# 2020 北京大兴一中高二（上）期中

# 数　　学

2020-11

一、单选题(共 40 分)

1．经过 $A(-2,0)$, $B(-5,3)$ 两点的直线的倾斜角是（　）

A．$45°$　　B．$60°$　　C．$90°$　　D．$135°$

2．已知向量 $\vec{a}=(0,1,1)$，$\vec{b}=(1,-2,1)$.若 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{c}=(-2,m,-4)$ 平行，则实数 $m$ 的值是（　）

A．2　　B．$-2$　　C．10　　D．$-10$

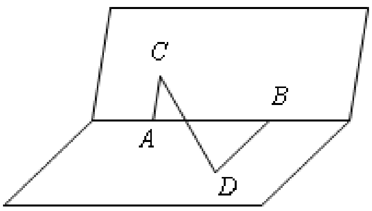
3．若向量 $\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{AC}=(3,2,1)$,则平面 $ABC$ 的一个法向量为（ ）

A．$(1,2,-1)$　　B．$(1,2,1)$　　C．$(-1,2,-1)$　　D．$(-1,2,1)$

4．无论 $m$ 取何值，直线 $(3m+1)x+(4m+1)y-12m-1=0$ 都恒过一个定点，则定点的坐标为（　）

A．$(-8,9)$　　B．$(9,-8)$　　C．$(15,-14)$　　D．$(-14,15)$

5．如图在一个 $120°$ 的二面角的棱上有两点 $A,B$，线段 $AC,BD$ 分别在这个二面角的两个半平面内，且均与棱 $AB$ 垂直，若 $AB=\sqrt{2}$，$AC=1$，$BD=2$，则 $CD$ 的长为（　）.




A．2　　B．3 C．$2\sqrt{3}$　　D．4

6．已知直线 $l$ 的方向向量为 $\vec{m}$,平面 $\alpha$ 的法向量为 $\vec{n}$,则“$\vec{m}\cdot\vec{n}=0$”是“$l\parallel\alpha$”的(　)

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件 C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

7．古希腊数学家阿基米德利用“逼近法”得到椭圆的面积除以圆周率等于椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积.若椭圆 $C$ 的中心为原点，焦点 $F_1$，$F_2$ 均在 $x$ 轴上，$C$ 的面积为 $2\sqrt{3}\pi$，且短轴长为 $2\sqrt{3}$，则 $C$ 的标准方程为（　）

A. $\frac{x^2}{12}+y^2=1$　　B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$

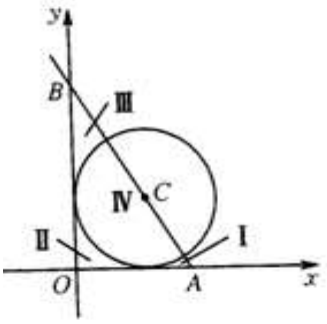
8．已知 P 为空间中任意一点，A、B、C、D 四点满足任意三点均不共线，但四点共面，且 $\overrightarrow{PA}=\frac{4}{3}\overrightarrow{PB}-x\overrightarrow{PC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{DB}$，则实数 $x$ 的值为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

9．设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，点 $N(c,\frac{a}{2})$ 在椭圆的外部，点 $M$ 是椭圆上的动点，满足 $|MF_1|+|MN|<\frac{3}{2}|F_1F_2|$ 恒成立，则椭圆离心率 $e$ 的取值范围是

A. $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　B. $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$　　C. $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5}{6})$　　D. $(\frac{5}{6},1)$

10．过圆 $C$：$(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 的圆心，作直线分别交 $x$，$y$ 正半轴于点 $A$，$B$，△$AOB$ 被圆分成四部分（如图），若这四部分图形面积满足 $S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{IV}}=S_{\mathrm{II}}+S_{\mathrm{III}}$，则这样的直线 $AB$ 有（　）




A．0 条　　B．1 条　　C．2 条　　D．3 条

二、填空题(共 25 分)

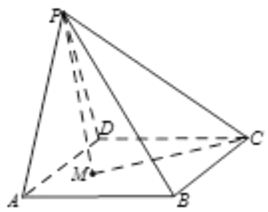
11．椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的焦距为_____.

12．已知圆的方程是 $x^2+y^2=1$，则经过圆上一点 $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的切线方程是__________.

13．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，则直线 $BC_1$ 与平面 $A_1BD$ 所成角的正弦值为__________

14．在空间中，四条不共线的向量$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$两两间的夹角均为$\alpha$．则$\cos\alpha$的大小为__________．

15．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，侧面$PAD$为正三角形，底面$ABCD$是边长为2的正方形，侧面$PAD\perp$底面$ABCD$，$M$为底面$ABCD$内的一个动点，且满足$MP=MC$，则点$M$在正方形$ABCD$内的轨迹的长度为_______




三、解答题(共85分)

16．已知$\Delta ABC$的三个顶点$A(3,7)$，$B(-2,5)$，$C(-3,-5)$，点$D$为$AC$的中点．

（1）求点$D$的坐标；

（2）求直线$BD$的方程．

（3）求$\triangle ABD$的面积．

17．已知圆$C$：$x^2+y^2-4x+2y-3=0$和点$M(0,-8)$，

（1）判断点$M$与圆$C$的位置关系

（2）过点$M$作一条直线与圆$C$交于$A,B$两点，且$|AB|=4$，求直线$AB$的方程；

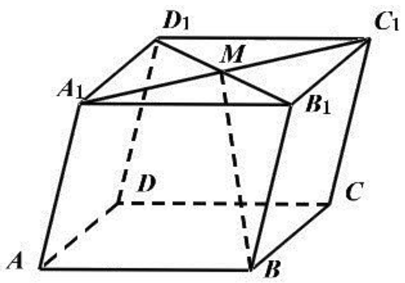
（3）过点$M$作圆$C$的切线，切点为$E,F$，求$EF$所在的直线方程．

18、已知焦点在$x$轴上的椭圆，左右焦点分别为$F_1,F_2$，上顶点为$B$，且三角形$F_1F_2B$为等腰直角三角形，过$F_2$斜率为1的直线$l$交椭圆与$E,F$两点。

（1）求椭圆的离心率；

（2）若$|EF|=\frac{8}{3}$，求椭圆标准方程。

19．如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以顶点 $A$ 为端点的三条棱长都是1，且它们彼此的夹角都是 $60°$，$M$ 为 $A_1C_1$ 与 $B_1D_1$ 的交点.若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，设平面 $ABC$ 的法向量 $\vec{n}=\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$

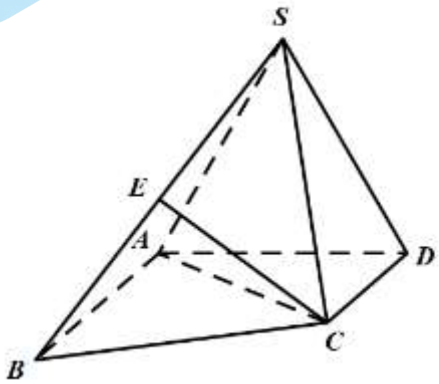



（1）用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 表示 $\overrightarrow{BM}$；

（2）求 $\vec{n}$ 及 $\vec{n}$ 的长度；；

（3）求点 $M$ 到平面 $ABC$ 的距离

20．如图,四棱锥 $S-ABCD$ 的侧面 $SAD$ 是正三角形, $AB//CD$ ,且 $AB\perp AD$ , $AB=2CD=4$ , $E$ 是 $SB$ 中点.




（1）求证： $CE//$ 平面 $SAD$；

（2）若平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$ ,且 $SB=4\sqrt{2}$ ,求平面 $EAC$ 与平面 $ACB$ 夹角的余弦值.

21、设 $A,B$ 两点的坐标分别为 $(-2,0),(2,0)$ 直线 $AE,BE$ 相交于点 $E$，且它们的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$ ,直线 $l$ 方程: $x=4$，直线 $AE,BE$ 与直线 $l$ 分别相交于 $M,N$ 两点， $AN$ 交轨迹 $E$ 与点 $F$

（1）求点 $E$ 的轨迹方程。

（2）求证： $M,B,F$ 三点共线

（3）求证：以 $MN$ 为直径的圆过定点。

# 2020 北京大兴一中高二（上）期中数学

## 参考答案

1D 2A 3C 4A 5B 6B 7C 8A 9D 10B

11 $2\sqrt{3}$ 12 $x+y-\sqrt{2}=0$ 13 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 14 $-\dfrac{1}{3}$ 15 $\sqrt{5}$

16 解：（1）设 $D$（$x$，$y$），

则 $x=\dfrac{3+(-3)}{2}=0$， $y=\dfrac{7+(-5)}{2}=1$，

∴点 $D$ 的坐标为（0，1）.

（2）∵直线 $BD$ 的斜率为 $k=\dfrac{5-1}{-2-0}=-2$ .

∴直线 $BD$ 的方程为：$y-1=-2(x-0)$，即 $2x+y-1=0$.

（3）∵ $|BD|=\sqrt{(-2-0)^2+(5-1)^2}=2\sqrt{5}$，

∴$A$ 到直线 $BD$ 的距离为 $d=\dfrac{|2\times3+7-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$ .

∴△$ABD$ 的面积为 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}|BD|d=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{12\sqrt{5}}{5}=12$ .

17 解：（1）点 $M$ 坐标代入圆方程得：$0+64-0-16-3=45>0$，所以点 $M$ 在圆外

（2）圆 $C:(x-2)^2+(y+1)^2=8$，则圆心 $C(2,-1)$，半径 $r=2\sqrt{2}$，

①若直线 $AB$ 的斜率存在，设直线 $AB:y+8=kx$，

即 $kx-y-8=0, d=\dfrac{|2k+1-8|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}\Rightarrow k=\dfrac{45}{28}$，

此时，直线 $AB$ 方程为 $\dfrac{45}{28}x-y-8=0$；

②若直线 $AB$ 的斜率不存在，则直线 $AB:x=0$，代入 $y^2+2y-3=0$ 得 $y_1=1, y_2=-3$，

此时$|AB|=4$，合乎题意.

综上所求直线$AB$的方程为：$x=0$或$45x-28y-224=0$；

（3）以$CM$为直径的圆的方程$x(x-2)+(y+1)(y+8)=0$，

即：$x^2+y^2-2x+9y+8=0$，①；$x^2+y^2-4x+2y-3=0$，②.

① -②得$2x+7y+11=0$，因此，直线$EF$的方程为$2x+7y+11=0$.

18 解：（1）在等腰直角三角形$F_1F_2B$中，$F_1F_2=\sqrt{2}F_1B$，

即$\sqrt{2}a=2c$，所以$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

（2）由（1）设$F_2(c,0)$，$E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$

得椭圆方程为$\frac{x^2}{2c^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$

直线$l$方程：$y=x-c$，与椭圆方程联立，消元得：

$3x^2-4cx=0$

解得：$x_1=0,x_2=\frac{4c}{3}$

所以$EF=\sqrt{k^2+1}\,|x_2-x_1|=\sqrt{1+1}\,|\frac{4c}{3}-0|$

得$\frac{4\sqrt{2}}{3}c=\frac{8}{3}\Rightarrow c=\sqrt{2}$

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

19 解：（1）$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1M}=\vec{c}-\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

（2）由题意知$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$ 由

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{a}=0\\\vec{n}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$ 得：$\begin{cases}1+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0\\\frac{1}{2}+y+\frac{1}{2}z\end{cases}$ 解得：$y=1,z=-3$

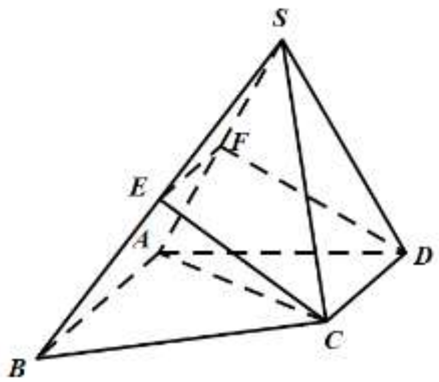
所以 $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$

$|\vec{n}|=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+9\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{a}\cdot\vec{c}-6\vec{c}\cdot\vec{b}}=\sqrt{6}$

（3）因为 $A_1M$ // 平面 $ABC$，所以点 $M$ 到平面 $ABC$ 的距离等于点 $A_1$ 到平面 $ABC$ 的距离

所以 $d=\dfrac{|\vec{c}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-3|}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

20 解：（1）取 $SA$ 的中点 $F$，连接 $EF$，




因为 $E$ 是 $SB$ 中点,

所以 $EF//AB$，且 $AB=2EF$，

又因为 $AB//CD$，$AB=2CD$，

所以 $EF$ // $DC$，$EF=DC$，

即四边形 $EFDC$ 是平行四边形,

所以 $EC//FD$，

又因为 $EC\not\subset$ 平面 $SAD$，$FD\subset$ 平面 $SAD$，

所以 $CE$ // 平面 $SAD$；

（2）方法一：取 $AD$ 中点 $O$，连接 $SO$，$BO$，

因为 $SAD$ 是正三角形,所以 $SO\perp AD$，

因为平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\perp AD$

所以 $SO\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $AB\perp SA$，

故 $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=4$，

以 $O$ 为原点,建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $O(0,0,0)$，

$A(0,-2,0)$，$B(4,-2,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$S(0,0,2\sqrt{3})$，$E(2,-1,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{CE}=(0,-3,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CA}=(-2,-4,0)$，

设平面 $ACE$ 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $-3y+\sqrt{3}z=0$，$-2x-4y=0$，

令 $y=1$ 得 $\vec{m}=(2,1,\sqrt{3})$，

易知平面 $ACB$ 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，

则 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，

所以平面 $EAC$ 与平面 $ACB$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

21 解：（1）设 $E(x,y)$，由题意 $k_{AE}=\dfrac{y}{x+2}(x\neq-2)$，$k_{BE}=\dfrac{y}{x-2}(x\neq 2)$

由已知有 $\dfrac{y}{x+2}\cdot\dfrac{y}{x-2}=-\dfrac{1}{4}(x\neq\pm2)$

化简得 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1(x\neq\pm2)$

（2）设 $AE$ 方程为：$y=k(x+2),(k\neq0)$

令 $x=4$ 得点 $M(4,6k)$

由 $\begin{cases}y=k(x+2)\\x^2+4y^2=4\end{cases}$ 消元得：$(1+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$

显然 $\Delta>0$ 恒成立

由 $x_Ax_E=\dfrac{16k^2-4}{1+4k^2}$，且 $x_A=-2$，得：$x_E=\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2}$

代入直线 $l$ 方程得 $y_E=\dfrac{4k}{1+4k^2}$

又因为 $B(2,0)$，所以：$k_{BE}=-\dfrac{1}{4k}$

所以直线 $BE$ 为：$y=-\dfrac{1}{4k}(x-2)$

令 $x=4$ 得点 $N(4,-\dfrac{1}{2k})$，$k_{AN}=-\dfrac{1}{12k}$

联立方程 $\begin{cases} y=\dfrac{-1}{12k}(x+2) \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$

消去 $x$ 得：$(36k^2+1)y^2+12ky=0$

所以 $y_F=\dfrac{-12k}{36k^2+1}$，$x_F=\dfrac{72k^2-2}{36k^2+1}$

$k_{BM}=\dfrac{6k}{4-2}=3k$ $\quad k_{FB}=\dfrac{y_F=\dfrac{-12k}{36k^2+1}}{y_F=\dfrac{72k^2-2}{36k^2+1}-2}=3k=k_{BM}$

$BM,BF$ 有公共点 $B$，所以 $M,B,F$ 三点共线

（3）设以 $MN$ 为直径的圆上点 $P(x,y)$，则 $MP\perp NP$

所以圆方程为 $(x-4)(x-4)+(y-6k)(y+\dfrac{1}{2k})=0$

即 $(x-4)^2+y^2+(\dfrac{1}{2k}-6k)y-3=0$

当 $\begin{cases} y=0 \\ (x-4)^2+y^2-3=0 \end{cases}$ 时与 $k$ 无关

所以以 $MN$ 为直径的圆过定点 $(4\pm\sqrt{3},0)$

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。