高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z=\frac{5-i}{1+i}$（i 为虚数单位），则 z 的共轭复数 $\bar{z}=$

A. $2+3i$　　B. $2-4i$　　C. $3+3i$　　D. $2+4i$

2. 已知集合 $A=\{x|(x+1)(x-4)-6\leqslant 0\}$，$B=\{x|-7\leqslant 5-2x\leqslant 4\}$，则 $A\cup B=$

A. $\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}$　　B. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 6\}$

C. $\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 5\right\}$　　D. $\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$

3. $1-2\cos^2 67.5^\circ=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 13 项和为 52，则$(-2)^{a_6+a_8}=$

A. 256　　B. -256　　C. 32　　D. -32

5. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右两个焦点分别为 F_1,F_2，若存在点 P 满足$|PF_1|:|PF_2|:|F_1F_2|=4:6:5$，则该双曲线的离心率为

A. 2　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 5

6. 若函数 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度后，得到 $y=g(x)$的图象，则下列关于函数 $g(x)$的说法中，正确的是

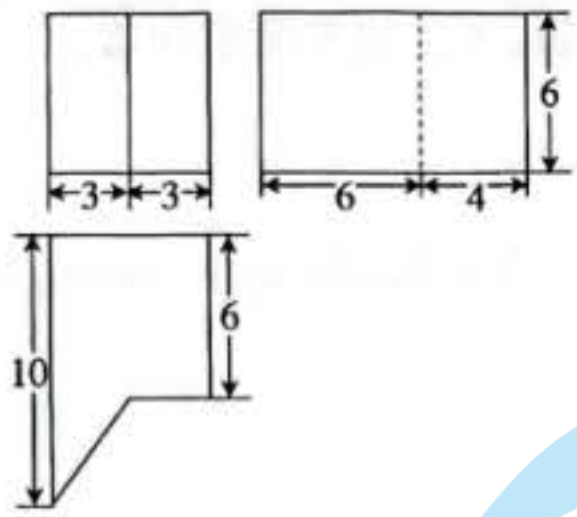
A. 函数 $g(x)$的图象关于直线 $x=\frac{7\pi}{24}$对称

B. 函数 $g(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{24},0\right)$对称

C. 函数 $g(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{12}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$

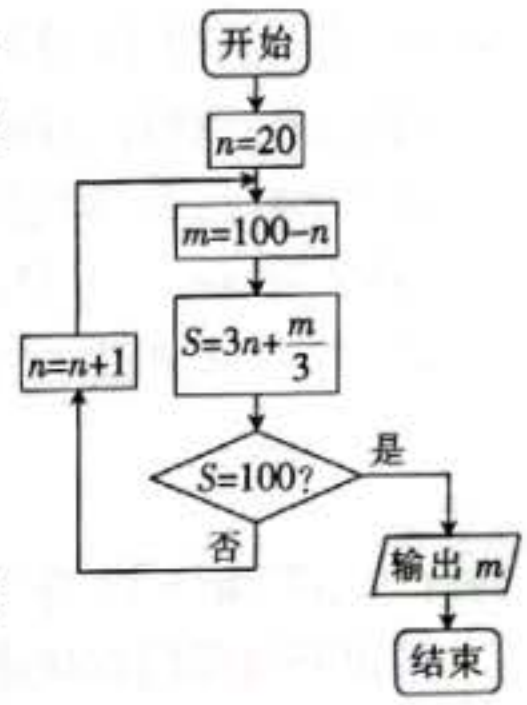
D. 函数 $g\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)$是偶函数

7. 若某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为



A. 240　　B. 264　　C. 274　　D. 282

8. 我国明朝数学家程大位著的《算法统宗》里有一道闻名世界的题目："一百馒头一百僧，大僧三个更无争，小僧三人分一个，大小和尚各几丁？"如图所示的程序框图反映了对此题的一个求解算法，则输出的 m 的值为



A. 25

B. 45

C. 55

D. 75

9. 中国古代数学名著《九章算术》中记载："圆周与其直径之比被定为 3，圆中弓形面积为 $\frac{1}{2}a(a+c)$（c 为弦长，a 为半径长与圆心到弦的距离之差）."据此计算，已知一个圆中弓形所对应的弦长 $c=6$，$a=1$，质点 M 随机投入此圆中，则质点 M 落在该弓形内的概率为

A. $\frac{3}{100}$　　B. $\frac{7}{150}$　　C. $\frac{3}{50}$　　D. $\frac{1}{3}$

10. 已知函数 $f(x)=a(x+\lg x)(a>0)$，$D=[1,10]$，若所有点 $(s,f(t))(s,t\in D)$ 构成一个正方形区域，则 $a=$

A. $\frac{9}{10}$　　B. $\frac{10}{9}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{5}{4}$

11. 已知抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为 F，过点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A，B 两点，其中点 A 在第一象限，若弦 AB 的长为 $\frac{25}{4}$，则 $\frac{|AF|}{|BF|}=$

A. 2 或 $\frac{1}{2}$　　B. 3 或 $\frac{1}{3}$　　C. 4 或 $\frac{1}{4}$　　D. 5 或 $\frac{1}{5}$

12. 已知函数 $f(x)=x^2-3x+5$，$g(x)=ax-\ln x$，若对 $\forall x\in(0,e)$，$\exists x_1,x_2\in(0,e)$ 且 $x_1\neq x_2$，使得 $f(x)=g(x_i)(i=1,2)$，则实数 a 的取值范围是

A. $\left(\frac{1}{e},\frac{6}{e}\right)$　　B. $\left[\frac{1}{e},e^{\frac{7}{4}}\right)$

C. $\left[\frac{6}{e},e^{\frac{7}{4}}\right)$　　D. $\left(0,\frac{1}{e}\right]\cup\left[\frac{6}{e},e^{\frac{7}{4}}\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,-n)$，若 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(7,1)$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为_____.

14. 某高校开展安全教育活动，安排六名老师到四个班进行讲解，要求一班和二班各安排一名老师，其余两个班各安排两名老师，其中刘老师和王老师不在一起，则不同的安排方案有_____种.

15. 已知数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列，且 $a_1>0$，若数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，则 a_1 的取值范围为_____.

16. 在四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$ 与 $\triangle BDC$ 都是边长为 2 的等边三角形，且平面 $ABD\perp$ 平面 BDC，则该四面体外接球的体积为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$(\sin A-\sin B)(a+b)=\sin C(c-b)$，$a=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$.

(1)求 B；

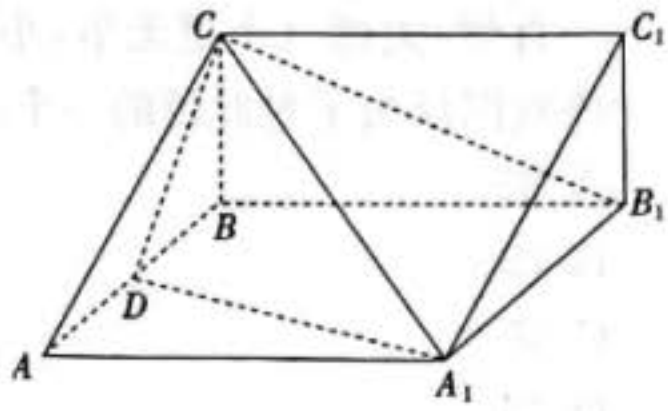
(2)求△ABC 的面积.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$平面 ABC，$AB=2\sqrt{3}$，$AC=2BC=4$，且 D 为线段 AB 的中点.

(1)证明：$BC\perp A_1D$；

(2)若 B_1 到直线 AC 的距离为 $\sqrt{19}$，求二面角 B_1-A_1C-D 的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

某市环保部门对该市市民进行了一次垃圾分类知识的网络问卷调查，每位市民仅有一次参加机会，通过随机抽样，得到参与问卷调查的 100 人的得分(满分：100 分)数据，统计结果如下表所示.

组别	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
男	2	3	5	15	18	12
女	0	5	10	10	7	13

(1)若规定问卷得分不低于 70 分的市民称为“环保关注者”，请完成下面的 2×2 列联表，并判断能否在犯错误概率不超过 0.05 的前提下，认为是否为“环保关注者”与性别有关？

	非“环保关注者”	是“环保关注者”	合计
男			
女			
合计			

(2)若问卷得分不低于 80 分的市民称为“环保达人”，视频率为概率.

①在我市所有“环保达人”中，随机抽取 3 人，求抽取的 3 人中，既有男“环保达人”又有女“环保达人”的概率；

②为了鼓励市民关注环保，针对此次的调查制定了如下奖励方案：“环保达人”获得两次抽奖活动，其他参与的市民获得一次抽奖活动. 每次抽奖获得红包的金额和对应的概率如下表：

红包金额(单位：元)	10	20
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

现某市民要参加此次问卷调查，记 X(单位：元)为该市民参加问卷调查获得的红包金额，求 X 的分布列及数学期望.

附表及公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20.（本小题满分 12 分）

已知△ABC 的两个顶点 A，B 的坐标分别为$(-\sqrt{2},0)$，$(\sqrt{2},0)$，圆 E 是△ABC 的内切圆，在边 AC，BC，AB 上的切点分别为 P，Q，R，$|CP|=2-\sqrt{2}$，动点 C 的轨迹为曲线 G.

(1)求曲线 G 的方程.

(2)设直线 l 与曲线 G 交于 M，N 两点，点 D 在曲线 G 上，O 是坐标原点，若$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OD}$，判定四边形 $OMDN$ 的面积是否为定值？若为定值，求出该定值；如果不是，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\frac{2a}{3}x^3+2(1-a)x^2-8x+8a+7$.

(1)若曲线 $y=g(x)$在点$(2,g(2))$处的切线方程是 $y=ax-1$，求函数 $g(x)$在$[0,3]$上的值域；

(2)当 $x>0$ 时，记函数 $h(x)=\begin{cases}f(x), f(x)<g(x),\\ g(x), f(x)\geqslant g(x),\end{cases}$若函数 $y=h(x)$有三个零点，求实数 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）**选修 4－4：坐标系与参数方程**

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程是$\begin{cases}x=\sqrt{3}+2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=\frac{m}{2\sin(\theta-\frac{\pi}{3})}(m\neq0)$.

(1)求曲线 C_1，C_2 的直角坐标方程；

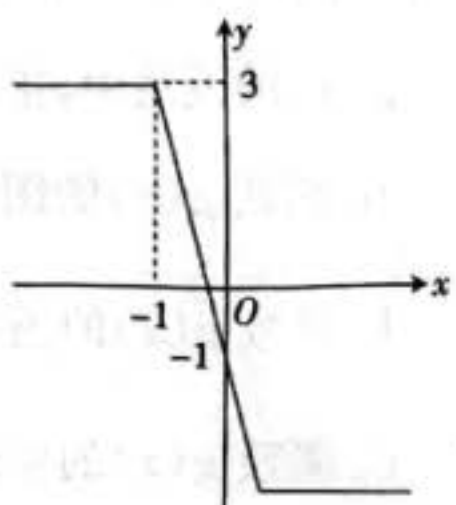
(2)设 A，B 分别在曲线 C_1，C_2 上运动，若$|AB|$的最小值是 1，求 m 的值.

23.（本小题满分 10 分）**选修 4－5：不等式选讲**

已知函数 $f(x)=|ax-1|-|2x+a|$的图象如图所示.

(1)求 a 的值；

(2)设 $g(x)=f(x+\frac{1}{2})+f(x-1)$，$g(x)$的最大值为 t，若正数 m，n 满足 $m+n=t$，证明：$\frac{4}{m}+\frac{9}{n}\geqslant\frac{25}{6}$.



高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. A　因为 $z=\frac{5-i}{1+i}=\frac{(5-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=2-3i$，所以 $z=2+3i$.

2. B　因为 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\left\{x\left|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 6\right.\right\}$，所以 $A\cup B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 6\}$.

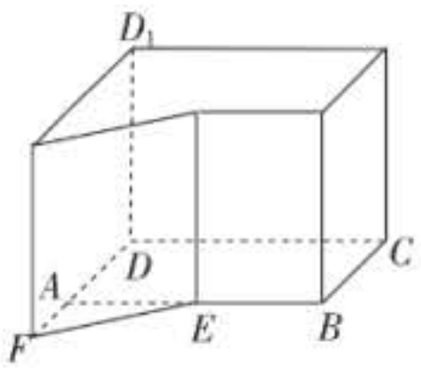
3. D　$1-2\cos^2 67.5^\circ=-(2\cos^2 67.5^\circ-1)=-\cos 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. A　由 $S_{13}=13a_7=52$，$a_7=4$，得 $(-2)^{a_6+a_8}=(-2)^8=256$.

5. C　$e=\frac{|F_1F_2|}{|PF_2|-|PF_1|}=\frac{5}{6-4}=\frac{5}{2}$.

6. D　由题意可得 $g(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $g\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos 2x$ 为偶函数.

7. B　由三视图可得，该几何体的直观图如图所示，延长 BE 交 DF 于 A 点，其中 $AB=AD=DD_1=6$，$AE=3$，$AF=4$，所以表面积 $S=(36\times 5+3\times 6)+\frac{3\times 4}{2}\times 2+4\times 6+30=264$.



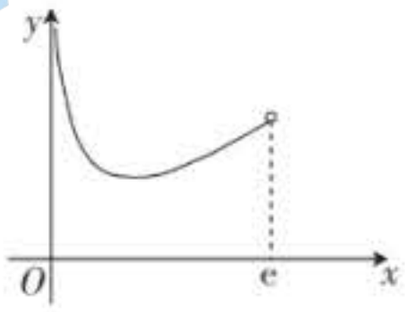
8. D　$n=20$，$m=80$，$S\neq 100$；$n=21$，$m=79$，$S\neq 100$；$n=22$，$m=78$，$S\neq 100$；$n=23$，$m=77$，$S\neq 100$；$n=24$，$m=76$，$S\neq 100$；$n=25$，$m=75$，$S=100$.

9. B　由题意可知：弓形的面积 $S_1=\frac{1}{2}\times 1\times(6+1)=\frac{7}{2}$. 设圆的半径为 r，则 $r^2=(r-1)^2+3^2$，解得 $r=5$，所以圆的面积 $S_2=3r^2=75$，所以质点落在弓形内的概率为 $P=\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{7}{2}}{75}=\frac{7}{150}$.

10. A　函数 $f(x)=a(x+\lg x)(a>0)$ 在 $[1,10]$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $[1,10]$ 上的值域为 $[a,11a]$，因为所有点 $(s,f(t))$ $(s,t\in D)$ 构成一个正方形区域，所以 $11a-a=10-1$，解得 $a=\frac{9}{10}$.

11. C　设直线的倾斜角为 θ，则 $|AB|=\frac{2p}{\cos^2\theta}=\frac{4}{\cos^2\theta}=\frac{25}{4}$，所以 $\cos^2\theta=\frac{16}{25}$，$\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\frac{9}{16}$，即 $\tan\theta=\pm\frac{3}{4}$，所以直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x+1$. 当直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{4}x+1$，联立 $\begin{cases}x^2=4y\\ y=\frac{3}{4}x+1\end{cases}$，解得 $x_1=-1$ 和 $x_2=4$，所以 $\frac{|AF|}{|BF|}=\left|\frac{4-0}{0-(-1)}\right|=4$；同理，当直线 l 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x+1$，$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1}{4}$. 综上，$\frac{|AF|}{|BF|}=4$ 或 $\frac{1}{4}$.

12. C　当 $x\in(0,e)$ 时，函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{11}{4},5\right)$. 由 $g'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$ 可知：当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)<0$，与题意不符，故 $a>0$. 令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$，则 $\frac{1}{a}\in(0,e)$，所以 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{a}\right)=1+\ln a$，作出函数 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上的大致图象，如图所示，观察可知 $\begin{cases}1+\ln a<\frac{11}{4},\\ g(e)=ae-1\geqslant 5,\end{cases}$ 解得 $\frac{6}{e}\leqslant a<e^{\frac{7}{4}}$.

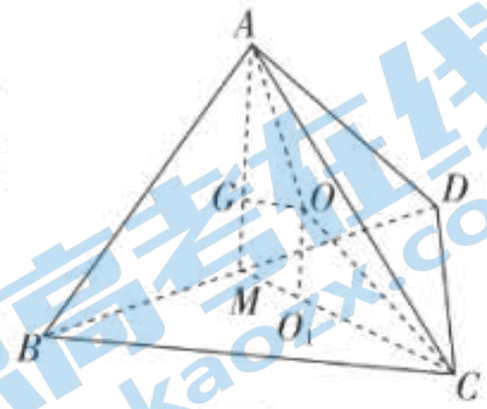


13. $\frac{\pi}{2}$　因为 $\boldsymbol{a}=(m,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,-n)$，且 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(7,1)$，所以 $\begin{cases}m+6=7\\ 3-2n=1\end{cases}$，所以 $m=1$，$n=1$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=0$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

14. 156　安排 6 名老师到 4 个班，其中按 1，1，2，2 分法，共有 $C_6^1C_5^1C_4^2C_2^2=180$ 种，刘老师和王老师分配到一个班，共有 $C_4^1C_3^1A_2^2=24$ 种，所以 $180-24=156$ 种.

15. $0<a_1<1$　由已知得 $\frac{1}{a_n}-1=\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，则 $a_n=\frac{1}{\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+1}$. 因为 $a_1>0$，数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，所以 $a_{n+1}>a_n>0$，则 $\frac{1}{\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+1}>\frac{1}{\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+1}$，化简得 $0<\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\frac{1}{3}<\frac{1}{a_1}-1$，所以 $0<a_1<1$.

16. $\frac{20\sqrt{15}}{27}\pi$　取$\triangle BDC$的外心为O_1，设O为球心，连接OO_1，则$OO_1\perp$平面BDC. 取BD的中点M，连接AM，O_1M，过O做$OG\perp AM$于点G，易知四边形OO_1MG为矩形. 连接OA，OC，设$OA=R$，$OO_1=MG=h$. 连接MC，则O_1，M，C三点共线，易知$MA=MC=\sqrt{3}$，所以$OG=MO_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$CO_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 在$\mathrm{Rt}\triangle AGO$和$\mathrm{Rt}\triangle OO_1C$中，$GA^2+GO^2=OA^2$，$O_1C^2+O_1O^2=OC^2$，即$(\sqrt{3}-h)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=R^2$，$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+h^2=R^2$，所以$h=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$R^2=\frac{5}{3}$，得$R=\frac{\sqrt{15}}{3}$，所以$V_{球O}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{20\sqrt{15}}{27}\pi$.



17. 解：(1)因为$(\sin A-\sin B)(a+b)=\sin C(c-b)$，

所以$(a+b)(a-b)=c(c-b)$，整理为$b^2+c^2-a^2=bc$. …… 2分

由余弦定理可得$\cos A=\frac{1}{2}$，因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$. …… 4分

因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， …… 6分

因为$a>b$，所以$B=\frac{\pi}{4}$. …… 7分

(2)由(1)知$b^2+c^2-a^2=bc$，$a=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，

所以$c^2-2\sqrt{2}c-4=0$，解得$c=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，…… 9分

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\frac{\sqrt{3}}{2}$， …… 11分

即$S_{\triangle ABC}=3+\sqrt{3}$. …… 12分

18. (1)证明：因为$AA_1\perp$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，

所以$AA_1\perp BC$. …… 1分

因为$AB=2\sqrt{3}$，$AC=2BC=4$，

所以$AB^2+BC^2=AC^2$，所以$BC\perp AB$. …… 2分

因为$AB\cap AA_1=A$，所以$BC\perp$平面ABB_1A_1. …… 3分

又$A_1D\subset$平面ABB_1A_1，所以$BC\perp A_1D$. …… 4分

(2)解：过B作$BH\perp AC$于H，连接B_1H，易证$B_1H\perp AC$，

因为$BH=\frac{2\times2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$，所以$BB_1=\sqrt{19-3}=4$. …… 5分

以B为坐标原点，建立空间直角坐标系$B-xyz$，如图所示，

则$C(0,0,2)$，$D(\sqrt{3},0,0)$，$A_1(2\sqrt{3},4,0)$，$B_1(0,4,0)$. …… 6分

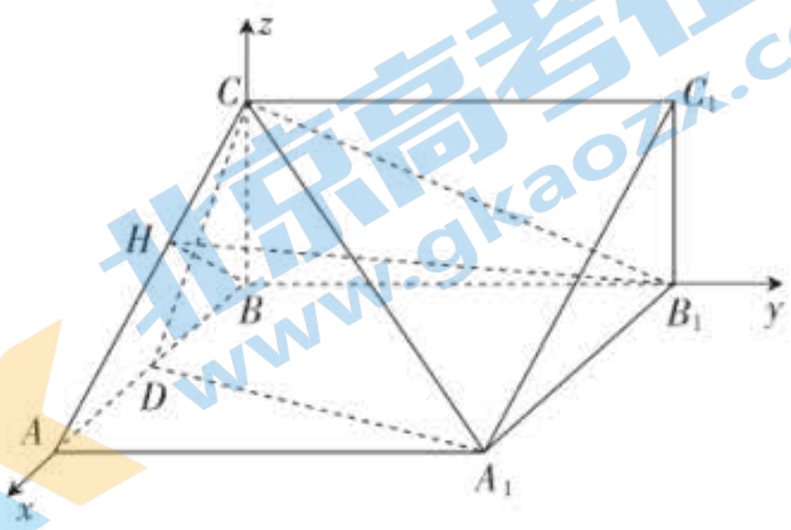
设平面A_1CD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=\sqrt{3}x+4y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=2\sqrt{3}x+4y-2z=0,\end{cases}$ …… 7分

令$x=4$，则$\boldsymbol{n}=(4,-\sqrt{3},2\sqrt{3})$. …… 8分

同理可得平面A_1B_1C的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(0,1,2)$， …… 10分

则$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{31}}=\frac{3\sqrt{465}}{155}$. …… 11分



由图可知，二面角B_1-A_1C-D为钝角，

故二面角B_1-A_1C-D的余弦值为$-\frac{3\sqrt{465}}{155}$. …… 12分

19. 解：(1)补全2×2列联表如下：

	非“环保关注者”	是“环保关注者”	合计
男	10	45	55
女	15	30	45
合计	25	75	100

…… 2分

将2×2列联表中的数据代入公式计算得K^2的观测值$k=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$=\frac{100(45\times15-30\times10)^2}{25\times75\times55\times45}\approx3.03<3.841$， …… 3分

所以在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下，不能认为是否为“环保关注者”与性别有关. …… 4 分

(2)视频率为概率，用户为男“环保达人”的概率为$\frac{3}{5}$，为女“环保达人”的概率为$\frac{2}{5}$， …… 5 分

①抽取的 3 名用户中既有男“环保达人”又有女“环保达人”的概率为

$P=1-\left(\frac{2}{5}\right)^3-\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{18}{25}$. …… 6 分

②X 的取值为 10，20，30，40.

$P(X=10)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$， …… 7 分

$P(X=20)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{13}{32}$， …… 8 分

$P(X=30)=\frac{1}{2}\times C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$， …… 9 分

$P(X=40)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$. …… 10 分

所以 X 的分布列为

X	10	20	30	40
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

…… 11 分

$E(X)=10\times\frac{3}{8}+20\times\frac{13}{32}+30\times\frac{3}{16}+40\times\frac{1}{32}=\frac{75}{4}$. …… 12 分

20. 解：(1)由题知$|CA|+|CB|=|CP|+|CQ|+|AP|+|BQ|=2|CP|+|AB|=4>|AB|$， …… 2 分

所以曲线 G 是以 A，B 为焦点，长轴长为 4 的椭圆(挖去与 x 轴的交点).

由 $2a=4$，$c=\sqrt{2}$，得 $b^2=2$， …… 3 分

所以椭圆 G 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1(y\neq0)$. …… 4 分

(2)当直线 l 的斜率不存在时，直线 MN 的方程为 $x=-1$ 或 $x=1$，此时点 D 不在曲线 G 上，不合题意. …… 5 分

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程是 $y=kx+m$，

联立方程组$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，消去 y，得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，

$\Delta=8(4k^2+2-m^2)>0$，$x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-4}{1+2k^2}$，

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2m}{1+2k^2}$. …… 7 分

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\times\frac{2\sqrt{2}\sqrt{4k^2+2-m^2}}{1+2k^2}$， …… 8 分

点 O 到直线 MN 的距离是 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$. …… 9 分

由$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OD}$，得 $x_D=\frac{-4km}{1+2k^2}$，$y_D=\frac{2m}{1+2k^2}$.

因为点 D 在曲线 C 上，所以有$\frac{\left(\frac{-4km}{1+2k^2}\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{2m}{1+2k^2}\right)^2}{2}=1$，整理得 $1+2k^2=2m^2$. …… 10 分

由题意，四边形 $OMDN$ 为平行四边形，所以四边形 $OMDN$ 的面积为

$S_{OMDN}=|MN|d=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{4k^2+2-m^2}}{1+2k^2}\times\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2\sqrt{2}|m|\sqrt{4k^2+2-m^2}}{1+2k^2}$. …… 11 分

由 $1+2k^2=2m^2$，得 $S_{OMDN}=\sqrt{6}$，故四边形 $OMDN$ 的面积是定值，其定值为$\sqrt{6}$. …… 12 分

21. 解：(1)因为 $g(x)=\frac{2a}{3}x^3+2(1-a)x^2-8x+8a+7$，

所以 $g'(x)=2ax^2+4(1-a)x-8$，所以 $g'(2)=0$， …… 1 分

所以 $a=0$，即 $g(x)=2x^2-8x+7$. …… 2 分

$g(0)=7$，$g(3)=1$，$g(2)=-1$， …… 3 分

所以 $g(x)$在$[0,3]$上的值域为$[-1,7]$. …… 4 分

(2)(ⅰ)当 $a=0$ 时，$g(x)=2x^2-8x+7$，由 $g(x)=0$，得 $x=2\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\in(1,+\infty)$，此时函数 $y=h(x)$ 有三个零点，符合题意. …… 5 分

(ⅱ)当 $a>0$ 时，$g'(x)=2ax^2+4(1-a)x-8=2a(x-2)(x+\frac{2}{a})$. 由 $g'(x)=0$，得 $x=2$. 当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$. 若函数 $y=h(x)$ 有三个零点，则需满足 $g(1)>0$ 且 $g(2)<0$，解得 $0<a<\frac{3}{16}$. …… 6 分

(ⅲ)当 $a<0$ 时，$g'(x)=2ax^2+4(1-a)x-8=2a(x-2)\left(x+\frac{2}{a}\right)$. 由 $g'(x)=0$，得 $x_1=2$，$x_2=-\frac{2}{a}$.

①当 $-\frac{2}{a}<2$，即 $a<-1$ 时，因为 $g(x)_{极大值}=g(2)=\frac{16}{3}a-1<0$，此时函数 $y=h(x)$ 至多有一个零点，不符合题意；

…… 7 分

②当 $-\frac{2}{a}=2$，即 $a=-1$ 时，因为 $g'(x)\leqslant 0$，此时函数 $y=h(x)$ 至多有两个零点，不符合题意；…… 8 分

③当 $-\frac{2}{a}>2$，即 $-1<a<0$ 时，

若 $g(1)<0$，函数 $y=h(x)$ 至多有两个零点，不符题意；…… 9 分

若 $g(1)=0$，得 $a=-\frac{3}{20}$，因为 $g\left(-\frac{2}{a}\right)=\frac{1}{a^2}\left(8a^3+7a^2+8a+\frac{8}{3}\right)$，所以 $g\left(-\frac{2}{a}\right)>0$，此时函数 $y=h(x)$ 有三个零点，符合题意；…… 10 分

若 $g(1)>0$，得 $-\frac{3}{20}<a<0$，由 $g\left(-\frac{2}{a}\right)=\frac{1}{a^2}\left(8a^3+7a^2+8a+\frac{8}{3}\right)$，记 $\varphi(a)=8a^3+7a^2+8a+\frac{8}{3}$，则 $\varphi'(a)>0$，所以 $\varphi(a)>\varphi\left(-\frac{3}{20}\right)>0$，此时函数 $y=h(x)$ 有四个零点，不符合题意. …… 11 分

综上所述：满足条件的实数 $a\in\{-\frac{3}{20}\}\cup[0,\frac{3}{16})$. …… 12 分

22. 解：(1)由 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$ 消去参数，得 $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$，

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$. …… 2 分

由 $\rho=\frac{m}{2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$，整理得 $\rho\sin\theta-\sqrt{3}\rho\cos\theta=m$，…… 3 分

而 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，…… 4 分

所以 $y-\sqrt{3}x=m$，即 C_2 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x-y+m=0$. …… 5 分

(2)由(1)知曲线 C_1 是圆心为 $(\sqrt{3},1)$，半径 $r=2$ 的圆，…… 6 分

则圆心 $(\sqrt{3},1)$ 到直线 $\sqrt{3}x-y+m=0$ 的距离为 $\frac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1+m|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}$. …… 7 分

所以 $|AB|_{\min}=\frac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1+m|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}-2=1$，…… 9 分

解得 $m=4$ 或 $m=-8$. …… 10 分

23. (1)解：由 $f(0)=-1$，得 $1-|a|=-1$，即 $a=\pm 2$. …… 2 分

由 $f(-1)=3$，得 $|a+1|-|a-2|=3$，所以 $a=2$. …… 4 分

(2)证明：由(1)知 $f(x)=|2x-1|-|2x+2|$，…… 5 分

所以 $g(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f(x-1)=|2x-3|-|2x+3|=\begin{cases}6, x\leqslant-\frac{3}{2},\\ -4x, -\frac{3}{2}<x\leqslant\frac{3}{2},\\ -6, x>\frac{3}{2},\end{cases}$ …… 7 分

显然 $g(x)$ 的最大值为 6，即 $t=6$. …… 8 分

因为 $m+n=6(m>0,n>0)$，

所以 $\frac{4}{m}+\frac{9}{n}=\frac{1}{6}(m+n)\left(\frac{4}{m}+\frac{9}{n}\right)=\frac{1}{6}\left(13+\frac{4n}{m}+\frac{9m}{n}\right)$. …… 9 分

因为 $\frac{4n}{m}+\frac{9m}{n}\geqslant 2\sqrt{\frac{4n}{m}\cdot\frac{9m}{n}}=12$（当且仅当 $m=\frac{12}{5}$，$n=\frac{18}{5}$ 时取等号），

所以 $\frac{4}{m}+\frac{9}{n}\geqslant\frac{1}{6}\times(13+12)=\frac{25}{6}$. …… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。