

北师大附属实验中学 2019-2020 学年度第一学期 高二年级数学期中考试试卷

一、选择题：每小题 5 分，共 40 分。

1. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率为 【 】

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{3}{2}$

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_4 = 11, a_n = 20$, 则 n 的值是 【 】

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

3. 设 $a > 0, b > 0$, 若 $a + 2b = 8$, 则 ab 的最大值为 【 】

A. 2

B. 4

C. 8

D. 16

4. 若方程 $x^2 + \frac{y^2}{m-2} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则 m 的取值范围是 【 】

A. $(-\infty, 3)$

B. $(2, 3)$

C. $(2, +\infty)$

D. $(3, +\infty)$

5. 已知 $-1, x, 3x, y$ 中, 前三项依次成等差数列, 后三项依次成等比数列, 则 $y =$ 【 】

A. -5

B. 5

C. -9

D. 9

6. 设实数 x, y 满足 $3 < x < 4, 1 < y < 2$, 则 $2x - y$ 的取值范围是 【 】

A. $(4, 6)$

B. $(4, 7)$

C. $(5, 6)$

D. $(5, 7)$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, a_2=2$, 对任意 $n \geq 3$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$ 有 $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 8$, 则 $a_{1000} =$ 【 】

- A.1
B.2
C.5
D.8

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若当且仅当 $n=10$ 或 11 时, S_n 取得最小值, 则下列选项错误的是

- A. 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 < 0$
B. 数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d > 0$
C. 存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $S_k = S_{k+1}$
D. 存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $S_k = S_{2k}$

二、填空题: 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 不等式 $x^2 - 2x < 3$ 的解集为 _____.

10. 已知各项均不为 0 的等差数列中, $a_5 = 2a_2$, 则 $\frac{a_7}{a_3} =$ _____.

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \left| n - \frac{10}{3} \right|$, 则 a_n 的最小项为 _____; 此时 n 的值为 _____.

12. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_4}{S_2} = 3$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公比为 _____.

13. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过坐标原点作一条斜率 $k \neq 0$ 的直线交椭圆 C 于两点 P, Q , 则四边形 F_1PF_2Q 的周长为 _____.

14. 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = x + \frac{a}{x-5}$ 的值域为集合 S , 若 $2 \notin S$, 则 a 的取值范围是 _____.

三、解答题: 每小题 10 分, 共 30 分.

15. 已知以 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$ 为焦点的椭圆过点 $P(2, 3)$.

- (1) 求椭圆方程;
(2) 设椭圆的左顶点为 A , 线段 AF_1 的垂直平分线 l 交椭圆于 M, N 两点, 求 $\triangle MNP$ 的面积.

16、设函数 $f(x) = x^2 + mx + n$ ，已知不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 4\}$

(1) 求 m 和 n 的值；

(2) 若 $f(x) \geq ax$ 对任意 $x > 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

17、数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ，对任意 $n \geq 2$ 且 $n \in N^+$ 有 $(n-1)a_n = 2na_{n-1}$.

(I) 设 $b_n = \frac{a_n}{n}$ ，证明：数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

四、填空题：每题 5 分，共 25 分.

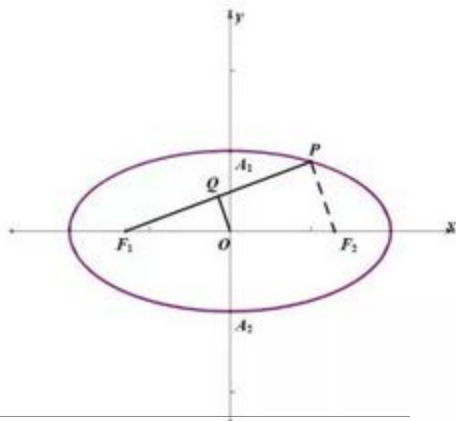
18、设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ，若 $S_3 = 3, S_7 = 63$ ，则 $a_3 =$ _____.

19、一个皮球从距地为 H 的地方释放，经地面反弹最后上升至 $\frac{H}{2}$ 处，之后每次反弹后上升的最高高度为上一次反弹的一半，若该皮球从开始释放至第五次接触地面瞬间，在空中的运动轨迹长为 10 米，则 $H =$ _____ 米.

20、若关于 x 的方程 $x^2 - (m-1)x + 2m-1 = 0$ 的两根分别在区间 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 内，则 m 的取值范围是 _____.

21、如图，椭圆 C 的中心为坐标原点 O ，其左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，上、下顶点分别为 A_1, A_2 ，

已知点 P 在椭圆 C 上，满足 $|PF_1| + |PF_2| = 4$ ，取线段 PF_1 的中点 Q ，若 $|OQ| = 1$ ，则 $|A_1A_2| =$ _____.



- 22、已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = \frac{8}{n}$, $b_n = n + \lambda$, 设 $c_n = \begin{cases} a_n, a_n \leq b_n \\ b_n, a_n > b_n \end{cases}$, 若 $\lambda = -2$, 则数列 $\{c_n\}$ 中的最大项是 _____; 若数列 $\{c_n\}$ 中的最大项 $c_m < 2$, 则 λ 的取值范围是 _____.

五、解答题：共 25 分

- 23、(6 分) 解关于 x 的不等式 $ax^2 - 4x + a < 0$.

- 24、(7 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 对任意 $n \in N^*$, 都有 $a_{n+1} = n^2 + \frac{2a_n}{n} + 1$ 成立.

- (1) 直接写出 a_2, a_3, a_4 的值;
(2) 推测出 $\{a_n\}$ 通项公式并证明.

- 25、(12 分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = 1$, 且 $S_5 - 3a_4 = 4$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

- (2) 设 $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求使不等式 $|T_1 \cdot T_2 \cdots T_n - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2019}$ 成立的最小的正整数 m ;

- (3) 设 $c_n = (a_n - t) \cdot 2^{2n}$, 若数列 $\{c_n\}$ 单调递增.

- ①求 t 的取值范围;

- ②若 t 是符合条件的最小正整数, 那么 $\{c_n\}$ 中是否存在三项 $c_i, c_j, c_k (i < j < k)$ 依次成等差数列? 若存在, 给出 i, j, k 的值; 若不存在, 说明理由.