高三数学试卷参考答案

1. D 【解析】本题考查集合的运算，考查数学运算的核心素养.

$M=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2-x-2\leqslant0\}=\{x\in\mathbf{Z}\mid -1\leqslant x\leqslant2\}=\{-1,0,1,2\}$，$N=\{x\mid y=\ln(1-x)\}=(-\infty,1)$，所以 $M\cap N=\{-1,0\}$.

2. A 【解析】本题考查复数的运算，考查数学运算的核心素养.

设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，

因为 $2z+\mathrm{i}\cdot\bar{z}=3$，所以 $2(a+b\mathrm{i})+\mathrm{i}\cdot(a-b\mathrm{i})=3$，即 $(2a+b)+(a+2b)\mathrm{i}=3$，

则 $\begin{cases}2a+b=3,\\a+2b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=-1,\end{cases}$ 即 $z=2-\mathrm{i}$，所以复数 z 的虚部为 -1.

3. B 【解析】本题考查向量的共线，考查逻辑推理的核心素养.

由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向，由 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 可知，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，所以"$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$"是"存在非零实数 x,y，使得 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$"的充分不必要条件.

4. A 【解析】本题考查导数的几何意义，考查数学运算的核心素养.

因为 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x}$，所以 $f'(x)=\dfrac{3x^3-(x^3-1)}{x^2}=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$，则 $f(1)=0$，$f'(1)=3$，

所以所求切线的方程为 $y-0=3(x-1)$，即 $y=3x-3$.

5. B 【解析】本题考查三角恒等变换，考查数学运算的核心素养.

$\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)\cos2\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta}\cdot\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=-\dfrac{9}{10}$.

6. D 【解析】本题考查等差数列的性质，考查数学运算的核心素养.

由等差数列的性质可得 $a_2+a_5+a_8=3a_5=3$，则 $a_5=1$，$2a_4+a_7=2(a_5-d)+a_5+2d=3a_5=3$.

7. D 【解析】本题考查函数的性质，考查直观想象的核心素养.

令 $g(x)=f(x)-1=x^3+x$，则 $g(x)$ 是奇函数且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，由 $f(1-x)+f(2x)>2$，可得 $g(1-x)+1+g(2x)+1>2$，即 $g(1-x)>-g(2x)=g(-2x)$，则 $1-x>-2x$，解得 $x>-1$.

8. C 【解析】本题考查比较大小，考查逻辑推理的核心素养.

设 $f(x)=x-\sin x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)=1-\cos x>0$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数，故 $f(x)=x-\sin x>f(0)=0$，即 $x>\sin x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\dfrac{\pi}{5}<\dfrac{\pi}{5}$.

设 $g(x)=\mathrm{e}^{x-1}-x$，$x\in(0,1)$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-1<0$，故 $g(x)=\mathrm{e}^{x-1}-x$，$x\in(0,1)$ 为减函数，$g(x)>g(1)=0$，即 $\mathrm{e}^{x-1}>x$，$x\in(0,1)$，故 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}=\mathrm{e}^{\frac{3}{4}-1}>\dfrac{3}{4}$，所以 $b>a$.

又因为 $c^8-b^8=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}>0$，所以 $c>b$. 综上，$a<b<c$.

9. AC 【解析】本题考查抽象函数，考查逻辑推理的核心素养.

由 $f(2x+1)$ 为奇函数，$f(x-1)=f(-x-1)$，可知 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，关于直线 $x=-1$ 对称，所以 $f(1)=f(5)=0$. 故选 AC.

10. BCD 【解析】本题考查三角函数的图象，考查数学运算的核心素养.

$f(x)=\sin2x+\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin2x+\sqrt{3}\cos2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，所以 $f(x)$ 的最大值为 2，$f(x)$ 的最小正周期为 π，$f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 对称，$f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增，故选 BCD.

11. BC 【解析】本题考查解三角形的应用，考查数学运算的核心素养.

设 $\angle ABC=\theta$，$AD=x$，则 $\angle ADC=\pi-\theta$，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\theta=13-12\cos\theta$，

在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos(\pi-\theta)=x^2+4x\cos\theta+4$，

所以 $x^2+4x\cos\theta+12\cos\theta-9=0$，解得 $x=-4\cos\theta+3$ 或 $x=-3$，因为 $AD<2$，所以 $0<-4\cos\theta+3<2$，即 $\dfrac{1}{4}<\cos\angle ABC<\dfrac{3}{4}$，故选 BC.

12. BC 【解析】本题考查数列，考查逻辑推理的核心素养.

因为 $A_1=\{0,1\}$，依题意，$A_2=\{1,0,0\}$，设 A_n 中有 a_n 项为 1，b_n 项为 0，所以 $\begin{cases}a_{n+1}=b_n,\\b_{n+1}=2a_n,\end{cases}$ 则 $a_{n+2}=2a_n$，则当 n 为奇数时，$a_n=a_1\cdot(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^{n-1}$，当 n 为偶数时，$a_n=a_2\cdot(\sqrt{2})^{n-2}=(\sqrt{2})^{n-2}$，当 n 为奇数时，$b_n=a_{n+1}=(\sqrt{2})^{n-1}$，当 n 为偶数时，$b_n=a_{n+1}=(\sqrt{2})^n$，所以 A_{100} 中有 2^{49} 个 1，A_{101} 中有 2^{50} 个 0，故 B 正确，A 错误.

当 n 为奇数时，$a_n=b_n$，当 n 为偶数时，$b_n-a_n=(\sqrt{2})^n-(\sqrt{2})^{n-2}=(\sqrt{2})^{n-2}$，$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{100}$ 中 0 的总个数比 1 的总个数多 $1+2+4+\cdots+2^{49}=\dfrac{1-2^{50}}{1-2}=2^{50}-1$，故 C 正确，由 $a_{2k-1}+a_{2k}=(\sqrt{2})^{2k-2}+(\sqrt{2})^{2k-2}=2^k$，所以 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{100}$ 中 1 的总个数为 $2+2^2+2^3+\cdots+2^{50}=2^{51}-2$，故 D 错误.

13. 2 【解析】本题考查平面向量的线性运算，考查数学运算的核心素养.

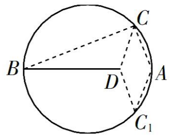
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{\lambda}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB}+\left(1+\dfrac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AC}$，因为 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，所以 $\lambda=2$.

14. 4 【解析】本题考查基本不等式，考查逻辑推理的核心素养.

$\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{a}{b}=\left(\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b}\right)(a-b+b)=2+\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{a-b}{b}\geqslant2+2\sqrt{\dfrac{b}{a-b}\cdot\dfrac{a-b}{b}}=4$，当且仅当 $a=2b$ 时，取得最小值.

15. 30 【解析】本题考查解三角形的应用，考查数学建模的核心素养.

连接 BC，由题可知 $BD=15$ cm，$\angle BCD=45°$，所以 $\dfrac{BD}{DA}=\dfrac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}}=$



$\dfrac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD\cdot\sin\angle BCD}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD}=\dfrac{BC}{AC}=3$，即 $BC=3AC$，

又 $BC^2+AC^2=AB^2=400$，解得 $AC=2\sqrt{10}$ cm，$BC=6\sqrt{10}$ cm，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=60$ cm²，则四边形 $ACDC_1$ 的面积为 $2\times\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=30$ cm².

16. $(-\infty,0)\cup[e^2,+\infty)$ **【解析】本题考查导数的应用，考查逻辑推理的核心素养.**

令 $t=\dfrac{e^{ex}}{x^a}$，则 $\ln t=ex-a\ln x$，由 $f(x)=\dfrac{e^{ex}}{x^a}-ex+a\ln x$，换元可得 $g(t)=t-\ln t$，则 $g'(t)=1-\dfrac{1}{t}=\dfrac{t-1}{t}$，所以 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $g(t)_{\min}=g(1)=1$，

因为 $f(x)=\dfrac{e^{ex}}{x^a}-ex+a\ln x$ 的最小值为 1，所以 $t=\dfrac{e^{ex}}{x^a}=1$ 有解. 当 $a=0$ 时，$t=1$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 内无解，故 $a=0$ 不符合题意，当 $a\neq0$ 时，$ex=a\ln x$，即 $\dfrac{e}{a}=\dfrac{\ln x}{x}$ 有解，令 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，

则 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，所以 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\dfrac{e}{a}\leqslant\dfrac{1}{e}$，解得 $a\geqslant e^2$ 或 $a<0$. 综上，a 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup[e^2,+\infty)$.

17. 解：(1) $f(x)=ax^4+bx^3$，$f'(x)=4ax^3+3bx^2$，…………………………………… 1 分

因为 $f(x)=ax^4+bx^3$ 在 $x=1$ 处取得极值 -1，

所以 $f(1)=a+b=-1$，$f'(1)=4a+3b=0$，…………………………………… 3 分

解得 $a=3$，$b=-4$，经验证，$f(x)=3x^4-4x^3$ 在 $x=1$ 处取得极值 -1，故 $a=3$，$b=-4$. …………………………………… 5 分

(2) $g'(x)=f'(x)-m=12x^3-12x^2-m\geqslant0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，即 $m\leqslant12x^3-12x^2$ 在 $x\in[-1,1]$ 内恒成立. …………………………………… 6 分

令 $h(x)=12x^3-12x^2$，$x\in[-1,1]$，

则 $h'(x)=12x(3x-2)$，令 $h'(x)>0$，得 $-1<x<0$ 或 $\dfrac{2}{3}<x<1$，

所以 $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(\dfrac{2}{3},1)$ 上单调递增，在 $(0,\dfrac{2}{3})$ 上单调递减，………… 8 分

因为 $h(-1)=-24$，$h(\dfrac{2}{3})=-\dfrac{16}{9}$，所以 $h(x)_{\min}=-24$，…………………… 9 分

所以 $m\leqslant-24$，即 m 的取值范围为 $(-\infty,-24]$. …………………… 10 分

18. 解：(1) 因为 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=\dfrac{n^2+n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，

当 $n\geqslant2$ 时，$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{n-1}^2=\dfrac{(n-1)^2+n-1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，…………………… 1 分

两式相减得 $a_n^2=n$，因为 $a_n>0$，可得 $a_n=\sqrt{n}$，$n\geqslant2$，…………………………………… 3 分

令 $n=1$，可得 $a_1=1$，满足 $a_n=\sqrt{n}$，…………………………………… 5 分

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\sqrt{n}$. …………………………………… 6 分

(2) $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，

所以 $S_n=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1$. ………… 12 分

19. 解：(1) 因为 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，…………………………………… 1 分

即 $c(\sin B-\sin C)+(a-b)(\sin A+\sin B)=0$，…………………………………… 2 分

所以由正弦定理可得 $c(b-c)+(a-b)(a+b)=0$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$，…………………… 3 分

由余弦定理可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，…………………………………… 4 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. …………………………………… 5 分

(2) 由 $AD=BD$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，得 $\angle CDB=\dfrac{2\pi}{3}$，…………………………………… 6 分

由余弦定理可得 $BD^2+DC^2-BC^2=2BD\cdot DC\cos\dfrac{2\pi}{3}$，即 $BD^2+DC^2-9=-BD\cdot DC$，…………………………………… 7 分

因为 $BD^2+DC^2\geqslant2BD\cdot DC$（当且仅当 $BD=DC$ 时，等号成立），…………………… 8 分

所以 $BD^2+DC^2-9=-BD\cdot DC\geqslant2BD\cdot DC-9$，…………………………………… 10 分

解得 $BD\cdot DC\leqslant3$（当且仅当 $BD=DC$ 时，等号成立），…………………………………… 11 分

所以 $\triangle BCD$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}BD\cdot DC\sin\angle CDB\leqslant\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，所以 $\triangle BCD$ 面积的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. …………………………………… 12 分

20. 解：(1) 由题可知 $\dfrac{2n+4}{a_{n+1}}-\dfrac{2n+2}{a_n}=\dfrac{2a_n+2n+2}{a_n}-\dfrac{2n+2}{a_n}=\dfrac{2a_n}{a_n}=2$，…………………… 2 分

所以 $\{\dfrac{2n+2}{a_n}\}$ 是以 2 为公差的等差数列，…………………………………… 3 分

则 $\dfrac{2n+2}{a_n}=\dfrac{4}{a_1}+2(n-1)=2n+1$，即 $a_n=\dfrac{2n+2}{2n+1}$. …………………………………… 5 分

(2) 由 $a_1a_2a_3\cdots a_n\geqslant m\sqrt{2n+3}$，可得 $\dfrac{a_1a_2a_3\cdots a_n}{\sqrt{2n+3}}\geqslant m$，…………………………………… 6 分

设 $f(n)=\dfrac{a_1a_2a_3\cdots a_n}{\sqrt{2n+3}}$，$\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=\dfrac{\dfrac{a_1a_2a_3\cdots a_{n+1}}{\sqrt{2n+5}}}{\dfrac{a_1a_2a_3\cdots a_n}{\sqrt{2n+3}}}=\dfrac{2n+4}{2n+3}\cdot\dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}}=\dfrac{2n+4}{\sqrt{(2n+3)(2n+5)}}=$

$\dfrac{2n+4}{\sqrt{4n^2+16n+15}}>\dfrac{2n+4}{\sqrt{4n^2+16n+16}}=\dfrac{2n+4}{\sqrt{(2n+4)^2}}=1$，…………………………………… 9 分

所以 $f(n+1)>f(n)$，即当 n 增大时，$f(n)$ 也增大， …………………………………… 10 分

所以只需 $m \leqslant f(n)_{\min}$ 即可. 因为 $f(n)_{\min}=f(1)=\frac{4}{3}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$， …………………… 11 分

即 $m \leqslant \frac{4\sqrt{5}}{15}$，所以正数 m 的最大值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$. ………………………………………… 12 分

21.(1)证明：因为 a 是 b 和 $b+c$ 的等比中项，所以 $a^2=b(b+c)$，即 $a^2=b^2+bc$， ………… 1 分

由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，故 $\cos A=\frac{c^2-bc}{2bc}=\frac{c-b}{2b}$，即 $b=c-2b\cos A$， …… 3 分

由正弦定理可得 $\sin B=\sin C-2\sin B\cos A=\sin(A+B)-2\sin B\cos A=\sin A\cos B+\cos A\sin B-2\sin B\cos A=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)$， …………………… 4 分

又 $A,B\in(0,\pi)$，所以 $B=A-B$，即 $A=2B$. ………………………………………………… 5 分

(2)解：由(1)可知 $\begin{cases}0<B<\pi,\\0<A=2B<\pi,\\0<C=\pi-3B<\pi,\end{cases}$ 解得 $B\in(0,\frac{\pi}{3})$，$A\in(0,\frac{2\pi}{3})$， ………………… 7 分

$2\sin A-\sin(B-C)=2\sin A-\sin(B-\pi+3B)=2\sin A+\sin 4B=2\sin A+\sin 2A$， ……… …………………………………………………………………………………… 8 分

令 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$，$x\in(0,\frac{2\pi}{3})$，

$f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=2\cos x+2(2\cos^2 x-1)=4\cos^2 x+2\cos x-2=2(\cos x+1)\cdot(2\cos x-1)$. ………………………………………………………………………… 9 分

令 $f'(x)>0$，得 $\cos x>\frac{1}{2}$，即 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上单调递增；

令 $f'(x)<0$，得 $\cos x<\frac{1}{2}$，即 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ 上单调递减. …………………… 10 分

故 $f(x)\in(0,\frac{3\sqrt{3}}{2}]$，即 $2\sin A-\sin(B-C)$ 的取值范围为 $(0,\frac{3\sqrt{3}}{2}]$. ……………… 12 分

22.(1)解：因为 $f(x)=\ln x+\frac{m}{x}-3$，则 $f'(x)=\frac{x-m}{x^2}$， ………………………………… 1 分

当 $m\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不符合题意， ………… 2 分

当 $m>0$ 时，$f'(x)<0$ 的解集为 $(0,m)$，$f'(x)>0$ 的解集为 $(m,+\infty)$，

即 $f(x)$ 的单调增区间为 $(m,+\infty)$，单调减区间为 $(0,m)$， ……………………………… 3 分

依题意 $f(x)_{\min}=f(m)=1+\ln m-3<0$，解得 $m\in(0,e^2)$，即 m 的取值范围为 $(0,e^2)$. … …………………………………………………………………………………… 5 分

(2)证明：不妨设 $a<b$，则 $0<a<m<b$，要证 $ab<me^2$，则只要证 $m<b<\frac{me^2}{a}$，

即证 $f(b)<f(\frac{me^2}{a})$，即证 $f(a)<f(\frac{me^2}{a})$， …………………………………………… 6 分

即证 $3<\frac{a}{e^2}-\ln a+\ln m+2$，$a\in(0,m)$，

而 $\frac{m}{a}+\ln a=3\Leftrightarrow m=a(3-\ln a)$，即证 $1<\frac{a}{e^2}+\ln(3-\ln a)$，$a\in(0,m)$. …………… 7 分

令 $T(x)=\frac{x}{e^2}+\ln(3-\ln x)$，$x\in(0,e^2)$，则 $T'(x)=-\frac{1}{x(3-\ln x)}+\frac{1}{e^2}$，

设 $G(x)=x(3-\ln x)$，$x\in(0,e^2)$，则 $G'(x)=2-\ln x>0$，

即 $G(x)$ 在 $(0,e^2)$ 上单调递增，则有 $0<G(x)<G(e^2)=e^2$， ……………………………… 9 分

即 $T'(x)<0$，$T(x)$ 在 $(0,e^2)$ 上单调递减，而 $(0,m)\subseteq(0,e^2)$， ……………………… 10 分

当 $x\in(0,m)$ 时，$T(x)>T(m)>T(e^2)=1$， …………………………………………… 11 分

则当 $x\in(0,m)$ 时，$1<\frac{x}{e^2}+\ln(3-\ln x)$ 成立，故有 $ab<me^2$ 成立. ……………………… 12 分