

北京市西城外国语学校  
2023 届高三年级 12 月月考试题  
科目 数学

班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 成绩\_\_\_\_\_

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。）

1. 设集合  $A = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$ ， $B = \{-1, 0, 3, 4\}$ ，则集合  $A \cap B$  中的元素个数为（ ）

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 若等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 + a_3 = 5$ ，且公比  $q = 2$ ，则  $a_3 + a_5 =$ （ ）

- (A) 10 (B) 13 (C) 20 (D) 25

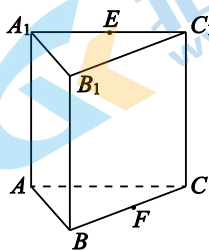
3. 要得到函数  $y = \sin(4x - \frac{\pi}{3})$  的图象，只需将函数  $y = \sin 4x$  的图象（ ）

- (A) 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位 (B) 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位  
(C) 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位 (D) 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位

4. 如图，在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中，点  $E, F$  分别是棱  $A_1C_1, BC$  的中点，则下列结论中

不正确的是（ ）

- (A)  $CC_1 \parallel$  平面  $A_1ABB_1$   
(B)  $AF \parallel$  平面  $A_1B_1C_1$   
(C)  $EF \parallel$  平面  $A_1ABB_1$   
(D)  $AE \parallel$  平面  $B_1BCC_1$



5. 圆心为  $(1, 1)$  且过原点的圆的方程是（ ）

- (A)  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  (B)  $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$   
(C)  $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$  (D)  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

6. 已知抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点  $F$  到准线的距离为 2, 过焦点  $F$  的直线与抛物线交于  $A, B$  两点, 且  $|AF| = 3|FB|$ , 则点  $A$  到  $y$  轴的距离为 ( )

- (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

7. 已知  $\{a_n\}$  是等差数列,  $S_n$  是其前  $n$  项和. 则 “ $a_4 > a_3$ ” 是 “对于任意  $n \in \mathbb{N}^*$  且  $n \neq 3$   $S_n > S_3$ ” 的 ( )

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 已知函数  $f(x) = |2^x - 2|$ . 若  $f(a) = f(b)$  ( $a \neq b$ ), 则  $a + b$  的取值范围是 ( )

- (A)  $(-\infty, 1)$  (B)  $(2, +\infty)$  (C)  $(1, +\infty)$  (D)  $(-\infty, 2)$

9. 声强级  $L_I$  (单位: dB) 由公式  $L_I = 10 \lg(\frac{I}{10^{-12}})$  给出, 其中  $I$  为声强 (单位:  $\text{W}/\text{m}^2$ ).

人在正常说话时, 声强级大约在 40~60 dB 之间, 声强级超过 60 dB 的声音会对人的神经系统造成不同程度的伤害. 给出下列四个声强, 其声强级在 40~60 dB 之间的是 ( )

- (A)  $10^{-11.5}$  (B)  $10^{-9.5}$  (C)  $10^{-6.5}$  (D)  $10^2$

10. 已知函数  $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = \log_a x$ . 若对于  $f(x)$  图象上的任意一点  $P$ , 在  $g(x)$  的图象上总存在一点  $Q$ , 满足  $OP \perp OQ$ , 且  $|OP| = |OQ|$ , 则实数  $a =$  ( )

- (A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C) 2 (D) 4

## 二、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.)

11. 已知直线  $l_1: 2mx - 2y + 1 = 0$  与  $l_2: 4x + (m+1)y + 2 = 0$  垂直, 则  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

12. 已知双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $M(-3, 4)$  则该双曲线的渐近线方程为\_\_\_\_\_,  $||MF_1| - |MF_2|| =$ \_\_\_\_\_.

13. 若  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB}^2 = 4$ , 且  $|\overline{AP}| = 1$ , 则  $|\overline{AB}| =$ \_\_\_\_\_,  $\overline{CP} \cdot \overline{AB}$  的最大值为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x < 1, \\ -(x-1)^2, & x \geq 1. \end{cases}$  若函数  $g(x) = f(x) - k$  有两个不同的零点, 则实数

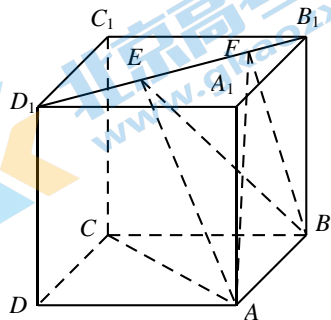
$k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 如图, 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为1, 线段  $B_1D_1$  上有两个动点  $E, F$ , 且

$EF = \frac{1}{2}$ , 给出下列三个结论:

- ①  $AC \perp BE$
- ②  $\triangle AEF$  的面积与  $\triangle BEF$  的面积相等
- ③ 三棱锥  $A-BEF$  的体积为定值

其中, 所有正确结论是\_\_\_\_\_.



三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 2 \sin x \cos x + 1$ .

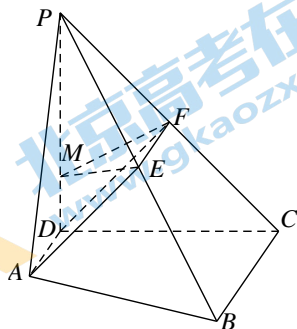
(I) 求函数  $f(x)$  的单调递增区间;

(II) 当  $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  时, 求函数  $f(x)$  的最大值和最小值.

17. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面是直角梯形,  $AD \perp CD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $E$  是  $PB$  的中点,  $PC$  与平面  $ADE$  交于点  $F$ ,  $BC = DC = PD = 2AD = 2$ .

(I) 求证:  $F$  是  $PC$  的中点;

(II) 若  $M$  为棱  $PD$  上一点, 且直线  $PA$  与平面  $EFM$  所成的角的正弦值为  $\frac{4}{5}$ , 求  $\frac{PM}{PD}$  的值.



18. 在  $\triangle ABC$  中,  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ .

(I) 求  $A$ ;

(II) 再从条件 ①、条件 ② 这两个条件中选择一个作为已知, 使  $\triangle ABC$  存在且唯一确定, 求  $BC$  边上高线的长.

条件①:  $C = 3B$ ;

条件②:  $a = 7, \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{5}{3}$ .

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (II) 得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. 2020年9月22日，中国政府在第七十五届联合国大会上提出：“中国将提高国家自主贡献力度，采取更加有力的政策和措施，二氧化碳排放力争于2030年前达到峰值，努力争取2060年前实现碳中和。”做好垃圾分类和回收工作可以有效地减少处理废弃物造成的二氧化碳、甲烷等温室气体的排放，助力碳中和。某校环保社团为了解本校学生是否清楚垃圾分类后的处理方式，随机抽取了200名学生进行调查，样本调查结果如下表：

	高中部		初中部	
	男生	女生	男生	女生
清楚	12	8	24	24
不清楚	28	32	38	34

假设每位学生是否清楚垃圾分类后的处理方式相互独立。

- (I) 从该校学生中随机抽取一人，估计该学生清楚垃圾分类后处理方式的概率；  
 (II) 从样本高中部和初中部的学生中各随机抽取一名学生，以  $X$  表示这 2 人中清楚垃圾分类后处理方式的人数，求  $X$  的分布列和数学期望；  
 (III) 从样本中随机抽取一名男生和一名女生，用 “ $\xi=1$ ” 表示该男生清楚垃圾分类后的处理方式，用 “ $\xi=0$ ” 表示该男生不清楚垃圾分类后的处理方式，用 “ $\eta=1$ ” 表示该女生清楚垃圾分类后的处理方式，用 “ $\eta=0$ ” 表示该女生不清楚垃圾分类后的处理方式。直接写出方差  $D\xi$  和  $D\eta$  的大小关系。（结论不要求证明）

20. 已知椭圆  $W: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且经过点  $C(2, \sqrt{3})$ 。

- (I) 求椭圆  $W$  的方程及其长轴长；  
 (II)  $A, B$  为椭圆  $W$  的左、右顶点，点  $D$  在椭圆  $W$  上，且位于  $x$  轴下方，直线  $CD$  交  $x$  轴于点  $Q$ 。若  $\triangle ACQ$  的面积比  $\triangle BDQ$  的面积大  $2\sqrt{3}$ ，求点  $D$  的坐标。

21. 已知函数  $f(x) = x^2 - 1$ ，函数  $g(x) = a \ln x$ ，其中  $a \leq 2$ 。

- (I) 如果曲线  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  在  $x = 1$  处具有公共的切线，求  $a$  的值及切线方程；  
 (II) 如果曲线  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  有且仅有一个公共点，求  $a$  的取值范围。

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjkzx

官方网站: [www.gaokzx.com](http://www.gaokzx.com)

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjkzx\)](https://www.gkaozx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。