 故选 C.

2.【答案】D

【解析】因为 $z=\frac{1+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{1-\mathrm{i}+3\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2}=2+\mathrm{i}$，所以复数 z 的虚部为 1. 故选 D.

3.【答案】A

【解析】易知 $f(x)=2^x+\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f\left(\frac{1}{4}\right)=2^{\frac{1}{4}}-2<0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}-1>0$. 故选 A.

4.【答案】A

【解析】由 $S_n=\begin{cases}n^2,n\leqslant 5,\\5n-4,n>5,\end{cases}$ 得 $S_5=25$，$S_6=26$，所以 $a_6=S_6-S_5=26-25=1$. 故选 A.

5.【答案】B

【解析】由题意 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1=\sin x-\sqrt{3}\cos x+1=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$. 令 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $x=k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=-1$ 时，$x=-\frac{\pi}{6}$. 故选 B.

6.【答案】C

【解析】记 $A(2,0)$，则 $k=\frac{y}{x-2}$ 为直线 AP 的斜率，故当直线 AP 与半圆 $x^2+(y-1)^2=1(x>0)$ 相切时，得 k 最小，此时设 $AP:y=k(x-2)$，故 $\frac{|-1-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=-\frac{4}{3}$ 或 $k=0$（舍去），即 $k_{\min}=-\frac{4}{3}$. 故选 C.

7.【答案】B

【解析】由题意得 $f'(x)=2(\ln x+1)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$，则当 $x\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，所以函数 $f(x)$ 的极小值 $a=f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{2}{\mathrm{e}}$，极小值点 $b=\frac{1}{\mathrm{e}}$. 令 $f(x)=0$，解得 $x=1$，所以 $c=1$，所以 $h=a+2b+c=1$，所以该圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\times\pi\times 1^2\times 1=\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

8.【答案】D

【解析】由题意知 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\therefore a=2b$，$\therefore M(2b,b)$，故直线 l 的方程为 $y-b=-\frac{1}{2}(x-2b)$. 令 $y=0$，得 $x=4b$，所以 $C(4b,0)$. 又因为 $\overrightarrow{MD}=\lambda\overrightarrow{MC}$，所以 $D((2\lambda+2)b,(1-\lambda)b)$，代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，化简得 $4(\lambda+1)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2-(1-\lambda)^2=1$，解得 $\lambda=\frac{1}{4}$. 故选 D.

9.【答案】BC

【解析】2022 年 8 月校车销量的同比增长率比 9 月的低，故 A 错误；由校车销量走势图知 1—12 月校车销量的同比增长率的平均数为负数，环比增长率的平均数是正数，故 B 正确；1—12 月校车销量的环比增长率的极差为 241.6% −(−57.9%)=299.5%，同比增长率的极差为(−28.9%)−(−68.5%)=39.6%，所以环比增长率的极差大于同

比增长率的极差,故 C 正确;由校车销量走势图知 1—12 月校车销量的环比增长率的波动大于同比增长率的,所以环比增长率的方差大于同比增长率的方差,故 D 错误. 故选 BC.

10.【答案】ACD

【解析】因为 $-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$,且 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10}$,所以 $\sin\alpha=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{7\sqrt{2}}{10}}{-\frac{\sqrt{2}}{10}}=7$,故 A 正确,B 错误;

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2-\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)^2=-\frac{24}{25}$,故 C 正确;$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$

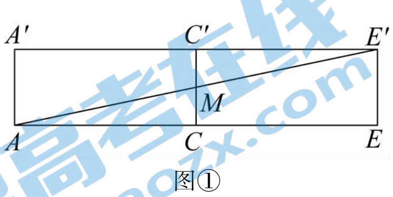
$=\frac{7}{25}$,则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{7}{25}-\frac{24}{25}\right)=-\frac{17\sqrt{2}}{50}$,故 D 正确. 故选 ACD.

11.【答案】ACD

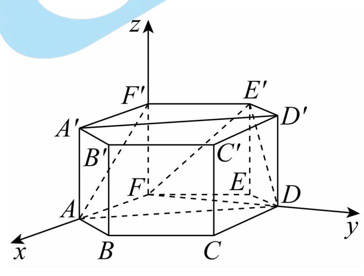
【解析】由 $f(x)=f(2-x)$,等式两边同时求导,得 $f'(x)=-f'(2-x)$,即 $g(x)+g(2-x)=0$,故 $g(x)$ 的图象关于点(1,0)对称,故 A 正确;因为 $g(x)=g(-x)$,所以 $f(x)$ 应满足 $f(x)=-f(-x)+C$(C 为常数),当 $C\neq0$ 时,$f(x)$ 不是奇函数,故 B 错误;因为 $g(x)=g(-x)$,$g(x)+g(2-x)=0$,所以 $g(x)=g(x+4)$,故 C 正确;因为 $g(x)$ 的图象关于点(1,0)对称,关于 y 轴对称,且 $g(0)=1$,所以 $g(1)=0$,$g(2)=-1$,$g(3)=0$,$g(4)=1$,所以 $\sum_{k=1}^{2\,023}g(k)=g(1)+g(2)+\cdots+g(2\,023)=g(1)+g(2)+g(3)=-1$,故 D 正确. 故选 ACD.

12.【答案】BCD

【解析】对于 A,如图②,连接 AD,$A'D'$,则 $AD/\!/A'D'$,$A'D'/\!/E'F'$,所以 $AD/\!/E'F'$,所以直线 DE' 与直线 AF' 共面,故 A 错误;对于 B,将平面 $ACC'A'$ 沿着 CC' 翻折到与平面 $CEE'C'$ 共面的位置,得到矩形 $AEE'A'$,如图①所示. 因为底面边长为 2,$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$,所以 $AC=CE=2\sqrt{3}$,则 $AE'=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+1^2}=7$,故 B 正确;对于 C,以 F 为坐标原点,FA,FD,FF' 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立如图②所示的空间直角坐标系,则 $A(2,0,0)$,$F'(0,0,1)$,$F(0,0,0)$,$D(0,2\sqrt{3},0)$,$E'(-1,\sqrt{3},1)$,所以 $\overrightarrow{AF'}=(-2,0,1)$,$\overrightarrow{FD}=(0,2\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{FE'}=(-1,\sqrt{3},1)$. 设平面 DFE' 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{FD}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{FE'}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0,\\ -x+\sqrt{3}y+z=0.\end{cases}$ 令 $z=1$,得 $x=1$,所以平面 DFE' 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$. 设直线 AF' 与平面 DFE' 所成角为 θ,则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{AF'}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{AF'}||\boldsymbol{m}|}=\frac{|-2+1|}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,故 C 正确;对于 D,设球 O 的半径为 R,则 $R^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2^2=\frac{17}{4}$,所以球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{17}{4}=17\pi$,故 D 正确. 故选 BCD.



图①



图②

13.【答案】4. 5$\left(写成\frac{9}{2}也给分\right)$

【解析】因为 $8\times0.75=6$,所以 75% 分位数为 $\frac{4+5}{2}=4.5$.

14.【答案】$2\sqrt{6}$

【解析】由题意知$\frac{1}{2}\times 2c\cdot b=3$,所以 $bc=3$,故 C 的长轴长 $2a=2\sqrt{b^2+c^2}\geqslant 2\sqrt{2bc}=2\sqrt{6}$.

15.【答案】x^4(或 $1\ 120x$,或 $256x^{-2}$,写出其中一个即可)

【解析】由题意知展开式中共有 9 项,所以 $n=8$,所以$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^8$的展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_8^r(\sqrt{x})^{8-r}\left(-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)^r$

$=\mathrm{C}_8^r(-2)^r x^{4-\frac{3}{4}r}$,$0\leqslant r\leqslant 8$,$r\in\mathbf{Z}$. 若 T_{r+1} 为有理项,则 $4-\frac{3}{4}r\in\mathbf{Z}$,所以 $r=0,4,8$,故展开式中所有的有理项为

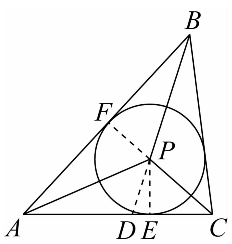
$T_1=\mathrm{C}_8^0(-2)^0x^4=x^4$,$T_5=\mathrm{C}_8^4(-2)^4x^{4-\frac{3}{4}\times 4}=1\ 120x$,$T_9=\mathrm{C}_8^8(-2)^8x^{4-\frac{3}{4}\times 8}=256x^{-2}$.

16.【答案】$\frac{6-\sqrt{6}}{5}$

【解析】由$\overrightarrow{CP}+\frac{b}{c}\overrightarrow{BP}=\frac{a}{c}\overrightarrow{PA}$,得$a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$,即 $-a\overrightarrow{AP}+b(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+c(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\mathbf{0}$,整理可得$(a+b+c)\overrightarrow{AP}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=bc\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$,故点 P 在$\angle BAC$ 的平分线上,同理可得点 P 在$\angle BCA$ 的平分线上,所以点 P 为$\triangle ABC$ 的内心. 如图,延长 BP,交 AC 于点 D,过点 P 作 $PE\perp AC$,$PF\perp AB$,垂足分别为 E,F,设$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD}$,$0<\lambda<1$,由$\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$,得$\overrightarrow{BD}=\frac{x}{\lambda}\overrightarrow{BA}+\frac{y}{\lambda}\overrightarrow{BC}$,由 D,A,C 三点共线得$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\lambda}=1$,所以 $x+y=\lambda=\frac{BP}{BD}$

$=\frac{BP}{BP+PD}=\frac{1}{1+\frac{PD}{BP}}\leqslant\frac{1}{1+\frac{PE}{BP}}=\frac{1}{1+\frac{PF}{BP}}=\frac{1}{1+\sin\frac{\angle ABC}{2}}$. 因为 $\cos\angle ABC=\frac{2}{3}$,所以$\sin\frac{\angle ABC}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,代入得 $\lambda\leqslant$

$\frac{6-\sqrt{6}}{5}$,当且仅当 $PD=PE$,即 $PD\perp AC$ 时等号成立,故$x+y$ 的最大值为$\frac{6-\sqrt{6}}{5}$.



17. 解:(1)由图象可知$\frac{T}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{2}$,所以 $\omega=2$.

又因为最高点是$\left(-\frac{\pi}{12},2\right)$,

所以$\left(-\frac{\pi}{12}\right)\times 2+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,

即 $\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.

又因为$0<\varphi<\pi$,所以 $k=0$,$\varphi=\frac{2\pi}{3}$,

所以$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$. (3 分)

将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{2\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)$的图象,

再将图象上所有点的横坐标伸长到原来的2 倍,纵坐标不变,得到函数 $g(x)=2\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象. (5 分)

(2)因为 $g(A)=-2\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$,

所以 $\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$,

所以 $A+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$,

所以 $A=\frac{\pi}{3}$.(8 分)

由余弦定理,得 $BC^2=2^2+5^2-2\times2\times5\times\cos\frac{\pi}{3}=19$,所以 $BC=\sqrt{19}$.(10 分)

【评分细则】

第(1)问只要形式正确也给分.

18. 解:(1)设$\{a_n\}$的公比为 q,由 $a_3,\frac{5}{2},\frac{7}{2},S_3$ 成等差数列,得 $a_3=\frac{3}{2},S_3=\frac{9}{2}$.(1 分)

法一:因为 $q\neq1$,所以 $\begin{cases}\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{9}{2},\\ a_1q^2=\frac{3}{2},\end{cases}$ 所以 $a_1=6,q=-\frac{1}{2}$,则 $a_n=6\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.(5 分)

法二:由题意得 $S_3=a_1+a_2+a_3=a_1+a_1q+a_1q^2=\frac{9}{2},a_3=a_1q^2=\frac{3}{2}$,

解得 $\begin{cases}a_1=6,\\ q=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=\frac{3}{2},\\ q=1\end{cases}$(舍去),(4 分)

所以 $a_n=6\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.(5 分)

(2)因为 $a_n=6\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},b_n=-\frac{1}{12}(2n-1)\cdot(-2)^n$,(6 分)

所以 $T_n=-\frac{1}{12}\times[1\times(-2)^1+3\times(-2)^2+\cdots+(2n-1)\cdot(-2)^n]$,(7 分)

则 $-2T_n=-\frac{1}{12}\times[1\times(-2)^2+3\times(-2)^3+\cdots+(2n-1)\cdot(-2)^{n+1}]$,

所以 $-36T_n=-2+2\times\left[(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^n\right]-(2n-1)\cdot(-2)^{n+1}$

$=-2+2\times\frac{(-2)^2[1-(-2)^{n-1}]}{1-(-2)}-(2n-1)\cdot(-2)^{n+1}$

$=\frac{2}{3}-\left(2n-\frac{1}{3}\right)\cdot(-2)^{n+1}$,

所以 $T_n=\frac{6n-1}{27}\cdot(-2)^{n-1}-\frac{1}{54}$.(12 分)

【评分细则】

1. a_n 和 T_n 用其它形式表示,结果正确也给分.
2. 第(1)问未舍去 $q=1$ 的解,结果保留 2 种情况,若无误,整题扣 4 分.

19. (1)证明:因为 $VA\perp$平面 ABC,$VA\subset$平面 VAB,

所以平面 $VAB\perp$平面 ABC.

又 $AB\perp BC$,平面 $VAB\cap$平面 $ABC=AB$,$BC\subset$平面 ABC,

所以 $BC\perp$平面 VAB.

又 $AM\subset$平面 VAB,所以 $BC\perp AM$.(2 分)

又 $VA=AB$,M 是 VB 的中点,

所以 $AM\perp VB$.(3 分)

又 $VB\cap BC=B$,VB,$BC\subset$平面 VBC,

所以 $AM\perp$平面 VBC.

因为 $AM\subset$平面 AMN,

所以平面 $AMN\perp$平面 VBC.(4 分)

(2)解:以 A 为坐标原点,AB,AV 所在直线分别为 y,z 轴,过点 A 作与 BC 平行的直线为 x 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 $VC/\!/$平面 AMN,$VC\subset$平面 VBC,平面 $AMN\cap$平面 $VBC=MN$,所以 $VC/\!/MN$.

又 M 是 VB 的中点,所以 N 是 BC 的中点,

则 $A(0,0,0)$,$V(0,0,2)$,$M(0,1,1)$,$N\left(\frac{1}{2},2,0\right)$,

所以$\overrightarrow{AM}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{2},2,0\right)$,$\overrightarrow{AV}=(0,0,2)$,(6 分)

则平面 ABC 的一个法向量为$\overrightarrow{AV}=(0,0,2)$.(7 分)

设平面 AMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

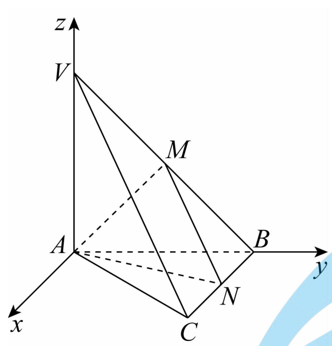
则$\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AN}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}y+z=0,\\ \frac{1}{2}x+2y=0.\end{cases}$

令 $y=1$,得 $x=-4$,$z=-1$,所以平面 AMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(-4,1,-1)$.(9 分)

设平面 AMN 与平面 ABC 的夹角为 θ,

所以 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AV}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AV}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2|}{2\times\sqrt{(-4)^2+1+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$,(11 分)

故平面 AMN 与平面 ABC 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{6}$.(12 分)



【评分细则】

1. 第(1)问若用其它方法证明,酌情给分.
2. 第(2)问也可不用空间向量法求解,只要解答过程无误,给满分.

20. 解:(1)男生人数为 $200\times\frac{3}{5}=120$,女生人数为 $200\times\frac{2}{5}=80$,(1 分)

则 2×2 列联表如下表所示:

性别	满意度		合计
	满意	不满意	
男生	100	20	120
女生	50	30	80
合计	150	50	200

(2 分)

根据列联表中的数据，得$\chi^2=\frac{200\times(100\times30-20\times50)^2}{150\times80\times120\times50}=\frac{100}{9}\approx11.111>10.828$，

所以有99.9%的把握认为“暑期研学旅行”的满意度与性别有关联.(6分)

(2)抽取的男生有$5\times\frac{2}{5}=2$人，女生有$5\times\frac{3}{5}=3$人，(7分)

则X的可能取值为1,2,3，

$P(X=1)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，

$P(X=2)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$，

$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，(10分)

所以X的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

(11分)

故$EX=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$.(12分)

【评分细则】

第(2)问的结果写成1.8也给分.

21.(1)解：由题意知$F(0,2)$，

当l的斜率为-1时，l的方程为$y=-x+2$，(1分)

由$\begin{cases}x^2=8y,\\y=-x+2,\end{cases}$得$y^2-12y+4=0$，

设$H(x_1,y_1)$，$I(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=12$.(3分)

故$|HI|=y_1+y_2+p=16$.(4分)

(2)证明：根据题意知直线l的斜率存在，

设直线l的方程为$y=kx+2$，

联立$\begin{cases}x^2=8y,\\y=kx+2,\end{cases}$得$x^2-8kx-16=0$，

所以$\Delta=(-8k)^2+64>0$，$x_1+x_2=8k$，$x_1x_2=-16$.(5分)

对$y=\frac{1}{8}x^2$求导，得$y'=\frac{1}{4}x$，

由$\begin{cases}y-y_1=\frac{1}{4}x_1(x-x_1),\\y-y_2=\frac{1}{4}x_2(x-x_2),\end{cases}$得$\begin{cases}x=4k,\\y=-2,\end{cases}$

所以$T(4k,-2)$.(8分)

当$k=0$时，$T(0,-2)$.显然$FT\perp HI$；(9分)

当$k\neq0$时，$k_{FT}\cdot k_{HI}=-\frac{1}{k}\cdot k=-1$，

所以$FT\perp HI$，(11分)

综上，$FT\perp HI$.(12分)

【评分细则】

1.第(2)问未考虑$k=0$的情况，扣1分.

2.第(2)问若用其它方法证明，过程结果无误给满分.

22. (1)解:因为$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+ax$,

所以$f'(x)=x^2+x+a=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}$,

所以$f'(x)$在区间$(0,1]$上单调递增,

故$f'(x)_{\max}=f'(1)=a+2$. (1分)

因为$g(x)=xe^{x-1}+x\ln x$,

所以$g'(x)=e^{x-1}+xe^{x-1}+\ln x+1=(x+1)e^{x-1}+\ln x+1$.

令$h(x)=(x+1)e^{x-1}+\ln x+1$,则$h'(x)=(x+2)e^{x-1}+\frac{1}{x}>0$,

故$g'(x)$在区间$(0,1]$上单调递增,

所以$g'(x)_{\max}=g'(1)=3$. (3分)

又对任意的$x_1\in(0,1]$,存在$x_2\in(0,1]$,使$f'(x_1)\leqslant g'(x_2)-2$,

所以$f'(x)_{\max}\leqslant g'(x)_{\max}-2$,(4分)

即$a+2\leqslant 3-2$,解得$a\leqslant -1$,

故实数a的取值范围为$(-\infty,-1]$. (5分)

(2)证明:令$s(x)=e^{x-1}-x,x>0$,则$s'(x)=e^{x-1}-1$.

令$s'(x)=0$,解得$x=1$,则当$x\in(0,1)$时,$s'(x)<0$,$s(x)$单调递减;

当$x\in(1,+\infty)$时,$s'(x)>0$,$s(x)$单调递增,

所以$s(x)\geqslant s(1)=0$,即$e^{x-1}\geqslant x$(当且仅当$x=1$时,等号成立). (7分)

令$F(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$,则$F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$.

令$F'(x)=0$,解得$x=1$,则当$x\in(0,1)$时,$F'(x)<0$,$F(x)$单调递减;

当$x\in(1,+\infty)$时,$F'(x)>0$,$F(x)$单调递增,

所以$F(x)\geqslant F(1)=0$,即$\ln x\geqslant -\frac{1}{x}+1$(当且仅当$x=1$时,等号成立),(9分)

故$e^{x-1}+\ln x\geqslant x-\frac{1}{x}+1$(当且仅当$x=1$时,等号成立). (10分)

又$x>0$,所以$xe^{x-1}+x\ln x\geqslant x^2+x-1$.

因为$a\leqslant -1$,所以$x^2+x-1\geqslant x^2+x+a$,

故$xe^{x-1}+x\ln x\geqslant x^2+x+a$,

即$g(x)\geqslant f'(x)$. (12分)

【评分细则】

1. 第(1)问的结果写成集合形式也给分.

2. 第(2)问若用其它方法证明,酌情给分.