2023 北京二十中高三 10 月月考

数　　学

（时间：<u>120</u>分钟　　满分：<u>150</u>分 ）

第一部分（选择题，共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|\ x>2\}, B=\{x|(x-1)(x-3)<0\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{x|\ x>1\}$　　B. $\{x|2<x<3\}$

C. $\{x|1<x<3\}$　　D. $\{x|\ x>2$ 或 $x<1\}$

2. 若 $z(1-i)=2i$，则在复平面内 z 对应的点位于（　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 下列函数为奇函数且在 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是（　）

A. $y=\sqrt{x}$　　B. $y=2^x$

C. $y=x+\frac{1}{x}$　　D. $y=x+\sin x$

4. 设 $a,b\in R$，且 $a<b<0$，则（　）

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$

C. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　D. $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 和角 β 的顶点均与原点 O 重合，始边均与 x 轴的非负半轴重合，它们的终边关于 x 轴对称，若 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，则 $\cos\beta=$（　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

6. 已知函数 $f(x)=1-2\sin^2 x$，则下列命题正确的是（　）

A. $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增　　B. $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减

C. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ 内单调递增　　D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ 内单调递减

7. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}$ ，则该三角形的形状一定是（　）

A. 等腰三角形

B. 等腰直角三角形

C. 等腰三角形或直角三角形

D. 等边三角形

8. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin\omega x(\omega>0)$，则"函数 $f\left(x\right)$ 的图象经过点 $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$"是"函数 $f\left(x\right)$ 的图象经过点 $\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$"的（　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 将函数 $f\left(x\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\omega x\right),(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，且 $g\left(0\right)=1$，下列说法错误的是（　）

A. $g\left(x\right)$ 为偶函数

B. $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

C. 当 $\omega=5$ 时，$g\left(x\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有 3 个零点

D. 若 $g\left(x\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{5}\right]$ 上单调递减，则 ω 的最大值为 9

10. 已知数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n(0\le a_1<a_2<\cdots<a_n,n\ge3)$ 具有性质 P:对任意 $i,j\left(1\le i\le j\le n\right),a_j+a_i$ 与 a_j-a_i 两数中至少有一个是该数列中的一项，给出下列三个结论：

①数列 0，2，4，6 具有性质 P；

②若数列 A 具有性质 P，则 $a_1=0$；

③若数列 $a_1,a_2,a_3(0\le a_1<a_2<a_3)$ 具有性质 P，则 $a_1+a_3=2a_2$.

其中，正确结论的个数是（　）

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

第二部分（非选择题，共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\log_2\left(x-1\right)}$ 的定义域为__________

12. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=$__________

13. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n.若$S_3=a_3$，且$a_3\neq 0$，则$\dfrac{S_4}{S_3}=$__________

14. 在$\triangle ABC$中，$a=4$，$b=m$，$\sin A-\cos A=0$.

（1）若$m=4\sqrt{2}$，则$c=$_______；

（2）当$m=$_______（写出一个可能的值）时，满足条件的$\triangle ABC$有两个.

15. 设函数$f(x)$的定义域为D，若对于任意$x_1\in D$，存在$x_2\in D$，使得$f(x_1)f(x_2)=1$，则称函数$f(x)$具有性质 M，给出下列四个结论：

①函数$y=x^3-x$不具有性质 M；

②函数$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$具有性质 M；

③若函数$y=\log_8(x+2)$，$x\in[0,t]$具有性质 M，则$t=510$；

④若函数$y=\dfrac{3\sin x+a}{4}$具有性质 M，则$a=5$.

则正确的序号为__________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出相应文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$中，$a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$2+a_4=b_3$.

(Ⅰ) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(Ⅱ) 求数列$\{a_n+b_n\}$的前 n 项和S_n.

17. 已知函数$f(x)=\sin 2x+2\cos^2 x+m$.

（1）求函数$f(x)$的最小正周期；

（2）在下列三个条件中，选择一个作为已知，使得实数m的值唯一确定，求函数$f(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最小值.

条件①：$f(x)$的最大值为1；

条件②：$f(x)$的一个对称中心为$(\dfrac{3\pi}{8},0)$；

条件③：$f(x)$的一条对称轴为$x=\dfrac{\pi}{8}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

18. 在ΔABC中，$a=7, b=8, A=\dfrac{\pi}{3}$.

(Ⅰ)求$\sin B$的值；

(Ⅱ)若ΔABC是钝角三角形，求BC边上的高.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-6x$，函数 $g\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2+a$，

（1）已知直线 l 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线，且 l 与曲线 $y=g\left(x\right)$ 相切，求 a 的值；

（2）若方程 $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ 有三个不同实数解，求实数 a 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x)=x-x^2+3\ln x$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 2 的切线方程；

（2）证明：$f(x)\le 2x-2$；

（3）确定实数 k 的取值范围，使得存在 $x_0>1$，当 $x\in(1,x_0)$ 时，恒有 $f(x)>k(x-1)$.

21. 已知点列 $T:P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),\cdots,P_k(x_k,y_k)$（$k\in\mathbf{N}^*$，$k\ge 2$）满足 $P_1(1,1)$，且 $\begin{cases}x_i=x_{i-1}+1,\\ y_i=y_{i-1}\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x_i=x_{i-1},\\ y_i=y_{i-1}+1\end{cases}$（$i=2,3,\cdots,k$）中有且仅有一个成立.

（I）写出满足 $k=4$ 且 $P_4(3,2)$ 的所有点列；

（II）证明：对于任意给定的 k（$k\in\mathbf{N}^*$，$k\ge 2$），不存在点列 T，使得 $\sum\limits_{i=1}^{k}x_i+\sum\limits_{i=1}^{k}y_i=2^k$；

（III）当 $k=2n-1$ 且 $P_{2n-1}(n,n)$（$n\in\mathbf{N}^*,n\ge 2$）时，求 $\sum\limits_{i=1}^{k}x_i\times\sum\limits_{i=1}^{k}y_i$ 的最大值.

参考答案

第一部分（选择题，共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】B

【分析】先求解一元二次不等式得到集合 B，再求出 $A\cap B$ 即可.

【详解】$B=\{x|(x-1)(x-3)<0\}=\{x|1<x<3\}$，所以 $A\bigcap B=\{x|2<x<3\}$.

故选：B.

2.【答案】B

【分析】

先求解出复数 z，然后根据复数的几何意义判断.

【详解】因为 $z(1-i)=2i$，所以 $z=\dfrac{2i}{1-i}=\dfrac{2i(1+i)}{2}=-1+i$，

故 z 对应的点位于复平面内第二象限.

故选：B.

【点睛】本题考查复数的除法运算及复数的几何意义，属于基础题. 化简计算复数的除法时，注意分子分母同乘以分母的共轭复数.

3.【答案】D

【分析】根据函数的奇偶性和单调性对每个选项逐个判断即可.

【详解】对于 A，$y=\sqrt{x}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，不关于原点对称，故 $y=\sqrt{x}$ 不是奇函数，故 A 错误；

对于 B, $f(-x)=2^{-x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}\neq-2^{x}=-f(x)$,所以 $y=2^{x}$ 不是奇函数，故 B 错误；

对于 C，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$y=x+\dfrac{1}{x}\geq2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，y 有最小值，

故 $\mathrm{y}=\mathrm{x}+\dfrac{1}{\mathrm{x}}$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$(1,+\infty)$ 单调递增，故 C 错误；

对于 D，$y=x+\sin x$，则 $y'=1+\cos x$，

因为当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$-1\leq\cos x\leq1$，则 $y'=1+\cos x\geq0$，函数 $y=x+\sin x$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 时是增函数，

且 $y=x+\sin x,x\in\mathbf{R}$，满足 $f(-x)=-x+\sin(-x)=-(x+\sin x)=-f(x)$，所以函数 $y=x+\sin x$ 是奇函数，故 D 正确.

故选：D.

4.【答案】C

【分析】由$a<b<0$，可得$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，A 错；利用作差法判断 B 错；利用基本不等式可得 C 正确；由$\frac{a+b}{2}<0$，而$\sqrt{ab}>0$，可得 D 错.

【详解】$\because a<b<0$，$\therefore \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 A 错；

$\because a<b<0$，$\therefore a^2>b^2$，即$b^2-a^2<0, ab>0$，可得$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}<0$，$\therefore \frac{b}{a}<\frac{a}{b}$，故 B 错；

$\because a<b<0$，$\therefore \frac{b}{a}>0, \frac{a}{b}>0$，且$\frac{b}{a}\neq\frac{a}{b}$，则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，故 C 正确；

$\because a<b<0$，$\therefore \frac{a+b}{2}<0$，而$\sqrt{ab}>0$，则$\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$，故 D 错.

故选：C

5. 【答案】A

【分析】由题可得$\beta=-\alpha$，后由诱导公式可得答案.

【详解】因角α和角β的终边关于x轴对称，则$\beta=-\alpha$，则$\cos\beta=\cos(-\alpha)=\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

故选：A

6. 【答案】B

【分析】由倍角余弦公式有$f(x)=\cos 2x$，根据余弦型函数的性质判断$f(x)$在对应区间的单调性.

【详解】由$f(x)=1-2\sin^2 x=\cos 2x$

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$2x\in(0,\pi)$，易知$f(x)$单调递减；

当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，则$2x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，易知$f(x)$不单调；

所以 A、C、D 错，B 对.

故选：B

7. 【答案】C

【分析】$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$由正弦定理化简为$\sin 2A=\sin 2B$，然后在$\triangle ABC$分析，即$A=B$，或$2A+2B=\pi$，从而得到结论.

【详解】$\because \frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$，$\therefore a\cos A=b\cos B$，

根据正弦定理可知：$\sin A\cos A=\sin B\cos B$，

$\therefore \sin 2A=\sin 2B$，

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中， $A=B$，或 $2A+2B=\pi$，即 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$，即 $C=\dfrac{\pi}{2}$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

故选：C

8.【答案】B

【分析】根据 $f\left(x\right)$ 过 $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$、$\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$ 分别求出对应 ω，再求 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$、$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，结合充分、必要性定义判断条件间的关系.

【详解】若 $f\left(x\right)$ 过点 $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$，则 $\sin\dfrac{\omega\pi}{2}=0\Rightarrow\dfrac{\omega\pi}{2}=k\pi,k\in Z$，即 $\omega=2k,k\in Z$，

又 $\omega>0$，则 $\omega=2k,k\in N^*$，此时 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\omega\pi}{4}=\sin\dfrac{k\pi}{2},k\in N^*$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\in\{-1,0,1\}$；

若 $f\left(x\right)$ 过点 $\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$，则 $\sin\dfrac{\omega\pi}{4}=1\Rightarrow\dfrac{\omega\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$，即 $\omega=8k+2,k\in Z$，

又 $\omega>0$，则 $\omega=8k+2,k\in N$，此时 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\omega\pi}{2}=\sin(4k+1)\pi,k\in N$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$；

综上，“函数 $f\left(x\right)$ 的图象经过点 $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$”是“函数 $f\left(x\right)$ 的图象经过点 $\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$”的必要不充分条件.

故选：B

9.【答案】D

【分析】先用诱导公式进行变形，再由平移变换和两角和的正弦公式化简得出函数 $g\left(x\right)$ 的解析式，利用定义得出奇偶性，进而判断 A，将 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 代入函数 $g\left(x\right)$，即可判断 B，由余弦函数的性质可判断 C、D.

【详解】由 $f\left(x\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\omega x\right)=\sin\omega x,(\omega>0)$，

其图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，

则 $g(x)=f(x+\dfrac{\pi}{2})=\sin[\omega(x+\dfrac{\pi}{2})]=\sin(\omega x+\omega\dfrac{\pi}{2})$，

又 $g\left(0\right)=1$，则 $g(0)=\sin\dfrac{\pi\omega}{2}=1$，得 $\cos\dfrac{\pi\omega}{2}=0$，

则 $g(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{2}\omega\right)=\sin\omega x\cdot\cos\dfrac{\pi\omega}{2}+\cos\omega x\cdot\sin\dfrac{\pi\omega}{2}=\cos\omega x$，

对 A，函数 $g\left(x\right)$ 的定义域为 R，$g(-x)=\cos(-\omega x)=\cos\omega x=g(x)$，则函数 $g\left(x\right)$ 为偶函数，A 正确；

对 B，$g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\omega\right)=\cos\dfrac{\pi\omega}{2}=0$，B 正确；

对 C，当 $\omega=5$ 时，$g(x)=\cos 5x$，由 $5x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，得 $x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5},k\in Z$，

$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 x 可取 $\frac{\pi}{10},\frac{3\pi}{10},\frac{\pi}{2}$，当 $\omega=5$ 时，$g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有 3 个零点，C 正确；

对 D，由 $2k\pi\le\omega x\le\pi+2k\pi,k\in Z$，解得 $x\in\left[\frac{2k\pi}{\omega},\frac{\pi}{\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right],k\in Z$，

则函数 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{\omega}\right]$ 单调递减，

因为 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{5}\right]$ 上单调递减，所以 $\frac{\pi}{5}\le\frac{\pi}{\omega}$，解得 $0<\omega\le 5$，即 ω 的最大值为 5，D 错误.

故选：D.

10.【答案】A

【分析】分别求得各命题中的 a_j+a_i 与 a_j-a_i，根据定义，判断真假即可.

【详解】①数列 0，2，4，6，$(2+0,2-0)$，$(4+0,4-0)$，$(6+0,6-0)$，$(4+2,4-2)$，$(6+2,6-2)$，$(6+4,6-4)$ 这 6 组数都满足 a_j+a_i 和 $a_j-a_i(1\le i\le j\le 4)$ 两数中至少有一个是该数列中的一项，所以数列 0，2，4，6 具有性质 P，故①正确；

②若数列 A 具有性质 P，则 $a_n+a_n=2a_n$ 与 $a_n-a_n=0$ 两数中至少有一个是该数列中的一项，

$\because 0\le a_1<a_2\cdots<a_n$，$n\ge 3$，而 $2a_n$ 不是该数列中的项，$\therefore$ 0 是该数列中的项，

$\therefore a_1=0$，故②正确；

③$\because$ 数列 a_1，a_2，a_3 具有性质 P，$0\le a_1<a_2<a_3$，

由②，$a_1+a_3=a_3$，$a_3-a_1=a_3$，$a_1+a_2=a_2$，$a_2-a_1=a_2$ 都是该数列中的项，

$\therefore a_2+a_3$ 与 a_3-a_2 至少有一个是该数列中的项，

易知 a_2+a_3 不是该数列的项，则 a_3-a_2 是该数列中的一项，即 $a_3-a_2=a_1$ 或 a_2 或 a_3，

若 $a_3-a_2=a_1$，则 $a_3=a_1+a_2$，即 $a_3=a_2$，与 $a_2<a_3$ 矛盾；

若 $a_3-a_2=a_2$，则 $a_3=2a_2$，即 $a_1+a_3=2a_2$；

若 $a_3-a_2=a_3$，则 $a_2=0$，与 $a_1<a_2$ 矛盾，

综上，$a_1+a_3=2a_2$，故③正确.

故选：A.

第二部分（非选择题，共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】$(1,2)\cup(2,+\infty)$

【分析】由对数及分式的性质列不等式组求定义域即可.

【详解】由解析式知：$\begin{cases}x-1>0\\ \log_2(x-1)\neq 0\end{cases}\Rightarrow 1<x<2$ 或 $x>2$，

所以函数定义域为 $(1,2)\cup(2,+\infty)$.

故答案为：$(1,2)\cup(2,+\infty)$

12.【答案】$-\frac{1}{3}$

【分析】由诱导公式求解即可.

【详解】由诱导公式可得：$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha=-\frac{1}{3}$，

故答案为：$-\frac{1}{3}$.

13.【答案】$\frac{8}{3}$##$2\frac{2}{3}$

【分析】利用等差数列的通项公式及求和公式得出数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 与公差 d 的关系式，表示出 S_3,S_4 即可求出结果.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $S_3=a_3$，得 $3a_1+3d=a_1+2d$，解得 $d=-2a_1$，

由 $a_3\neq 0$，得 $a_1\neq 0$，所以 $\frac{S_4}{S_3}=\frac{4a_1+6d}{3a_1+3d}=\frac{-8a_1}{-3a_1}=\frac{8}{3}$.

故答案为：$\frac{8}{3}$

14.【答案】 ①. 4 ②. 5（答案不唯一）

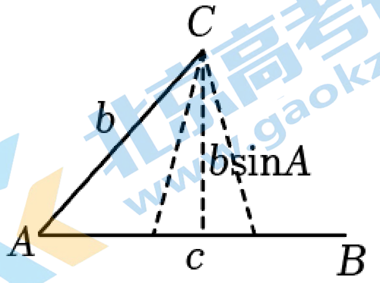
【分析】（1）根据 $\sin A-\cos A=0$ 得到 $A=\frac{\pi}{4}$，然后利用余弦定理求 c 即可；（2）根据 $\triangle ABC$ 有两个得到 $b\sin A<a<b$，然后解不等式即可.

【详解】（1）因为 $\sin A-\cos A=0$，所以 $\tan A=1$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{32+c^2-16}{8\sqrt{2}c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

整理得 $(c-4)^2=0$，解得 $c=4$；

（2）



由图可知，当$b\sin A<a<b$时，$\triangle ABC$有两个，即$\frac{\sqrt{2}}{2}m<4<m$，解得$4<m<4\sqrt{2}$.

故答案为：4；5（答案不唯一）.

15.【答案】①③

【分析】对每个选项中的具体函数，先求定义域和值域，再结合题中函数性质M的定义进行判断或特殊值验证进行说明，即可判断得到答案.

【详解】解：由题意，函数$y=f(x)$的定义域为D，若对任意$x_1\in D$，存在$x_2\in D$，使得$f(x_1)\cdot f(x_2)=1$，则称函数$y=f(x)$具有性质M.

对于①，函数$y=x^3-x$，定义域为R，当$x_1=0\in R$时，显然不存在$x_2\in R$，使得$f(x_1)\cdot f(x_2)=1$，故不具备性质M，故选项①正确；

对于②，函数$y=f\left(x\right)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，定义域为$R$，关于原点对称，且满足$f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，故函数为偶函数，$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\ge\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=1$，当且仅当$x=0$时等号成立，即值域为$[1，+\infty)$，

对任意的$x_1>0$，$f(x_1)>1$，要使得$f(x_1)\cdot f(x_2)=1$，则需$f(x_2)<1$，

而不存在$x_2\in R$，使得$f(x_2)<1$，故不具备性质M，故选项②错误；

对于③，函数$y=\log_8(x+2)$在$[0，t]$上是单调递增函数，定义域为$[0，t]$，其值域为$[\log_8 2，\log_8(t+2)]$，

要使得其具有M性质，则对任意的$x_1\in[0，t]$，$f(x_1)\in[\log_8 2，\log_8(t+2)]$，总存在$x_2\in[0，t]$，

$f(x_2)=\frac{1}{f(x_1)}\in[\frac{1}{\log_8(t+2)},\frac{1}{\log_8 2}]\subseteq[\log_8 2，\log_8(t+2)]$，

即$\begin{cases}\frac{1}{\log_8(t+2)}\geqslant\log_8 2\\ \frac{1}{\log_8 2}\leqslant\log_8(t+2)\end{cases}$，即$\begin{cases}\log_8 2\cdot\log_8(t+2)\leqslant 1\\ \log_8 2\cdot\log_8(t+2)\geqslant 1\end{cases}$，所以$\log_8 2\cdot\log_8(t+2)=1$，

故$\log_8(t+2)=\frac{1}{\log_8 2}=\log_2 8=3$，所以$t+2=8^3$，故$t=510$，故选项③正确；

对于④，函数$y=\frac{3\sin x+a}{4}$具有性质M，定义域为R，使得$\sin x\in[-1，1]$，

一方面函数值不可能为零，即$3\sin x+a\neq 0$对任意的x恒成立，而$3\sin x\in[-3，3]$，故$a>3$或$a<-3$，

另一方面，$y=\frac{4}{3\sin x+a}$的值域是$y=\frac{3\sin x+a}{4}$值域的子集，$y=\frac{3\sin x+a}{4}$的值域为$[\frac{a-3}{4},\frac{a+3}{4}]$，

$y=\frac{4}{3\sin x+a}$的值域为$[\frac{4}{a+3},\frac{4}{a-3}]$，

要满足题意，只需 $\begin{cases}\dfrac{4}{a+3}\geq\dfrac{a-3}{4}\\ \dfrac{4}{a-3}\leq\dfrac{a+3}{4}\end{cases}$，

当 $a<-3$ 时，$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}\leq 1$，$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}\geq 1$，即 $\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}=1$；

当 $a>3$ 时，$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}\geq 1$，$\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}\leq 1$，即 $\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}=1$；

故 $\dfrac{4}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a-3}=1$，即 $(a-3)(a+3)=16$，即 $a^2-9=16$，解得 $a=\pm 5$，故选项④错误.

故正确结论的序号是①③.

故答案为：①③.

三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出相应文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（Ⅰ）$a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$（Ⅱ）$S_n=n^2+\dfrac{3^n-1}{2}$

【分析】(Ⅰ)利用已知条件列出方程组，求出数列的公差与公比，然后求解 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；(Ⅱ)化简数列的通项公式，利用分组求和求解即可.

【详解】(Ⅰ)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q.

依题意，得 $\begin{cases}1+d=q\\ 2+(1+3d)=q^2\end{cases}$.

解得 $\begin{cases}d=2\\ q=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}d=-1\\ q=0\end{cases}$.(舍去)

所以 $a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$.

(Ⅱ)因为 $a_n+b_n=2n-1+3^{n-1}$，

所以 $S_n=[1+3+5+\ldots+(2n-1)]+(1+3+3^2+\ldots+3^{n-1})$

$=\dfrac{n[1+(2n-1)]}{2}+\dfrac{1-3^n}{1-3}$

$=n^2+\dfrac{3^n-1}{2}$.

【点睛】本题考查等差数列以及等比数列的通项公式的求法，数列求和的应用，考查计算能力，是基础题

17.【答案】(1) π；

(2) 详见解析.

【分析】(1) 函数为化简 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+1+m$ 求解；

（2）选择条件①由 $f(x)$ 的最大值为1，求 $m=-\sqrt{2}$，再利用正弦函数的性质求解；选择条件②：由 $f(x)$ 的一个对称中心为 $(\frac{3\pi}{8},0)$，求得 $m=-1$，再利用正弦函数的性质求解；选择条件③：由 $f(x)$ 的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{8}$，实数 m 的值无法确定.

【小问 1 详解】

解： $f(x)=\sin 2x+2\cos^2 x+m$，

$=\sin 2x+\cos 2x+1+m$，

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1+m$，

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；

【小问 2 详解】

选择条件①：

由 $f(x)$ 的最大值为1，可知 $\sqrt{2}+1+m=1$，

所以 $m=-\sqrt{2}$

所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1-\sqrt{2}$，

因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$，

所以 当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)$ 取得最小值 $-\sqrt{2}$；

选择条件②：

由 $f(x)$ 的一个对称中心为 $(\frac{3\pi}{8},0)$，可知 $\sqrt{2}\sin\left(2\times\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)+1+m=0$，

所以 $m=-1$，

所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，

因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$，

所以 当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，

$f(x)$ 取得最小值 -1

条件③：由 $f(x)$ 的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{8}$，实数 m 的值无法确定，不满足题意；

综上：选择条件①： $f(x)$ 取得最小值 $-\sqrt{2}$；

选择条件②： $f(x)$ 取得最小值 -1

选择条件③：实数 m 的值无法确定，不满足题意；

18. 【答案】（Ⅰ）$\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$ （Ⅱ）$\frac{12\sqrt{3}}{7}$

【分析】（Ⅰ）根据正弦定理，结合题中条件，可直接求出结果；

（Ⅱ）先由余弦定理求出 $c=5$ 或 $c=3$，根据 ΔABC 是钝角三角形，分别讨论 $c=5$ 和 $c=3$，即可求出结果.

【详解】（Ⅰ）在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a=7$，$b=8$，$A=\frac{\pi}{3}$，

所以由正弦定理 $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$

得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{8}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

（Ⅱ）由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

得 $49=64+c^2-2\times 8\times c\times\frac{1}{2}$

即 $c^2-8c+15=0$，解得 $c=5$ 或 $c=3$

因为 $b>a,b>c$，所以 $\angle B$ 为 $\triangle ABC$ 中最大的角，

当 $c=5$ 时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}>0$，与 $\triangle ABC$ 为钝角三角形矛盾，舍掉

当 $c=3$ 时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}<0$，$\triangle ABC$ 为钝角三角形，

所以 $c=3$

设 BC 边上的高为 h，所以 $h=c\sin B=\frac{12\sqrt{3}}{7}$

【点睛】本题主要考查解三角形，熟记正弦定理和余弦定理即可，属于常考题型.

19. 【答案】（1）18

（2）$\left(-\frac{27}{2},\frac{22}{3}\right)$

【分析】（1）求导得到导函数，计算 $f'(0)=-6$，$f(0)=0$，得到切线方程，再根据 $\Delta=36-2a=0$ 得到答案.

（2）变换得到 $a=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x$，设 $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x$，求导得到函数的单调区间，画出函数图像，根据图像得到答案.

【小问 1 详解】

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-6x$，则 $f'(x)=x^2-6$，则 $f'(0)=-6$，$f(0)=0$，

故切线 l 方程为：$y=-6x$，

l 与曲线 $y=g(x)$ 相切，联立得到 $\frac{1}{2}x^2+a=-6x$，即 $\frac{1}{2}x^2+6x+a=0$，

$\Delta=36-2a=0$，解得 $a=18$.

【小问 2 详解】

$f(x)=g(x)$，即 $\frac{1}{3}x^3-6x=\frac{1}{2}x^2+a$，则 $a=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x$，

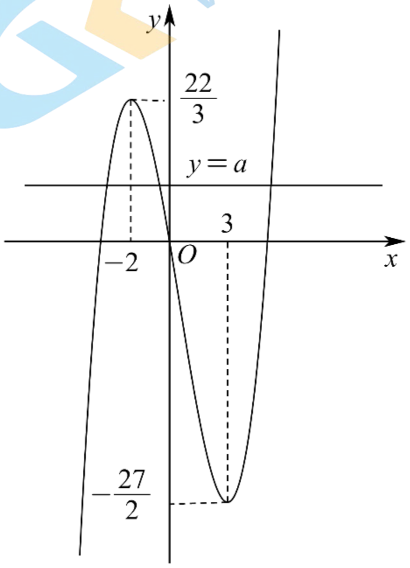
设 $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x$，则 $F'(x)=x^2-x-6=(x-3)(x+2)$，

当 $x>3$ 时，$F'(x)>0$，函数单调递增；

当 $-2<x<3$ 时，$F'(x)<0$，函数单调递减；

当 $x<-2$ 时，$F'(x)>0$，函数单调递增；

$F(3)=-\frac{27}{2}$，$F(-2)=\frac{22}{3}$，画出函数图像：



根据图像知：$-\frac{27}{2}<a<\frac{22}{3}$.

20.【答案】(1) $y=2x-2$；(2) 见解析；(3) $(-\infty,2)$

【分析】

(1)求导，根据导数的几何意义列出方程求出切点坐标，按照点斜式写出方程；

(2)构造函数利用导数求出最值即可证明不等式；

(3)分类讨论，当 $k=2$ 时，不满足题意；当 $k>2$ 时，根据不等式的性质得出不满足题意；当 $k<2$ 时，构造函数，利用导数证明即可.

【详解】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

由 $f(x)=x-x^2+3\ln x$ 得 $f'(x)=1-2x+\dfrac{3}{x}$.

令 $f'(x)=2$，即$1-2x+\dfrac{3}{x}=2$，得 $x=1$， $x=-\dfrac{3}{2}$ （舍）.

又 $f(1)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 2 的切线方程为 $y=2x-2$

（2）设 $g(x)=f(x)-(2x-2)=3\ln x-x^2-x+2$，则

$$g'(x)=\frac{3}{x}-2x-1=\frac{-2x^2-x+3}{x}=\frac{-(2x+3)(x-1)}{x}.$$

令 $g'(x)=0$ 得 $x=1$， $x=-\dfrac{3}{2}$ （舍）.

当 $g'(x)>0$ 时， $0<x<1$；

当 $g'(x)<0$时， $x>1$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $g(x)\le g(1)=0$.

所以 $f(x)\le 2x-2$.

（3）由（2）可知，

① 当 $k=2$ 时， $f(x)\le 2(x-1)$，

所以不存在 $x_0>1$，当 $x\in(1,x_0)$ 时，恒有 $f(x)>2(x-1)$；

所以 $k=2$ 不符合题意.

②当 $k>2$ 时，对于 $x>1$， $f(x)\le 2(x-1)<k(x-1)$，

所以不存在 $x_0>1$，当 $x\in(1,x_0)$ 时，恒有 $f(x)>2(x-1)$；

所以 $k>2$ 不符合题意.

③当 $k<2$ 时，设 $h(x)=f(x)-k(x-1)=-x^2+(1-k)x+3\ln x+k$.

因为 $h'(x)=\dfrac{-2x^2+(1-k)x+3}{x}$，

令 $h'(x)=0$, 即 $-2x^2+(1-k)x+3=0$.

因为 $\Delta=(1-k)^2+24>0$，

解得 $x_1=\dfrac{1-k-\sqrt{(1-k)^2+24}}{4}, x_2=\dfrac{1-k+\sqrt{(1-k)^2+24}}{4}$.

又因为 $k<2$，

所以 $x_1<0, x_2>1$.

取 $x_0=x_2$.

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$h'(x)>0$；

所以 $h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增.

所以 $h(x)>h(1)=0$.

即 $f(x)>k(x-1)$.

所以 $k<2$ 符合题意.

所以实数 k 的取值范围是 $(-\infty,2)$.

【点睛】本题主要考查了导数的几何意义以及利用导数证明不等式，属于较难题.

21.【答案】(I) T：$P_1(1,1),P_2(1,2),P_3(2,2),P_4(3,2)$；或 T：$P_1(1,1),P_2(2,1),P_3(2,2),P_4(3,2)$；或 T：$P_1(1,1),P_2(2,1),P_3(3,1),P_4(3,2)$.（II）详见解析（III）$\frac{1}{4}(n+1)^2(2n-1)^2-\frac{1}{4}$

【详解】试题分析：(I) 本题就是及时定义，按定义分类列举：T：$P_1(1,1),P_2(1,2),P_3(2,2),P_4(3,2)$ 或 T：$P_1(1,1),P_2(2,1),P_3(2,2),P_4(3,2)$；或 T：$P_1(1,1),P_2(2,1),P_3(3,1),P_4(3,2)$.（II）证明不存在命题，一般利用反证法，即先假设存在点列 T，使得 $\sum_{i=1}^{k}x_i+\sum_{i=1}^{k}y_i=2^k$，则 $\frac{1}{2}k(k+3)=2^k$，即 $k(k+3)=2^{k+1}$. 因为整数 k 和 $k+3$ 总是一个为奇数，一个为偶数，且 $k\ge 2$，而整数 2^{k+1} 中不含有大于 1 的奇因子，因此矛盾，假设不成立

（III）$\sum_{i=1}^{k}x_i\times\sum_{i=1}^{k}y_i=(x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1})(2-x_1+3-x_2+\cdots+2n-x_{2n-1})$ 令 $t=x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1}$，

则 $\sum_{i=1}^{k}x_i\times\sum_{i=1}^{k}y_i=t[(n+1)(2n-1)-t]$.这是关于 t 的二次函数 $f(t)=t[(n+1)(2n-1)-t]$，从对称轴及正整数条件可得当 n 为奇数时，$t=\frac{1}{2}(n+1)(2n-1)$ 时，$\sum_{i=1}^{k}x_i\times\sum_{i=1}^{k}y_i$ 有最大值 $\frac{1}{4}(n+1)^2(2n-1)^2$. 当 n 为偶数时，$t=\frac{1}{2}(n+1)(2n-1)-\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{i=1}^{k}x_i\times\sum_{i=1}^{k}y_i$ 有最大值 $\frac{1}{4}(n+1)^2(2n-1)^2-\frac{1}{4}$.

试题解析：(I) 解：符合条件的点列为 T：$P_1(1,1),P_2(1,2),P_3(2,2),P_4(3,2)$；

或 T：$P_1(1,1),P_2(2,1),P_3(2,2),P_4(3,2)$；或 T：$P_1(1,1),P_2(2,1),P_3(3,1),P_4(3,2)$. 3 分

（II）证明：由已知，得 $x_i+y_i=x_{i-1}+y_{i-1}+1$，

所以数列 $\{x_i+y_i\}$ 是公差为 1 的等差数列.

由 $x_1+y_1=2$，得 $x_i+y_i=i+1$（$i=1,2,\cdots,k$）. 3 分

故 $\sum_{i=1}^{k}x_i+\sum_{i=1}^{k}y_i=\sum_{i=1}^{k}(x_i+y_i)=2+3+\cdots+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+3)$. 5 分

若存在点列 T，使得 $\sum_{i=1}^{k}x_i+\sum_{i=1}^{k}y_i=2^k$，

则 $\frac{1}{2}k(k+3)=2^k$，即 $k(k+3)=2^{k+1}$.

因为整数 k 和 $k+3$ 总是一个为奇数，一个为偶数，且 $k\geq 2$，

而整数 2^{k+1} 中不含有大于 1 的奇因子，

所以对于任意正整数 k $(k\geq 2)$，任意点列均不能满足 $\sum_{i=1}^{k}x_i+\sum_{i=1}^{k}y_i=2^k$. 8 分

（III）解：由（II）可知，$y_i=i+1-x_i(i=1,2,\cdots,2n-1)$，

所以 $\sum_{i=1}^{k}x_i\times\sum_{i=1}^{k}y_i=(x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1})(2-x_1+3-x_2+\cdots+2n-x_{2n-1})$

$=(x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1})[(2+3+\cdots+2n)-(x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1})]$，

令 $t=x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1}$，

则 $\sum_{i=1}^{k}x_i\times\sum_{i=1}^{k}y_i=t[(n+1)(2n-1)-t]$. 10 分

考察关于 t 的二次函数 $f(t)=t[(n+1)(2n-1)-t]$.

（1）当 n 为奇数时，可得 $\frac{1}{2}(n+1)(2n-1)$ 是正整数，

可构造数列 $\{x_i\}$：$1,2,\cdots,\underbrace{\frac{1}{2}(n+1),\cdots,\frac{1}{2}(n+1)}_{n项},\frac{1}{2}(n+1)+1,\cdots,n$，

对应数列 $\{y_i\}$：$1,1,\cdots,\underbrace{1,2,\cdots,n}_{n项},\cdots,n$.（由此构造的点列符合已知条件）

而且此时，$x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1}=1+2+\cdots+n+\underbrace{\frac{1}{2}(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)+\cdots+\frac{1}{2}(n+1)}_{(n-1)个}$

$=1+2+\cdots+n+\frac{1}{2}(n+1)(n-1)$

$=\frac{1}{2}(n+1)(2n-1)$，

所以当 $t=\frac{1}{2}(n+1)(2n-1)$ 时，$\sum_{i=1}^{k}x_i\times\sum_{i=1}^{k}y_i$ 有最大值 $\frac{1}{4}(n+1)^2(2n-1)^2$. 12 分

（2）当 n 为偶数时，$\frac{1}{2}(n+1)(2n-1)$ 不是正整数，而 $\frac{1}{2}(n+1)(2n-1)-\frac{1}{2}$ 是离其最近的正整数，

可构造数列 $\{x_i\}$：$1,2,\cdots,\underbrace{\frac{n}{2},\cdots,\frac{n}{2}}_{(\frac{n}{2}+1)项},\underbrace{(\frac{n}{2}+1),\cdots,(\frac{n}{2}+1)}_{\frac{n}{2}项},\frac{n}{2}+2,\cdots,n$，

对应数列$\{y_i\}$：$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{(\frac{n}{2}+1)项},2,\cdots,\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2,\cdots,\underbrace{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}_{\frac{n}{2}项},\cdots,n$，（由此构造的点列符合已知条件）

而且此时，$x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1}=1+2+\cdots+n+\underbrace{\frac{n}{2}+\cdots+\frac{n}{2}}_{\frac{n}{2}个}+\underbrace{(\frac{n}{2}+1)+\cdots+(\frac{n}{2}+1)}_{(\frac{n}{2}-1)个}$

$=1+2+\cdots+n+\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}+(\frac{n}{2}+1)\times(\frac{n}{2}-1)$

$=\frac{1}{2}(n+1)(2n-1)-\frac{1}{2}$，

所以当$t=\frac{1}{2}(n+1)(2n-1)-\frac{1}{2}$时，$\sum_{i=1}^{k}x_i\times\sum_{i=1}^{k}y_i$有最大值$\frac{1}{4}(n+1)^2(2n-1)^2-\frac{1}{4}$.

13 分

考点：及时定义，反证法，二次函数求最值

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！