2021 年重庆市高中联赛预赛试题及详解

考试时间：80 分钟

一．填空题（本题满分 64 分，每小题 8 分）

1．设正实数 a,b,c 满足 $abc=10^{11}$，且 $\lg a\cdot\lg(bc)+\lg b\cdot\lg(ca)+\lg c\cdot\lg(ab)=40$，则 $\sqrt{\lg^2 a+\lg^2 b+\lg^2 c}=$ ________.

【答案】9

【解析】令 $x=\lg a, y=\lg b, z=\lg c$，则 $x+y+z=11$，$2(xy+yz+zx)=40$，从而

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{11^2-40}=\sqrt{81}=9$.

2. 已知函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x^2$，则不等式 $f(f(x))+f(x-1)<0$ 的解集为 ________.

【答案】$\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

【解析】由函数 $f(x)$ 为奇函数，不等式等价于 $f(f(x))<f(1-x)$，由于单调递增，所以 $f(x)<1-x$，

当 $x\geq 0$，$x^2<1-x$，解得 $0\leq x<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$；当 $x<0$，$-x^2<1-x$ 恒成立．综上 $x\in\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

3．已知 $f(x)=2mx^2-2mx-8x+9$，$g(x)=mx-m$，对任意 $x\in R$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 至少有一个为正数，则实数 m 的取值范围是________.

【答案】$(0,8)$

【解析】易知 $m>0$，所以当 $x>1$ 时，$g(x)>0$ 恒成立，

只需要当 $x\le 1$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，即 $2mx^2-2mx-8x+9>0$.

（1）$\Delta=(2m+8)^2-72m<0$，解得 $2<m<8$；

（2）$f(1)=1>0$，且 $\dfrac{2m+8}{4m}\ge 1$，解得 $0<m\le 4$.

综上 m 的取值范围为 $(0,8)$.

4．过抛物线 $E:y^2=2x$ 的焦点 F 作两条斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$ 的直线 l_1，l_2，其中 l_1 交 E 于 A,C 两点，l_2 交 E 于 B,D 两点，则 $|AC|+2|BD|$ 的最小值为________.

【答案】$8\sqrt{2}+6$

【解析】设直线的倾斜角分别为α,β，则$\tan\alpha\tan\beta=-\dfrac{1}{2}$，从而$|AC|+2|BD|=$

$$\frac{2}{\sin^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\beta}=\frac{2}{\tan^2\alpha}+\frac{4}{\tan^2\beta}+6\geq 2\sqrt{\frac{8}{\tan^2\alpha\tan^2\beta}}+6=8\sqrt{2}+6,$$

当且仅当$|\tan\beta|=\sqrt{2}|\tan\alpha|$时取"$=$".

5．已知复数z_1，z_2满足$|z_1|=|z_1-2z_2|$，$z_1\overline{z_2}=\sqrt{3}(1-\mathrm{i})$，$\mathrm{i}$为虚数单位，则$\dfrac{z_1}{z_2}=$________.

【答案】$1-\mathrm{i}$

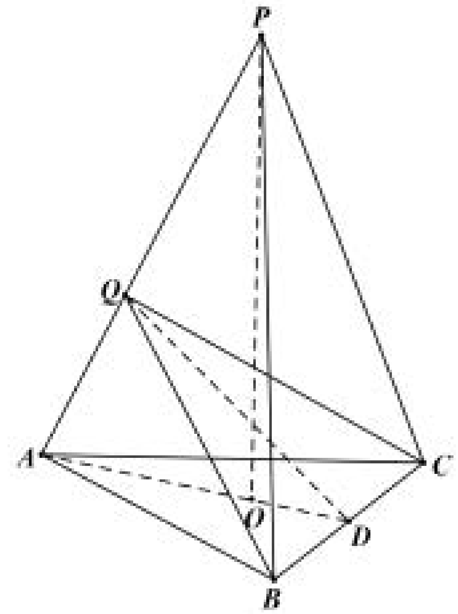
【解析】由$|z_1|=|z_1-2z_2|$知$|z_1|^2=|z_1|^2+4|z_2|^2-2(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$，则

$$z_2\overline{z_2}=\frac{1}{2}(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)=\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=\sqrt{3}.$$

所以$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=1-\mathrm{i}$.

6. 设正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为1，高为 $\sqrt{2}$，过底边 BC 作此三棱锥的截面，则截面面积的最小值为________.

【答案】$\dfrac{3\sqrt{14}}{28}$



【解析】如图，设截面与边 PA 交于点 Q，点 P 在底面的射影为点 O，延长 AO 交 BC 于点 D，则 $BC\perp QD$，由于 BC 的长为定值，当截面 QBC 的面积最小时，线段 QD 的长度最小，此时 $QD\perp PA$.

由于 $OA=\dfrac{\sqrt{3}}{3},PO=\sqrt{2}$，则 $PA=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$，从而 $\sin\angle PAO=\dfrac{PO}{PA}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

则 $QD=AD\sin\angle PAO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{42}}{7}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}QD\cdot BC=\dfrac{3\sqrt{14}}{28}$.

7. 已知点 H 是 ΔABC 的垂心，且满足 $\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+6\overrightarrow{HC}=\mathbf{0}$，则角 $B=$________.

【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

【解析】由于点 H 是 ΔABC 的垂心，则

$\tan A\cdot\overrightarrow{HA}+\tan B\cdot\overrightarrow{HB}+\tan C\cdot\overrightarrow{HC}=\vec{0}$，所以 $\tan A=\dfrac{\tan B}{2}=\dfrac{\tan C}{6}$.

又 $\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$，所以 $\tan B=\sqrt{3}$，即 $B=\frac{\pi}{3}$.

8. 已知 $x_i \in \{-1,1\}$，$i=1,2,\cdots,2021$，并且 $x_1+x_2+\cdots+x_k \geq 0$ $(k=1,2,\cdots,2020)$，$x_1+x_2+\cdots+x_{2021}=-1$.则有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_{2021})$ 的组数为________.

【答案】$\frac{1}{1011}C_{2020}^{1010}$.

【解析】由 $x_1+x_2+\cdots+x_{2020} \geq 0$， $x_1+x_2+\cdots+x_{2021}=-1$， $x_{2021} \in \{-1,1\}$， 所以 $x_{2021}=-1$,

$x_1+x_2+\cdots+x_{2020}=0$.

所以在 $x_1,x_2,\cdots,x_{2020}$ 中有 1010 个 1、1010 个-1，且随时保证 $x_1+x_2+\cdots+x_k \geq 0$ $(k=1,2,\cdots,2020)$.

即为卡特兰数 $\frac{1}{1011}C_{2020}^{1010}$.

二．解答题（本题满分 56 分）

9．（本小题满分 16 分）

数列$\{a_n\}$的相邻两项a_n和a_{n+1}为二次方程$x^2-3nx+c_n=0(n=1,2,3,\cdots)$的两个根，当$a_1=1$时，求$c_n$．

【解析】由韦达定理，知：$a_n+a_{n+1}=3n, c_n=a_na_{n+1}$．由$a_1=1$，知$a_2=2$． ……4 分

再多写一项，有$a_{n+1}+a_{n+2}=3n+3$，于是$a_{n+2}=a_n+3$，形成隔项等差数列． ……8 分

所以$\begin{cases}a_{2n-1}=3n-2\\a_{2n}=3n-1\end{cases}$． ……12 分

于是，所求c_n的通项为$\begin{cases}c_{2n-1}=a_{2n-1}a_{2n}=9n^2-9n+2\\c_{2n}=a_{2n}a_{2n+1}=9n^2-1\end{cases}$． ……16 分

10. （本小题满分 20 分）

设自然数 $n\geq 3$，实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n^2$，求 $\sum_{i=1}^{n}x_i^3$ 最小值及取最小值时的 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

【解析】由柯西不等式

$$(n-1)\left(x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2\right)\geq\left(x_2+x_3+\cdots+x_n\right)^2$$ ……5 分

化简得

$$(n-1)\left(n^2-x_1^2\right)\geq\left(n-x_1\right)^2$$

解得

$$2-n\leq x_1\leq n$$ ……10 分

构造局部不等式

$$(x_1+n-2)(x_1-2)^2\geq 0$$

展开得

$$x_1^3\geq(6-n)x_1^2+(4n-12)x_1+8-4n$$

同理有其它 $n-1$ 式，相加得

$$S=x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3\geq(6-n)n^2+(4n-12)n+n(8-4n)=-n^3+6n^2-4n$$ ……15 分

要使 S 取最小值，$x_i=2-n$ 或 2，$i=1,2,\cdots,n$.

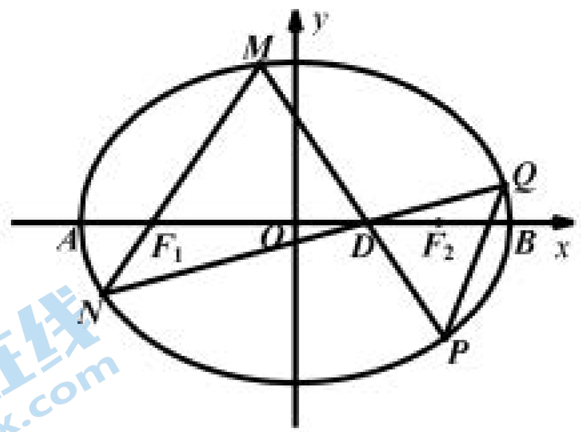
若全为 2，其和为 $2n$，不符合题意；

若有两个以上为 $2-n$，其和小于 n，不符合题意；

当有且只有一个为 $2-n$，即 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(2-n,2,\cdots,2)$ 及其置换时，S 取得最小值. ……20 分

11.（本小题满分 20 分）

如图，在平面直角坐标系，已知 F_1，F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点．设点 $D(1,0)$ 为线段 OF_2 的中点，直线 MN（不与 x 轴重合）过点 F_1 且与椭圆 C 交于 M，N 两点，延长 MD，ND 与椭圆 C 交于 P，Q 两点，设直线 MN，PQ 的斜率存在且分别为 k_1，k_2．请将 $\dfrac{k_2}{k_1}$ 表示成关于 a 的函数，即 $f(a)=\dfrac{k_2}{k_1}$，求 $f(a)$ 的值域．



【解析】设点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),P(x_P,y_P),Q(x_Q,y_Q),F_1(-2,0),F_2(2,0)$

则 $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$

由于 M,N,F_1 三点共线，则 $\dfrac{y_1}{x_1+2}=\dfrac{y_2}{x_2+2}\Rightarrow x_1y_2-x_2y_1=2(y_1-y_2)$，　　　　……5 分

直线 MD 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1)$，

联立椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的方程可得 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}\dfrac{(x-1)^2}{(x_1-1)^2}=1$，化简有：

$$\left(a^2+1-2x_1\right)x^2-2\left(a^2-x_1^2\right)x+2a^2x_1-\left(a^2+1\right)x_1^2=0$$

由韦达定理可知：$x_1 x_P=\dfrac{2a^2x_1-\left(a^2+1\right)x_1^2}{a^2+1-2x_1}\Rightarrow x_P=\dfrac{2a^2-\left(a^2+1\right)x_1}{a^2+1-2x_1}$ ……10 分

$$\Rightarrow y_P=\frac{y_1}{x_1-1}\left(\frac{2a^2-(a^2+1)x_1}{a^2+1-2x_1}-1\right)=\frac{(1-a^2)y_1}{a^2+1-2x_1}$$

同理 $x_Q=\dfrac{2a^2-(a^2+1)x_2}{a^2+1-2x_2}, y_Q=\dfrac{(1-a^2)y_2}{a^2+1-2x_2}$

$$k_2=\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\frac{y_1(1-a^2)(a^2+1-2x_2)-y_2(1-a^2)(a^2+1-2x_1)}{(a^2+1-2x_2)(2a^2-(a^2+1)x_1)-(a^2+1-2x_1)(2a^2-(a^2+1)x_2)}$$

$$=\frac{(a^4-1)(y_2-y_1)-2(a^2-1)(x_1y_2-x_2y_1)}{(a^2-1)^2(x_2-x_1)}=\frac{a^2+5}{a^2-1}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{a^2+5}{a^2-1}k_1$$

从而 $f(a)=\dfrac{k_2}{k_1}=\dfrac{a^2+5}{a^2-1}$. ……15 分

由于 $a^2\in(4,+\infty)$，则 $f(a)\in(1,3)$.

综上： $f(a)=\dfrac{a^2+5}{a^2-1}$，且值域为 $(1,3)$. ……20 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。