2023 北京首都师大附中高三 10 月月考

数　　学

2023.10

第 I 卷（共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题所列出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的）

1．已知集合 $M=\{x|x\le a\}$ ，$N=\{x|-2<x<0\}$ ，若 $M\cap N=\varnothing$，则 a 的取值范围为

A．$a>0$　　B．$a\le -2$　　C．$a\ge 0$　　D．$a<-2$

2．与圆 $x^2+(y-1)^2=5$ 相切于点 $(2,2)$ 的直线的斜率为

A．-2　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．2

3．已知 $a=e^{\frac{1}{2}},b=\ln\dfrac{1}{2},c=\sin\dfrac{1}{2}$，则

A．$a>b>c$　　B．$b>c>a$　　C．$c>a>b$　　D．$a>c>b$

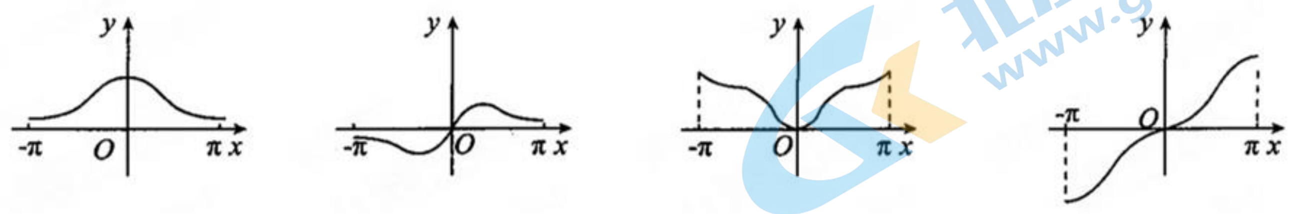
4．已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递减，$f(1)=-1$．设 $g(x)=\log_2(x+3)$，则满足 $f(x)\geqslant g(x)$ 的 x 的取值范围是

A．$(-\infty,-1]$　　B．$[-1,+\infty)$　　C．$(-3,-1]$　　D．$(-3,1]$

5．已知点 P 是边长为 2 的正三角形 ABC 的内部（不包括边界）的一个点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围为

A．$(0,2)$　　B．$(1,2)$　　C．$(0,4)$　　D．$(2,4)$

6．已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}$（$e$ 为自然对数的底数），当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时，$y=f(x)$ 的图象大致是



A．　　　　B．　　　　C．　　　　D．

7．在 ΔABC 中，内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，则“$a\cos A=b\cos B$”是“ΔABC 是以 A、B 为底角的等腰三角形”的

A．充分非必要条件　B．必要非充分条件

C．充要条件 D．既非充分也非必要条件

8．设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .若 $-a_1<a_2<a_1$，则

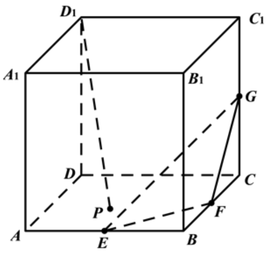
A．$\{S_n\}$ 为递减数列　　　　B．$\{S_n\}$ 为递增数列

C．数列$\{S_n\}$有最大项　　　　　　　　　D．数列$\{S_n\}$有最小项

9．如图，在棱长为 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E,F,G分别是棱AB,BC,CC_1的中点，P是底面$ABCD$内一动点，若直线D_1P与平面EFG不存在公共点，则三角形PBB_1的面积的最小值为

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　B．1　C．$\sqrt{2}$　D．2

10．斐波那契数列又称为黄金分割数列，在现代物理、化学等领域都有应用．斐波那契数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ (n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*)$．给出下列四个结论：



① 存在$m\in\mathbf{N}^*$，使得a_m，a_{m+1}，a_{m+2}成等差数列；

② 存在$m\in\mathbf{N}^*$，使得a_m，a_{m+1}，a_{m+2}成等比数列；

③ 存在常数t，使得对任意$n\in\mathbf{N}^*$，都有a_n，ta_{n+2}，a_{n+4}成等差数列；

④ 存在正整数$i_1,i_2,\cdots,i_m$，且$i_1<i_2<\cdots<i_m$，使得$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_m}=2023$．

其中所有正确的个数是

A．1 个　B．2 个　C．3 个　D．4 个

第 II 卷（共 110 分）

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11．已知直线$ax+2y+3a=0$和直线$3x+(a-1)y=a-7$平行，则a的值为_____________．

12．已知向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为60°，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，则$|\vec{a}+2\vec{b}|=$_____________．

13．设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.若$-S_1$、S_2、a_3成等差数列，则数列$\{a_n\}$的公比为_____________．

14．已知函数$f(x)=\sin x$，若对任意$x\in\mathbf{R}$都有$f(x)+f(x+m)=c$（c为常数），则常数m的一个取值为_____________．

15．已知函数$f(x)=\lambda\sin(\frac{\pi}{2}x+\varphi)\ (\lambda>0,0<\varphi<\pi)$的部分图象如图 1 所示，$A,B$分别为图象的最高点和最低点，过$A$作$x$轴的垂线，交$x$轴于点$A'$,点$C$为该部分图象与$x$轴的交点．将绘有该图象的纸片沿$x$轴折成直二面角，如图 2 所示，此时$|AB|=\sqrt{10}$，则$\lambda=$_____________．

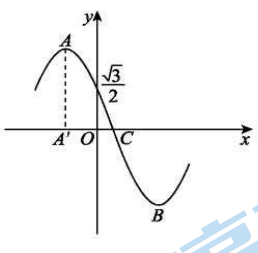


图 1

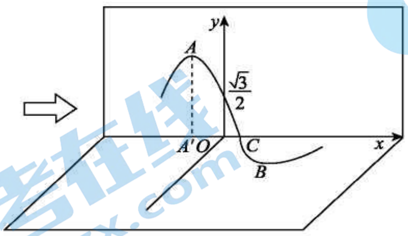


图 2

给出下列四个结论，其中所有正确结论的序号是_____________．

①$\varphi=\frac{\pi}{3}$；

②图 2 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5$；

③图 2 中，过线段 AB 的中点且与 AB 垂直的平面与 x 轴交于点 C；

④图 2 中，S 是△ $A'BC$ 及其内部的点构成的集合.设集合 $T=\{Q\in S\,||AQ|\le 2\}$，则 T 表示的区域的面积大于 $\frac{\pi}{4}$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分． 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16．(本小题 13 分)

已知函数 $f(x)=e^x-\cos x$.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（II）设 $g(x)=xf'(x)-f(x)$，证明：$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

17．(本小题 13 分)

设 $f(x)=2\sin x\sin(\frac{\pi}{3}-x)$.

（I）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（II）比较 $f(\frac{\pi}{15})$ 和 $f(-\frac{16\pi}{17})$ 的大小，并说明理由；

（III）已知 $f(x)$ 在$[0,\alpha]$上有极值，求实数α的取值范围.

18．(本小题 14 分)

在△ ABC 中，$b\sin A-a\cos\frac{B}{2}=0$.

（I）求 $\angle B$；

（II）若 $b=3$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使△ ABC 存在且唯一确定，求 a 及△ ABC 的面积.

条件 ①：$c=\sqrt{10}$；

条件 ②：$\sin A+\sin C=2\sin B$；

条件 ③：$ac=10$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（II）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

19．(本小题 15 分)

已知点 $(1,\dfrac{3}{2})$ 在椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 上，且 E 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$．

（I）求 E 的方程；

（II）设 F 为椭圆 E 的右焦点，点 $P(m,n)$ 是 E 上的任意一点，直线 PF 与直线 $3mx+4ny=0$ 相交于点 Q，求 $|PQ|$ 的值．

20．(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$．

（I）求证： $f(x)<x$；

（II）若函数 $g(x)=f(x)+a(x^2-x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上无零点，求 a 的取值范围．

21．（本小题 15 分）

给定正整数 $n\geqslant 2$，设集合 $M=\{\alpha|\alpha=(t_1,t_2,\cdots,t_n),t_k\in\{0,1\},k=1,2,\cdots,n\}$．对于集合 M 中的任意元素 $\beta=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\gamma=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，记 $\beta\cdot\gamma=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$．

设 $A\subseteq M$，且集合 $A=\{\alpha_i|\alpha_i=(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{in}),i=1,2,\cdots,n\}$，对于 A 中任意元素 α_i,α_j，若 $\alpha_i\cdot\alpha_j=\begin{cases}p, & i=j,\\ 1, & i\neq j,\end{cases}$ 则称 A 具有性质 $T(n,p)$．

（I）判断集合 $A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ 是否具有性质 $T(3,2)$？说明理由；

（II）判断是否存在具有性质 $T(4,p)$ 的集合 A，并加以证明；

（III）若集合 A 具有性质 $T(n,p)$，证明：$t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj}=p\ (j=1,2,\cdots,n)$．

参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	D	C	C	B	B	D	C	C

二、填空题:

11、【答案】3

12.【答案】$2\sqrt{3}$

13. 【答案】(3 或-1)

14. 【答案】(2k+1)π

15. 【答案】$\sqrt{3}$ ②③)

三、解答题:

16. 解:(Ⅰ)$f'(x)=e^x+\sin x$. ………2 分

所以 $f(0)=0$,$f'(0)=1$. ………4 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$. ………6 分

(Ⅱ)由题设,$g(x)=x(e^x+\sin x)-(e^x-\cos x)$

$=(x-1)e^x+x\sin x+\cos x$. ………7 分

所以 $g'(x)=x(e^x+\cos x)$. ………9 分

当 $x>0$ 时,因为 $e^x+\cos x>e^0+\cos x=1+\cos x\geqslant 0$,

所以 $g'(x)>0$. ………11 分

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………13 分

17. 解析:

(I) $f(x)=2\sin x(\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x)=\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin^2 x$

$=\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\cos 2x}{2}=\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2x\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$ ……6 分

$f(x)$ 的周期为 π

……7 分

(Ⅱ)$f\left(\frac{\pi}{15}\right)>f(-\frac{16}{17}\pi)$

(Ⅲ)$(\frac{\pi}{6},+\infty)$

18. 解:(Ⅰ)由正弦定理得 $b\sin A=a\sin B$,由题设得 $a\sin B-a\cos\frac{B}{2}=0$,

$2a\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}-a\cos\frac{B}{2}=0$,

因为 $0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}$,所以 $a\cos\frac{B}{2}\neq 0$.

所以 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$.

$\frac{B}{2}=\frac{\pi}{6}$，$B=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）选条件②： $\sin A+\sin C=2\sin B$.

因为$b=3, B=\frac{\pi}{3}$， $\sin A+\sin C=2\sin B$.

由正弦定理得$a+c=2b=6$，由余弦定理得$9=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac$，

解得$ac=9$.

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

由$\begin{cases}ac=9,\\a+c=6,\end{cases}$解得$a=3$.

19.解：（Ⅰ）由题意得$\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1,\\\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=\sqrt{3},\\c=1.\end{cases}$

所以椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………5分

（Ⅱ）因为点$P(m,n)$是椭圆E上的任意一点，所以$3m^2+4n^2=12$.

①当$m=1$时，点$P(1,\frac{3}{2})$或$P(1,-\frac{3}{2})$.

当点P为$(1,\frac{3}{2})$时，直线PF与直线$x+2y=0$相交于点$Q(1,-\frac{1}{2})$. 此时$|PQ|=2$.

当点P为$(1,-\frac{3}{2})$时，直线PF与直线$x-2y=0$相交于点$Q(1,\frac{1}{2})$. 此时$|PQ|=2$.

②当$m\neq 1$时，直线PF的方程为$y=\frac{n}{m-1}(x-1)$.

由$\begin{cases}y=\frac{n}{m-1}(x-1),\\3mx+4ny=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{4n^2}{12-3m},\\y=\frac{-mn}{4-m}.\end{cases}$所以点$Q(\frac{4n^2}{12-3m},\frac{-mn}{4-m})$.

所以$|PQ|^2=(m-\frac{4n^2}{12-3m})^2+(n-\frac{-mn}{4-m})^2=(\frac{12m-3m^2-4n^2}{12-3m})^2+(\frac{4n-mn+mn}{4-m})^2$

$=(\frac{4m-4}{4-m})^2+(\frac{4n}{4-m})^2=\frac{(4m-4)^2+16n^2}{(4-m)^2}$

$=\frac{(4m-4)^2+4(12-3m^2)}{(4-m)^2}=\frac{4(m^2-8m+16)}{(4-m)^2}=\frac{4(m-4)^2}{(4-m)^2}=4$.

所以$|PQ|=2$.

综上，$|PQ|=2$. ………15分

20.解：对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}$.

因为 $x>0$，所以 $\sqrt{x}>0$.

由此可知，要证 $\sqrt{x}\ln x<x$，只需证 $\ln x<\sqrt{x}$，即证 $\ln x-\sqrt{x}<0$.

令 $h(x)=\ln x-\sqrt{x}$，

求导得 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$.

令 $h'(x)=0$, 解得 $x=4$.

可知 $x,h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,4)$	4	$(4,+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	极大值	↘

所以 $h(x)\le h(4)=\ln 4-2<0$.

所以 $\ln x-\sqrt{x}<0$ 恒成立.

即原不等式成立.

（Ⅱ） $g(x)=\sqrt{x}\ln x+a(x^2-x)$，

因为 $x>1$，所以 $\sqrt{x}\ln x>0, x^2-x>0$.

所以当 $a\ge 0$ 时， $g(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，符合题意.

当 $a<0$ 时， $g'(x)=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}+a(2x-1)$.

令 $t(x)=g'(x)$，

则 $t'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}+2a=-\frac{\ln x}{4x\sqrt{x}}+2a<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

所以 $t(x)=g'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

$g'(1)=1+a$.

①当 $g'(1)=1+a\le 0$ 即 $a\le -1$ 时， $g'(x)<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $g(x)<g(1)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，符合题意.

②当 $g'(1)=1+a>0$ 即 $-1<a<0$ 时，

因为 $x>1$ 且由（Ⅱ）知 $\ln x<\sqrt{x}$，

所以 $g'(x)=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}+a(2x-1)<\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+a(2x-1)<\frac{1}{2}+1+a(2x-1)$.

所以 $g'(1-\frac{1}{a})<a-\frac{1}{2}<0$，

所以存在 $x_0\in(1,1-\frac{1}{a})$ 使得 $g'(x_0)=0$，

因此 $x,g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(1,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以 $g(x_0)>g(1)=0$.

由（Ⅱ）中 $\sqrt{x}\ln x<x$，

可以得 $g(x)=\sqrt{x}\ln x+a(x^2-x)<x+a(x^2-x)=x(ax+1-a)$.

令 $x=1-\frac{1}{a}$，得 $g(1-\frac{1}{a})<0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上存在零点，不合题意，舍去.

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$.

（21）**解**：（Ⅰ）因为 $(1,1,0)\cdot(1,1,0)=1\times1+1\times1+0\times0=2$，同理 $(1,0,1)\cdot(1,0,1)=(0,1,1)\cdot(0,1,1)=2$.

又 $(1,1,0)\cdot(1,0,1)=1\times1+1\times0+0\times1=1$，同理 $(1,1,0)\cdot(0,1,1)=(1,0,1)\cdot(0,1,1)=1$.

所以集合 $A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ 具有性质 $T(3,2)$.　　　　………4 分

（Ⅱ）当 $n=4$ 时，集合 A 中的元素个数为 4．由题设 $p\in\{0,1,2,3,4\}$.　　………5 分

假设集合 A 具有性质 $T(4,p)$，则

①当 $p=0$ 时，$A=\{(0,0,0,0)\}$，矛盾.

②当 $p=1$ 时，$A=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$，不具有性质 $T(4,1)$，矛盾.

③当 $p=2$ 时，$A\subseteq\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$.

因为 $(1,1,0,0)$ 和 $(0,0,1,1)$ 至多一个在 A 中；$(1,0,1,0)$ 和 $(0,1,0,1)$ 至多一个在 A 中；

$(1,0,0,1)$ 和 $(0,1,1,0)$ 至多一个在 A 中，故集合 A 中的元素个数小于 4，矛盾.

④当 $p=3$ 时，$A=\{(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1)\}$，不具有性质 $T(4,3)$，矛盾.

⑤当 $p=4$ 时，$A=\{(1,1,1,1)\}$，矛盾.

综上，不存在具有性质 $T(4,p)$ 的集合 A.　　　　………9 分

（Ⅲ）记 $c_j=t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj}$ $(j=1,2,\cdots,n)$，则 $c_1+c_2+\cdots+c_n=np$.

若 $p=0$，则 $A=\{(0,0,\cdots,0)\}$，矛盾．若 $p=1$，则 $A=\{(1,0,0,\cdots,0)\}$，矛盾．故 $p\geqslant2$.

假设存在 j 使得 $c_j\geqslant p+1$，不妨设 $j=1$，即 $c_1\geqslant p+1$.

当 $c_1=n$ 时，有 $c_j=0$ 或 $c_j=1$ $(j=2,3,\cdots,n)$ 成立.

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中分量为1的个数至多有 $n+(n-1)=2n-1<2n\leqslant np$．…11 分

当 $p+1\leqslant c_1<n$ 时，不妨设 $t_{11}=t_{21}=\cdots=t_{p+1,1}=1,t_{n1}=0$.

因为$\alpha_n \cdot \alpha_n = p$，所以$\alpha_n$的各分量有$p$个1，不妨设$t_{n2} = t_{n3} = \cdots = t_{n,p+1} = 1$.

由$i \neq j$时，$\alpha_i \cdot \alpha_j = 1$可知，$\forall q \in \{2,3,\cdots,p+1\}$，$t_{1q},t_{2q},\cdots,t_{p+1,q}$中至多有1个1，

即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{p+1}$的前$p+1$个分量中，至多含有$p+1+p=2p+1$个1.

又$\alpha_i \cdot \alpha_n = 1\ (i=1,2,\cdots,p+1)$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{p+1}$的前$p+1$个分量中，含有

$(p+1)+(p+1)=2p+2$个1，矛盾.

所以$c_j \leqslant p\ (j=1,2,\cdots,n)$. ………14分

因为$c_1+c_2+\cdots+c_n = np$，

所以$c_j = p\ (j=1,2,\cdots,n)$.

所以$t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj} = p\ (j=1,2,\cdots,n)$. ………15分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！