

2024 届高三一轮复习联考(二)

数 学 试 题

注意事项:

- 1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.若复数 $z = (1+i^3)(i+i^2)$,则 $\bar{z} =$

A. $2i$

B. $-2i$

C. $2-i$

D. $2+i$

2.已知集合 $A = \{x | x = 2n, n \in \mathbf{N}\}$,集合 $B = \{x | x = 3n, n \in \mathbf{N}\}$,则

A. $A \cap B = \{x | x = 6n, n \in \mathbf{N}\}$

B. $A \cap B = \{0\}$

C. $A \cup B = \{x | x = 6n, n \in \mathbf{N}\}$

D. $A \cup B = \{x | x = n, n \in \mathbf{N}\}$

3.命题“ $\exists x_0 > 1, x_0 - 2\ln x_0 \leq 1$ ”的否定为

A. $\forall x > 1, x - 2\ln x \leq 1$

B. $\exists x_0 \leq 1, x_0 - 2\ln x_0 > 1$

C. $\forall x > 1, x - 2\ln x > 1$

D. $\exists x_0 \leq 1, x_0 - 2\ln x_0 \leq 1$

4.已知函数 $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} + a$,若 $f(-x) = -f(x)$,则 a 的值为

A. -1

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

5.已知函数 $f(x) = ae^x - x^2 + b$ 是增函数,则实数 a 的最小值是

A. $\frac{2}{e}$

B. 1

C. $\frac{1}{e}$

D. 2

6.已知 a, b 均为正数,不等式 $4^a + 2^b \geq 8$ 成立是不等式 $ab \geq 2$ 成立的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 已知 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}$, 若 $a = \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1}$, $b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$, $c = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta$, 则 a, b, c 的大小关系是

- A. $c > a > b$ B. $b > c > a$ C. $c > b > a$ D. $b > a > c$

8. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆面积为 4π , 三边成等比数列, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为

- A. $3\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. 8 D. 4

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项

符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 若 (a, b) ($a > 0, a \neq 1$) 为函数 $y = \log_2 x$ 图象上的一点, 则下列选项正确的是

- A. (b, a) 为函数 $y = 2^x$ 图象上的点 B. $\left(\frac{1}{a}, b\right)$ 为函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 图象上的点
C. $(-b, a)$ 为函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 图象上的点 D. $(a, 2b)$ 为函数 $y = \log_4 x$ 图象上的点

10. 已知方程 $x^2 + m = 0$ 有两个不相等的实数根 $\sin \theta, \cos \theta$, 其中 $0 \leq \theta < 2\pi$, 则下列选项正确的是

- A. $\tan \theta = 1$ B. $\sin 2\theta = 1$ C. $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ D. $m = -\frac{1}{2}$

11. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差 $d > 0$, 则下列对数列 $\{b_n\}$ 的判断正确的是

- A. 若 $b_n = -a_n$, 则数列 $\{b_n\}$ 是递减数列
B. 若 $b_n = a_n^2$, 则数列 $\{b_n\}$ 是递增数列
C. 若 $b_n = a_n + a_{n+1}$, 则数列 $\{b_n\}$ 是公差为 d 的等差数列
D. 若 $b_n = a_n + n$, 则数列 $\{b_n\}$ 是公差为 $d+1$ 的等差数列

12. 已知函数 $f(x) = |\ln(2-x)| + |\ln(2+x)|$, 则下列判断正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 是偶函数
B. 函数 $f(x)$ 的最小值是 $\ln 3$
C. 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称
D. 函数 $f(x)$ 有三个极值点

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (2, x)$, $\mathbf{b} = (-2x, -2)$, 且 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 方向相同, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ _____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\cos C = \frac{b}{2a}$, $\cos B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则角 $A =$ _____.

15. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_4}{S_2} = 3$, 则 $\frac{a_4}{a_2} =$ _____.

16. 平面四边形 $ABCD$ 满足 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$, 则 $\tan \angle BAD$ 的值为 _____.

四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, a_n 是 a_{n+1} 与 -1 的等差中项。

(1) 求证: 数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列;

(2) 证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} < 2$.

18. (12分) 已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 把函数 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 然后再把所得到的图象上所有点向右平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象。

(1) 求函数 $y = g(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $y = f(x) + g(x)$ 在 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值。

19. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $A = \frac{\pi}{6}$, $\sin^2 B - \sin^2 A = \sin A \sin C$.

(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并给出证明;

(2) 若 $c = 2$, 点 D 在边 AC 上, 且 $\triangle ABD$ 的周长为 $\frac{7+3\sqrt{3}}{3}$, 求 $\triangle BCD$ 的周长。

20.(12分)已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_2=5$,其前 n 项和为 S_n ,满足 $S_n=\frac{(3+a_n)n}{2}$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)是否存在正整数 m, n ,使得 $\frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_m}, \frac{1}{a_{3n+1}}$ 成等差数列? 若存在,求出 m, n ;若不存在,请给出证明.

21.(12分)已知函数 $f(x)=x+\ln x, g(x)=e^x \ln x+a$,且函数 $f(x)$ 的零点是函数 $g(x)$ 的零点.

(1)求实数 a 的值;

(2)证明: $y=g(x)$ 有唯一零点.

22.(12分)已知函数 $f(x)=e^x[(a-1)x+1]$.

(1)当 $a=2$ 时,求函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2)对任意 $x \leq 0$,有 $f(x) \geq ax+1$,求实数 a 的取值范围.