2022—2023 学年度下学期高三年级第四次综合素养测评

数学试卷

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟.

第Ⅰ卷(选择题　共 60 分)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知 P,Q 为 R 的两个非空真子集,若 $\complement_R Q \subsetneqq \complement_R P$,则下列结论正确的　(　　)

A. $\forall x\in Q,x\in P$　　B. $\forall x\in \complement_R P,x\in \complement_R Q$

C. $\exists x_0\notin Q,x_0\in P$　　D. $\exists x_0\in \complement_R P,x\in \complement_R Q$

2. $\cos 198^\circ\cos 132^\circ+\cos 42^\circ\sin 18^\circ=$　(　　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

3. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为单位向量,则"$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$"是"$|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|$"的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 充要条件

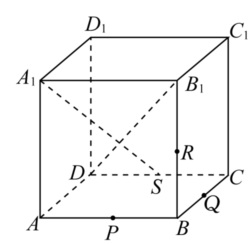
C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知函数 $y=f(x)$的定义域为$[0,4]$,则函数 $y=\frac{f(x+1)}{\sqrt{x-1}}+(x-2)^0$ 的定义域是　(　　)

A. $(1,5]$　　B. $(1,2)\cup(2,5)$

C. $(1,2)\cup(2,3]$　　D. $(1,3]$

5. 如图,正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,P,Q,R,S 分别为棱 AB,BC,BB_1,CD 的中点,连接 A_1S,B_1D,对空间任意两点 M,N,若线段 MN 与线段 A_1S,B_1D 都不相交,则称 M,N 两点可视,下列选项中与点 D_1 可视的为　(　　)



A. 点 Q

B. 点 P

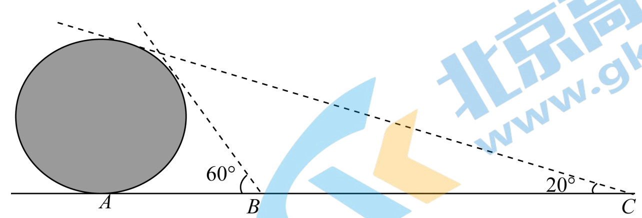
C. 点 R

D. 点 B

6. 垃圾分类的目的是提高垃圾的资源价值和经济价值,减少垃圾处理量和处理设备的使用,降低处理成本,减少土地资源的消耗,具有社会、经济和生态等多方面的效益,为配合垃圾分类在学校的全面展开,某学校举办了一次垃圾分类知识比赛活动.高一、高二、高三年级分别有 2 名、3 名、3 名同学获一等奖.若将上述获一等奖的 8 名同学排成一排合影,要求同年级同学排在一起,则不同的排法共有　(　　)

A. 432 种　　B. 420 种　　C. 176 种　　D. 72 种

7. 古代数学家刘徽编撰的《重差》是中国最早的一部测量学著作,也为地图学提供了数学基础.现根据刘徽的《重差》测量一个球体建筑物的高度,已知点 A 是球体建筑物与水平地面的接触点(切点),地面上 B,C 两点与点 A 在同一条直线上,且在点 A 的同侧.若在 B,C 处分别测得球体建筑物的最大仰角为 60° 和 20°,且 $BC=100$ m,则该球体建筑物的高度约为 $(\cos 10^\circ\approx 0.985)$　(　　)



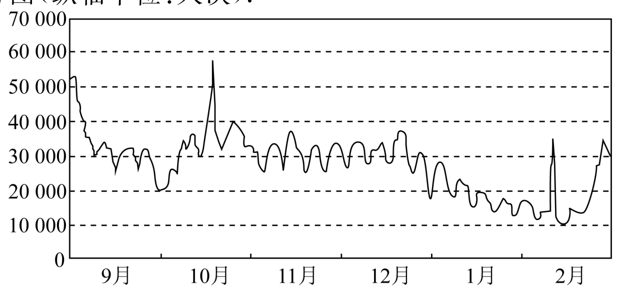
A. 49.25 m　　B. 50.76 m　　C. 56.74 m　　D. 58.60 m

8. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足 $f(0)=1$,对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$,有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$,则 $\sum_{i=1}^{2\,023}\frac{1}{f(i)f(i+1)}=$　(　　)

A. $\frac{2\,023}{4\,050}$　　B. $\frac{2\,024}{2\,025}$　　C. $\frac{2\,023}{4\,048}$　　D. $\frac{2\,023}{2\,024}$

二、选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分)

9. 热搜是指网站从搜索引擎带来最多流量的几个或者是几十个关键词及其内容,热搜分为短期热搜关键词和长期热搜关键词两类."搜索指数"是网友通过搜索引擎,以每天搜索关键词的次数为基础所得到的统计指标.如图是 2022 年 9 月到 2023 年 2 月这半年中,某个关键词的搜索指数变化的走势图(纵轴单位:人次).



根据该走势图,下列结论不正确的是　(　　)

A. 网友对该关键词相关的信息关注度不断减弱

B. 网民对该关键词相关的信息关注度呈周期性变化,有规律可循

C. 2022 年 9 月份的方差小于 2022 年 11 月份的方差

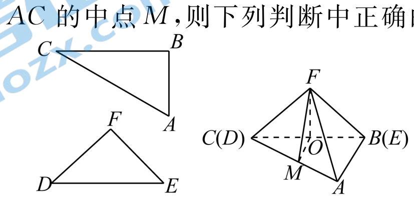
D. 2022 年 10 月份的平均值大于 2023 年 1 月份的平均值

10. 已知直线 $l:x+y-4=0$,圆 $O:x^2+y^2=2$,M 是 l 上一点,MA,MB 分别是圆 O 的切线,则　(　　)

A. 直线 l 与圆 O 相切　　B. 圆 O 上的点到直线 l 的距离的最小值为$\sqrt{2}$

C. 存在点 M,使$\angle AMB=90^\circ$　　D. 存在点 M,使$\triangle AMB$ 为等边三角形

11. 一副三角板由一块有一个内角为 60°的直角三角形和一块等腰直角三角形组成,如图所示,$\angle B=\angle F=90^\circ$,$\angle A=60^\circ$,$\angle D=45^\circ$,$BC=DE$,现将两块三角形板拼接在一起,得三棱锥 $F\text{-}CAB$,取 BC 的中点 O 与 AC 的中点 M,则下列判断中正确的是　(　　)



A. $BC\perp FM$

B. AC 与平面 MOF 所成的角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 平面 MOF 与平面 AFB 所成的二面角的平面角为 45°

D. 设平面 $ABF\cap$平面 $MOF=l$,则有 $l/\!/AB$

12. 华人数学家李天岩和美国数学家约克给出了"混沌"的数学定义,由此发展的混沌理论在生物学、经济学和社会学领域都有重要作用.在混沌理论中,函数的周期点是一个关键概念,定义如下:设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,对于 $x_0\in\mathbf{R}$,令 $x_n=f(x_{n-1})(n=1,2,3,\cdots)$,若存在正整数 k 使得 $x_k=x_0$,且当 $0<j<k$ 时,$x_j\neq x_0$,则称 x_0 是 $f(x)$的一个周期为 k 的周期点.下列四个结论正确的是　(　　)

A. 若 $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}$,则 $f(x)$存在唯一一个周期为 1 的周期点

B. 若 $f(x)=2(1-x)$,则 $f(x)$存在周期为 2 的周期点

C. 若 $f(x)=\begin{cases}2x,x<\frac{1}{2},\\2(1-x),x\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ 则 $f(x)$不存在周期为 3 的周期点

D. 若 $f(x)=x(1-x)$,则对任意正整数 n,$\frac{1}{2}$都不是 $f(x)$的周期为 n 的周期点

第Ⅱ卷(非选择题　共 90 分)

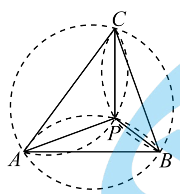
三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 已知复数$(m^2+3m-4)+(m^2-2m-24)i(m\in\mathbf{R})$是纯虚数,则 $m=$________.

14. 抛物线 $y^2=mx$ 绕其顶点顺时针旋转 90°之后,得到的图像正好对应抛物线 $y=2x^2$,则 $m=$________.

15. 已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数,$a_5\geqslant\frac{1}{16}$,且存在 $m\in\mathbf{N}^*$,使得 $a_{m+2}+\frac{2}{a_m}=1$,则 a_1 的最小值为________.

16. 某同学在学习和探索三角形相关知识时,发现了一个有趣的性质:将锐角三角形三条边所对的外接圆的三条圆弧(劣弧)沿着三角形的边进行翻折,则三条圆弧交于该三角形内部一点,且此交点为该三角形的垂心(即三角形三条高线的交点).如图,已知锐角三角形 ABC 外接圆的半径为 2,且三条圆弧沿$\triangle ABC$ 三边翻折后交于点 P.若 $AB=3$,则 $\sin\angle PAC=$________;若 $AC:AB:BC=6:5:4$,则 $PA+PB+PC$ 的值为________.



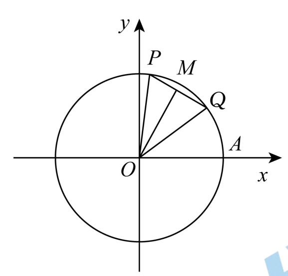
四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分)

如图,P,Q 是以原点为圆心的单位圆上的两个动点,若它们同时从点 $A(1,0)$出发,沿逆时针方向做匀角速度运动,其角速度分别为$\frac{\pi}{3}$,$\frac{\pi}{6}$(单位:弧度/秒),M 为线段 PQ 的中点,记经过 x 秒后(其中 $0\leqslant x\leqslant 6$),$f(x)=|OM|$.

(1)求 $y=f(x)$的函数解析式;

(2)将 $f(x)$图像上的各点均向右平移 2 个单位长度,得到 $y=g(x)$的图像,求函数 $y=g(x)$的单调递减区间.

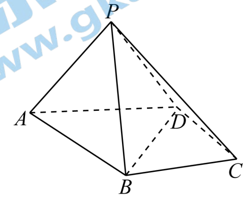


18. (12 分)

如图,四棱锥 P-$ABCD$ 中,$\triangle ABD$ 是等边三角形,$PA=PB=PD$,$BC=CD$.

(1)证明:$BD\perp PC$;

(2)若 $BD=2\sqrt{3}$,$CD=AP=\sqrt{7}$,求点 A 到平面 PCD 的距离.



19. (12 分)

已知$\{a_n\}$是首项为 1 的等差数列,公差 $d>0$,$\{b_n\}$是首项为 2 的等比数列,$a_4=b_2$,$a_8=b_3$.

(1)求$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2)若数列$\{b_n\}$的第 m 项 b_m,满足________(在①②中任选一个条件),$k\in\mathbf{N}^*$,则将其去掉,数列$\{b_n\}$剩余的各项按原顺序组成一个新的数列$\{c_n\}$,求$\{c_n\}$的前 20 项和 S_{20}.

①$\log_4 b_m=a_k$;②$b_m=3a_k+1$.

20. (12 分)

已知直线 l_1:$y=2x$ 和直线 l_2:$y=-2x$,过动点 E 作平行 l_2 的直线交 l_1 于点 A,过动点 E 作平行 l_1 的直线交 l_2 于点 B,且四边形 $OAEB$(O 为原点)的面积为 4.

(1)求动点 E 的轨迹方程;

(2)当动点 E 的轨迹的焦点在 x 轴时,记轨迹为曲线 E_0,若过点 $M(1,0)$的直线 m 与曲线 E_0 交于 P,Q 两点,且与 y 轴交于点 N,若$\overrightarrow{NM}=\lambda\overrightarrow{MP}$,$\overrightarrow{NM}=\mu\overrightarrow{MQ}$,求证:$\lambda+\mu$ 为定值.

21. (12 分)

某辖区组织居民接种新冠疫苗,现有 A,B,C,D 四种疫苗且每种都供应充足.前来接种的居民接种与号码机产生的号码对应的疫苗,号码机有 A,B,C,D 四个号码,每次可随机产生一个号码,后一次产生的号码由前一次余下的三个号码中随机产生,张医生先接种与号码机产生的号码对应的 A 种疫苗后,再为居民们接种,记第 n 位居民(不包含张医生)接种 A,B,C,D 四种疫苗的概率分别为 $P_n(A)$,$P_n(B)$,$P_n(C)$,$P_n(D)$.

(1)第 2 位居民接种哪种疫苗的概率最大;

(2)张医生认为,一段时间后接种 A,B,C,D 四种疫苗的概率应该相差无几,请你通过计算第 10 位居民接种 A,B,C,D 四种的概率,解释张医生观点的合理性.

参考数据:$\left(\frac{1}{3}\right)^4\approx5.1\times10^{-5}$,$\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\approx1.7\times10^{-5}$,$\left(\frac{1}{2}\right)^9\approx2.0\times10^{-3}$,$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\approx9.8\times10^{-4}$.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=x^2-ax+1$,$g(x)=\ln x+a(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=1$,$f(x)>g(x)$在区间$(0,t)$上恒成立,求 t 的取值范围;

(2)若 $f(x)$和 $g(x)$有公切线,求 a 的取值范围.

参考答案及解析

一、选择题

1.D　2.C　3.B　4.C　5.A　6.A　7.B　8.A

二、选择题

9.ABC　10.BD　11.AD　12.AD

三、填空题

13.1

14.$-\frac{1}{2}$

15.4

16.$\frac{\sqrt{7}}{4}$　$\frac{23}{4}$

四、解答题

17.**解**:(1)依题意可知$\angle POA=\frac{\pi}{3}x$,$\angle QOA=\frac{\pi}{6}x$.

因为$|OP|=|OQ|=1$,

所以$|OM|=|OQ|\cdot\cos\angle MOQ=\cos\angle MOQ$,

所以$\angle MOQ=\dfrac{\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{6}x}{2}=\frac{\pi}{12}x$,　　(3分)

所以 $f(x)=|OM|\cos\frac{\pi}{12}x(0\leqslant x\leqslant 6)$.　　(4分)

即 $f(x)=\cos\frac{\pi}{12}x(0\leqslant x\leqslant 6)$.　　(5分)

(2)依题意可知 $g(x)=\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-2)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{12}x-\frac{\pi}{6}\right)(2\leqslant x\leqslant 8)$,　　(7分)

由 $2k\pi\leqslant\frac{\pi}{12}x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\pi$,得 $24k+2\leqslant x\leqslant 24k+14$,

故函数 $y=g(x)$在$[2,8]$上的单调递减区间为$[2,8]$.　　(10分)

18.(1)**证明**:如图,连接AC,交BD于点O,连接PO,

由$AD=AB$,$CD=BC$,$AC=AC$,

可得$\triangle ABC\cong\triangle ADC$,所以$\angle BAC=\angle DAC$.

又$AO=AO$,所以$\triangle AOB\cong\triangle AOD$,

所以$BO=OD$,即O为BD的中点,

在等腰三角形PBD中,可得$BD\perp OP$,

在等腰三角形BCD中,$BD\perp OC$,

又$OP\cap OC=O$,$OP,OC\subset$平面POC,所以$BD\perp$平面POC,

又$PC\subset$平面POC,所以$BD\perp PC$.　　(6分)

(2)**解**:由(1)可得$AC\perp BD$,

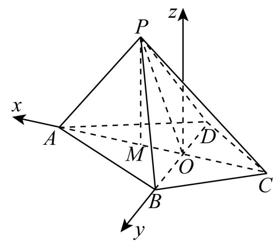
又$CD=\sqrt{7}$,$OD=\frac{1}{2}BD=\sqrt{3}$,

所以$CO=\sqrt{CD^2-OD^2}$,$AO=\sqrt{3}OD=3$,　　(8分)

由于P-ABD为正三棱锥,点P在底面ABD的射影M一定在AO上.

根据正三棱锥的性质可得$AM=\frac{2}{3}AO=2$,$PM=\sqrt{AP^2-AM^2}=\sqrt{3}$.

以O为坐标原点,过点O作PM的平行线,以PM的平行线所在直线为z轴,以OA,OB所在直线为x轴,y轴建立如图所示的空间直角坐标系.



可得$A(3,0,0)$,$C(-2,0,0)$,$D(0,-\sqrt{3},0)$,$P(1,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{PC}=(-3,0,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DC}=(-2,\sqrt{3},0)$,　　(9分)

又$\overrightarrow{AC}=(-5,0,0)$(或$\overrightarrow{AD}=(-3,-\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{AP}=(-2,0,\sqrt{3})$).

设平面PCD的法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

可得$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-3x-\sqrt{3}z=0,\\ -2x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\sqrt{3}x+z=0,\\ 2x-\sqrt{3}y=0,\end{cases}$

不妨令$x=\sqrt{3}$,可得$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},2,-3)$,

所以$d=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$,

故点A到平面PCD的距离为$\frac{5\sqrt{3}}{4}$.　　(12分)

19.**解**:(1)设$\{b_n\}$的公比为q,

因为$a_4=b_2$,$a_8=b_3$,所以$1+3d=2q$,$1+7d=2q^2$,

联立消q得$9d^2-8d-1=0$,　　(2分)

解得$d=1$或$d=-\frac{1}{9}$与$d>0$矛盾,

故$d=1$,代回计算得$q=2$,　　(4分)

所以$a_n=a_1+(n-1)d=n$,$b_n=b_1\cdot q^{n-1}=2^n$.　　(6分)

(2)若选①,$\log_4 b_m=a_k$,则有$\log_4 2^m=k\Rightarrow m=2k$,$k\in\mathbf{N}^*$,　　(8分)

所以$\{b_n\}$剩余的项就是原数列的奇数项,相当于剩余的项$\{c_n\}$以2为首项,4为公比的等比数列,

所以$S_{20}=\dfrac{2\times(1-4^{20})}{1-4}=\frac{2}{3}(4^{20}-1)$.　　(12分)

若选②，$b_m=3a_k+1$，则有 $2^m=3k+1$，

因为 $m\in\mathbf{N}^*$，$k\in\mathbf{N}^*$，

所以当 $m=2n(n\in\mathbf{N}^*)$ 时，对应的 $k=\dfrac{4^n-1}{3}=\dfrac{(3+1)^n-1}{3}$ 为整数，满足；　　（8 分）

当 $m=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 时，对应的 $k=\dfrac{\frac{4^n}{2}-1}{3}=\dfrac{(3+1)^n-2}{6}$ 不为整数，不满足，　　（10 分）

所以 $\{b_n\}$ 剩余的项就是原数列的奇数项，相当于剩余的项 $\{c_n\}$ 以 2 为首项，4 为公比的等比数列，所以 $S_{20}=\dfrac{2\times(1-4^{20})}{1-4}=\dfrac{2}{3}(4^{20}-1)$.　　（12 分）

20.（1）**解**：设 $E(x_0,y_0)$，过 (x_0,y_0) 且平行 l_2 的直线方程为 $y-y_0=-2(x-x_0)$，

由 $\begin{cases}y-y_0=-2(x-x_0),\\ y=2x,\end{cases}$ 得交点 A 的横坐标为 $\dfrac{2x_0+y_0}{4}$，

所以 $|OA|=\sqrt{1+2^2}\left|\dfrac{2x_0+y_0}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{4}|2x_0+y_0|$，点 E 到直线 l_1 的距离为 $\dfrac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{5}}$，

所以四边形 $OAEB$ 的面积为 $\dfrac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{4}|2x_0+y_0|=4$，即 $\dfrac{x_0^2}{4}-\dfrac{y_0^2}{16}=1$ 或 $\dfrac{y_0^2}{16}-\dfrac{x_0^2}{4}=1$，

故动点 E 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{4}=1$.

（5 分）

（2）**证明**：由题知 E_0 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$. 设 $N(0,y_N)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，当直线 m 的斜率为 0 时，$N(0,0)$，

若 $P(-2,0)$，$Q(2,0)$，由 $\overrightarrow{NM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{NM}=\mu\overrightarrow{MQ}$，知 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$，$\mu=1$，所以 $\lambda+\mu=\dfrac{2}{3}$；　　（6 分）

若 $Q(-2,0)$，$P(2,0)$，由 $\overrightarrow{NM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{NM}=\mu\overrightarrow{MQ}$，知 $\lambda=1$，$\mu=-\dfrac{1}{3}$，所以 $\lambda+\mu=\dfrac{2}{3}$；

当直线 m 的斜率不为 0 时，设直线 m 的方程为 $x=ty+1$（显然 $t\neq0$），

则 $N\left(0,-\dfrac{1}{t}\right)$，即 $y_N=-\dfrac{1}{t}$，

因为 $\overrightarrow{NM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{NM}=\mu\overrightarrow{MQ}$，

所以 $(1,-y_N)=\lambda(x_1-1,y_1)$，$(1,-y_N)=\mu(x_2-1,y_2)$，

解得 $\lambda=-\dfrac{y_N}{y_1}$，$\mu=-\dfrac{y_N}{y_2}$，$\lambda+\mu=-y_N\left(\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}\right)=-y_N\cdot\dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}$.　　（9 分）

由 $\begin{cases}x=ty+1,\\ 4x^2-y^2=16,\end{cases}$ 消 x 并整理得 $(4t^2-1)y^2+8ty-12=0$，

因为直线 m 与曲线 E_0 有两个交点，则在 $4t^2-1\neq0$ 且判别式 $\Delta>0$ 时，有 $y_1+y_2=\dfrac{-8t}{4t^2-1}$ 且 $y_1y_2=\dfrac{-12}{4t^2-1}$，

所以 $\lambda+\mu=\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{-8t}{4t^2-1}\cdot\dfrac{4t^2-1}{-12}=\dfrac{2}{3}$，即证得 $\lambda+\mu$ 为定值 $\dfrac{2}{3}$.　　（12 分）

21.**解**：（1）第 1 位居民接种 A,B,C,D 疫苗的概率分别为 $0,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}$；

第 2 位居民接种 A 疫苗的概率 $P(A)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$.

第 2 位居民接种 B 疫苗的概率 $P(B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$.

同理，第 2 位居民接种 C,D 疫苗的概率也等于 $\dfrac{2}{9}$.

故第 2 位居民接种 A 疫苗的概率最大.　　（6 分）

（2）因为 $P_{n+1}(A)=\dfrac{1}{3}(1-P_n(A))$，

所以 $P_{n+1}(A)-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}\left(P_n(A)-\dfrac{1}{4}\right)$，

故数列 $\left\{P_n(A)-\dfrac{1}{4}\right\}$ 是公比为 $-\dfrac{1}{3}$ 的等比数列.

（8 分）

又 $P_1(A)-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$，所以 $P_n(A)-\dfrac{1}{4}=\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$，

即 $P_n(A)=\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{1}{4}\right)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$，

从而 $P_{10}(A)=\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{1}{4}\right)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{9}$，

同理 $P_{10}(B)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{9}$，

$P_{10}(C)=P_{10}(D)=P_{10}(B)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{9}$，

所以 $P_{10}(A)-P_{10}(B)=\left[\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{1}{4}\right)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{9}\right]-$

$\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{9}\right]=\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}\approx1.7\times10^{-5}$，

第10位居民接种 A,B,C,D 疫苗概率应该相差无几.

第 $n(n>10)$ 位居民接种 A,B,C,D 疫苗概率应该相差将会更小，所以张医生的话合理. (12分)

22. **解**：(1)由题意，当 $a=1$ 时，设 $h(x)=f(x)-g(x)$，

则 $h(x)=x^2-x+1-\ln x-1=x^2-x-\ln x(x>0)$，

$h'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$. (2分)

令 $h'(x)=0$，得 $x=1$（负值舍去），

$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=0$，

根据题意 t 的取值范围为 $(0,1]$. (4分)

(2)设 $f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处与函数 $g(x)$ 在点 $(x_2,g(x_2))$ 处有相同的切线，

则 $f'(x_1)=g'(x_2)=\frac{f(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$，

所以 $2x_1-a=\frac{1}{x_2}=\frac{x_1^2-ax_1+1-\ln x_2-a}{x_1-x_2}$，

所以 $x_1=\frac{1}{2x_2}+\frac{a}{2}$，代入 $\frac{x_1-x_2}{x_2}=x_1^2-ax_1+1-\ln x_2-a$，得 $\frac{1}{4x_2^2}+\frac{a}{2x_2}+\ln x_2+\frac{a^2}{4}+a-2=0$. (6分)

所以问题转化为关于 x 的方程 $\frac{1}{4x^2}+\frac{a}{2x}+\ln x+\frac{a^2}{4}+a-2=0$ 有解.

设 $F(x)=\frac{1}{4x^2}+\frac{a}{2x}+\ln x+\frac{a^2}{4}+a-2(x>0)$，则函数 $F(x)$ 有零点， (7分)

因为 $F(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+a\right)^2+\ln x+a-2$，

当 $x=e^{2-a}$ 时，$\ln x+a-2=0$，所以 $F(e^{2-a})>0$.

所以问题转化为 $F(x)$ 的最小值小于或等于0.

$F'(x)=-\frac{1}{2x^3}-\frac{a}{2x^2}+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-ax-1}{2x^3}$，

设 $2x_0^2-ax_0-1=0(x_0>0)$，则当 $0<x<x_0$ 时，$F'(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$F'(x)>0$.

所以 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $F(x)$ 的最小值为 $F(x_0)=\frac{1}{4x_0^2}+\frac{a}{2x_0}+\ln x_0+\frac{a^2}{4}+a-2$. (10分)

由 $2x_0^2-ax_0-1=0$ 知 $a=2x_0-\frac{1}{x_0}$，

故 $F(x_0)=x_0^2+2x_0-\frac{1}{x_0}+\ln x_0-2$.

设 $\varphi(x)=x^2+2x-\frac{1}{x}+\ln x-2(x>0)$，

则 $\varphi'(x)=2x+2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}>0$，

故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $\varphi(1)=0$，所以当 $x\in(0,1]$ 时，$\varphi(x)\leqslant0$，

所以 $F(x)$ 的最小值 $F(x_0)\leqslant0$ 等价于 $0<x_0\leqslant1$.

又函数 $y=2x-\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

所以 $a=2x_0-\frac{1}{x_0}\in(-\infty,1]$. (12分)