秘密★启用前　秘密★启用后6个月　　　　　　　　　　　　　　　　　　不得翻印，阅后收回

2020年普通高考（天津卷）适应性测试

数学评分参考

评分说明：

1. 本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则。
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。
4. 只给整数分数。

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分45分．

（1）B　　（2）A　　（3）A　　（4）B　　（5）C

（6）C　　（7）B　　（8）D　　（9）D

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分30分．（试题中包含两个空的，答对1个的给3分，全部答对的给5分）

（10）$\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$　　（11）4　　（12）-8

（13）$\frac{4}{9}$；2　　（14）4　　（15）1；$-\frac{1}{16}$

三．解答题

（16）满分14分．

（Ⅰ）解：在$\triangle ABC$中，由$3(a-c)^2=3b^2-2ac$，整理得$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2}{3}$．又由余弦定理，可得$\cos B=\frac{2}{3}$．　　　　4分

（Ⅱ）（ⅰ）解：由（Ⅰ）可得$\sin B=\frac{\sqrt{5}}{3}$，又由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$及已知$5a=3b$，可得$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{5}$．　　　　8分

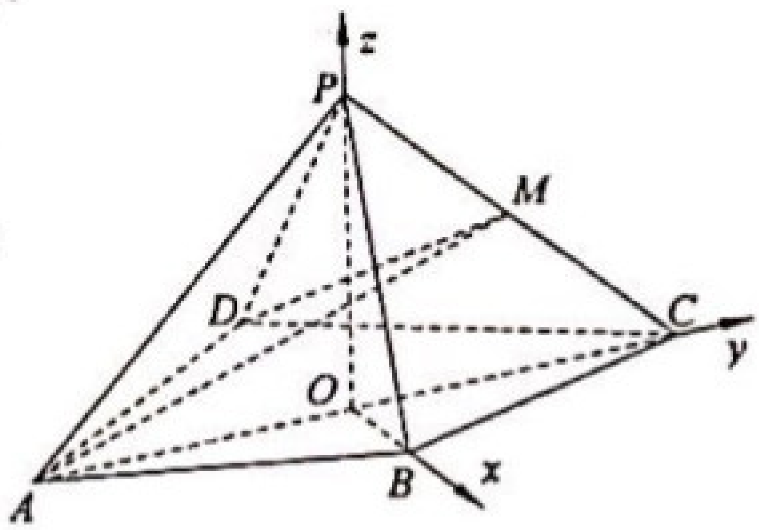
（ⅱ）解：由（ⅰ）可得$\cos 2A=1-2\sin^2 A=\frac{3}{5}$．由已知$5a=3b$可得$a<b$，故有$A<B$，所以$A$为锐角．故由$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，可得$\cos A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，从而有$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{4}{5}$

所以，$\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2A\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2A\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$．　　14 分

（17）满分 15 分．

依题意，可以建立以 O 为原点，分别以向量 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OP}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴正方向的空间直角坐标系（如图），可得 $O(0,0,0)$，$A(0,-2,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(-2,0,0)$，$P(0,0,2)$，$M(0,1,1)$．

（Ⅰ）解：依题意可得 $\overrightarrow{AD}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AM}=(0,3,1)$．



设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 ADM 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-2x+2y=0,\\ 3y+z=0,\end{cases}$ 不妨令 $y=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,1,-3)$．

又 $\overrightarrow{PB}=(1,0,-2)$，故

$$\cos\langle\overrightarrow{PB},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PB}||\boldsymbol{n}|}=\frac{7\sqrt{55}}{55}$$

所以，直线 PB 与平面 ADM 所成角的正弦值为 $\frac{7\sqrt{55}}{55}$．　　7 分

（Ⅱ）解：由已知，可得 $OB\perp$ 平面 AMC，故 $\overrightarrow{OB}$ 是平面 AMC 的一个法向量．依题意可得 $\overrightarrow{OB}=(1,0,0)$．

因此有 $\cos\langle\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OB}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{11}}{11}$，于是有 $\sin\langle\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\sqrt{110}}{11}$．

所以，二面角 $D-AM-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{110}}{11}$．

（Ⅲ）解：设线段 OQ 的长为 h（$0\leqslant h\leqslant 2$），则点 Q 的坐标为 $(0,0,h)$. 由已知可得点 N 的坐标为 $(-1,0,1)$，进而可得 $\overrightarrow{NQ}=(1,0,h-1)$. 由 NQ // 平面 ADM，故 $\overrightarrow{NQ}\perp \boldsymbol{n}$，所以 $\overrightarrow{NQ}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即 $1-3(h-1)=0$，解得 $h=\dfrac{4}{3}\in[0,2]$.

所以，线段 OQ 的长为 $\dfrac{4}{3}$. 15 分

（18）满分 15 分.

（Ⅰ）解：设椭圆的焦距为 $2c$，由已知有 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{2}{3}$，又由 $a^2=b^2+c^2$，可得 $a^2=3b^2$. 由点 $T\left(2\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 在椭圆上，有 $\dfrac{8}{a^2}+\dfrac{1}{3b^2}=1$，由此可得 $a^2=9$，$b^2=3$.

所以，椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$. 5 分

（Ⅱ）解：设点 A 的坐标为 (x_1,y_1)，点 B 的坐标为 (x_2,y_2).

由方程组 $\begin{cases} y=\sqrt{2}x+m, \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 消去 y，整理可得

$$7x^2+6\sqrt{2}mx+3m^2-9=0. \quad ①$$

由求根公式可得

$$x_1+x_2=-\frac{6\sqrt{2}m}{7},\quad x_1x_2=\frac{3m^2-9}{7}. \quad ②$$

由点 P 的坐标为 $(2\sqrt{2},0)$ 可得 $\overrightarrow{PA}=(x_1-2\sqrt{2},y_1)$，$\overrightarrow{PB}=(x_2-2\sqrt{2},y_2)$，故

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x_1-2\sqrt{2})(x_2-2\sqrt{2})+y_1y_2=x_1x_2-2\sqrt{2}(x_1+x_2)+8+y_1y_2. \quad ③$$

又因为 $y_1=\sqrt{2}x_1+m$，$y_2=\sqrt{2}x_2+m$，所以 $y_1y_2=2x_1x_2+\sqrt{2}m(x_1+x_2)+m^2$，代入上式，可得

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=3x_1x_2+(\sqrt{2}m-2\sqrt{2})(x_1+x_2)+m^2+8.$$

由已知 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-1$ 以及②，可得

$$\frac{3\left(3m^2-9\right)}{7}+\frac{\left(\sqrt{2}m-2\sqrt{2}\right)\left(-6\sqrt{2}m\right)}{7}+m^2+8=-1,$$

整理得 $m^2+6m+9=0$，解得 $m=-3$.

这时，①的判别式 $\Delta=-12m^2+252=144>0$，故 $m=-3$ 满足题目条件.

所以 $m=-3$. 15 分

（19）满分 15 分.

（Ⅰ）解：设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则 $d=1$. 由 $a_3+a_4=a_7$ 可得 $a_1=d=1$. 由 $b_2\cdot b_4=b_5$ 可得 $b_1^2\cdot q^4=b_1\cdot q^4$，又因为 $b_1\neq 0$，$q\neq 0$，故可得 $b_1=1$. 再由 $a_4=4b_2-b_3$ 可得 $q^2-4q+4=0$，解得 $q=2$.

所以 $a_n=n$，$b_n=2^{n-1}$（$n\in\mathbf{N}^*$）. 5 分

（Ⅱ）解：$c_n=\begin{cases}2^{2m-2}, & n=3m-2,\\ 2^{2m-1}, & n=3m-1,\\ m, & n=3m.\end{cases}$ 其中 $m\in\mathbf{N}^*$. 所以

$$t_n=2^{2n-2}\cdot 2^{2n-1}+2^{2n-1}\cdot n+n\cdot 2^{2n}=2^{4n-3}+3n\cdot 2^{2n-1}.$$

记 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}t_k$，$A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}2^{4k-3}$，$B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot 2^{2k-1}$，则

$$A_n=\frac{2\times\left(1-2^{4n}\right)}{1-2^4}=\frac{2\left(16^n-1\right)}{15}=\frac{2}{15}\times 16^n-\frac{2}{15},$$

$$B_n=1\times 2+2\times 8+3\times 32+\cdots+n\times 2^{2n-1}, \quad ①$$

故有

$$4B_n=1\times 8+2\times 32+\cdots+(n-1)\times 2^{2n-1}+n\times 2^{2n+1}, \quad ②$$

①-②，可得

$$-3B_n=2+8+32+\cdots+2^{2n-1}-n\times 2^{2n+1}$$
$$=\frac{2\left(1-4^n\right)}{1-4}-n\times 2^{2n+1}$$
$$=\frac{2-6n}{3}\times 4^n-\frac{2}{3},$$

由此可得 $3B_n=\dfrac{6n-2}{3}\times 4^n+\dfrac{2}{3}$.

由 $T_n=A_n+3B_n$，故可得 $T_n=\dfrac{2}{15}\times 16^n+\dfrac{6n-2}{3}\times 4^n+\dfrac{8}{15}$. 15 分

（20）满分 16 分.

（Ⅰ）解：由已知可得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=2x-2\ln x-2$. 令 $h(x)=f'(x)$，则有 $h'(x)=\dfrac{2(x-1)}{x}$. 由 $h'(x)=0$ 可得 $x=1$，可知当 x 变化时，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	极小值	↗

所以，$h(x)\geqslant h(1)=0$，即 $f'(x)\geqslant 0$，可得 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增. 5 分

（Ⅱ）解：由已知可得函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $g'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{2\ln x}{x}$.

由已知，得 $g'(x_0)=0$，即

$$x_0^2-2x_0\ln x_0-a=0. \quad ①$$

由 $g(x_0)=2$ 可得

$$x_0^2-x_0\left(\ln x_0\right)^2-2x_0+a=0, \quad ②$$

联立①，②，消去 a，可得

$$2x_0-(\ln x_0)^2-2\ln x_0-2=0.\quad ③$$

令$t(x)=2x-(\ln x)^2-2\ln x-2$，则$t'(x)=2-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}=\frac{2(x-\ln x-1)}{x}$. 由（Ⅰ）知 $x-\ln x-1\geqslant 0$，故$t'(x)\geqslant 0$，所以$t(x)$在区间$(0,+\infty)$单调递增.

注意到$t(1)=0$，所以方程③有唯一解 $x_0=1$，代入①，可得$a=1$.

所以，$x_0=1$，$a=1$. 10分

(Ⅲ) 证明：由（Ⅰ）知$f(x)=x^2-2x\ln x$在区间$(0,+\infty)$单调递增，故当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)>f(1)=1$，所以$g'(x)=\frac{x^2-2x\ln x-1}{x^2}=\frac{f(x)-1}{x^2}>0$，可得$g(x)$在区间$(1,+\infty)$单调递增.

因此，当$x>1$时，$g(x)>g(1)=2$，即$x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2>2$，亦即$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2>(\ln x)^2$.

这时$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>0$，$\ln x>0$，故可得$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>\ln x$. 取$x=\frac{2k+1}{2k-1}$，$k\in\mathbf{N}^*$，可得

$$\sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}}-\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}>\ln(2k+1)-\ln(2k-1).$$

而$\sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}}-\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}=\frac{2}{\sqrt{4k^2-1}}$，故

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{4k^2-1}}>\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(2k+1)-\ln(2k-1)\right)=\ln(2n+1).$$

所以，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4k^2-1}}>\frac{1}{2}\ln(2n+1)$（$n\in\mathbf{N}^*$）.