# 高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. B　设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-bi$. 由 $3(a-bi)-2(a+bi)=2-5i$ 得 $a-5bi=2-5i$，所以 $a=2,b=1$，所以 $z=2-i$.

2. D　因为 $M=\{x|2x^2+x-3<0\}=\left\{x\middle|-\frac{3}{2}<x<1\right\}$，$\complement_{\mathbf{R}}N=\{x|x\geqslant -1\}$，所以 $M\cap(\complement_{\mathbf{R}}N)=\{x|-1\leqslant x<1\}$.

3. C　由条件可知 $b^2>0$，所以 $a>b$，则A不正确；若 $a=1,b=-2$，则B不正确；由指数函数 $y=2^x$ 的单调性可知，$2^a>2^b$，则C正确；若 $a=2,b=1$，则 $\ln(a-b)=0$，则D不正确.

4. D　因为 $\boldsymbol{a}=(3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(m,1)$，所以 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(3-2m,-4)$. 因为 $\boldsymbol{a}/\!/(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，所以 $3\times(-4)+2(3-2m)=0$，解得 $m=-\frac{3}{2}$.

5. A　由题意可知，双曲线 $C$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，点 $P(-1,\sqrt{3})$ 在一条渐近线上，所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，则 $b=\sqrt{3}a$，且两条渐近线的倾斜角分别为 $60^\circ,120^\circ$，又 $|PF|=2$，$|OP|=2$（$O$ 为坐标原点），所以 $\triangle OFP$ 为等边三角形，从而 $c=2$. 由 $a^2+b^2=c^2$，解得 $a^2=1,b^2=3$，所以双曲线 $C$ 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

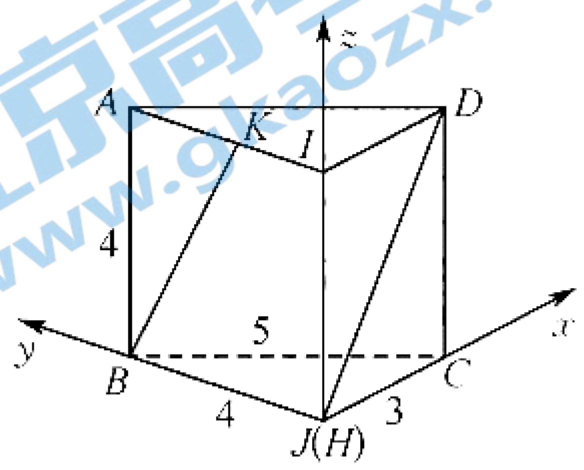
6. B　设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，由题意可知，$7a_1+\frac{7\times6}{2}d=5(a_1+5d)$，解得 $a_1=2d$，所以 $a_9=a_1+8d=10d$，$S_{10}=10a_1+\frac{10\times9}{2}d=65d$，则 $\frac{S_{10}}{a_9}=\frac{65}{10}=\frac{13}{2}$.

7. C　因为 $f(x)$ 是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的偶函数，函数 $y=\frac{1}{x}$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，所以 $g(x)=x^3+\frac{2}{e^x+1}-m$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，则 $g(-x)=-g(x)$，即 $-x^3+\frac{2}{e^{-x}+1}-m=-\left(x^3+\frac{2}{e^x+1}-m\right)$. 整理得 $2m=\frac{2}{e^x+1}+\frac{2}{e^{-x}+1}=\frac{2(e^x+1)}{e^x+1}=2$，所以 $m=1$.

8. A　$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-2r}$，所以 $\left(1-\frac{a}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中 $x^{-2}$ 的系数为 $C_6^4+(-a)C_6^3=15-20a$，由题知，$15-20a=75$，解得 $a=-3$.

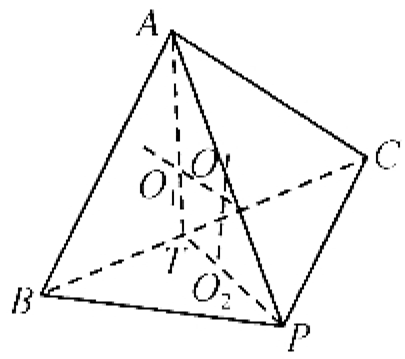
9. B　设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上是增函数，在 $(e,+\infty)$ 上是减函数. 原不等式可化为 $\frac{\ln x}{x}>\frac{\ln 2}{2}$，即 $f(x)>f(2)$，结合 $f(2)=f(4)$，可得 $2<x<4$，所以原不等式的解集为 $\{x|2<x<4\}$.

10. D　法一：将平面展开图折成立体图形，建立如图所示的空间直角坐标系 $J-xyz$，则 $B(0,4,0)$，$K(0,2,4)$，$D(3,0,4)$，$J(0,0,0)$，所以 $\overrightarrow{BK}=(0,-2,4)$，$\overrightarrow{DJ}=(-3,0,-4)$，所以 $|\cos\langle\overrightarrow{BK},\overrightarrow{DJ}\rangle|=\left|\frac{-16}{\sqrt{(-2)^2+4^2}\times\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}\right|=\frac{8\sqrt{5}}{25}$.



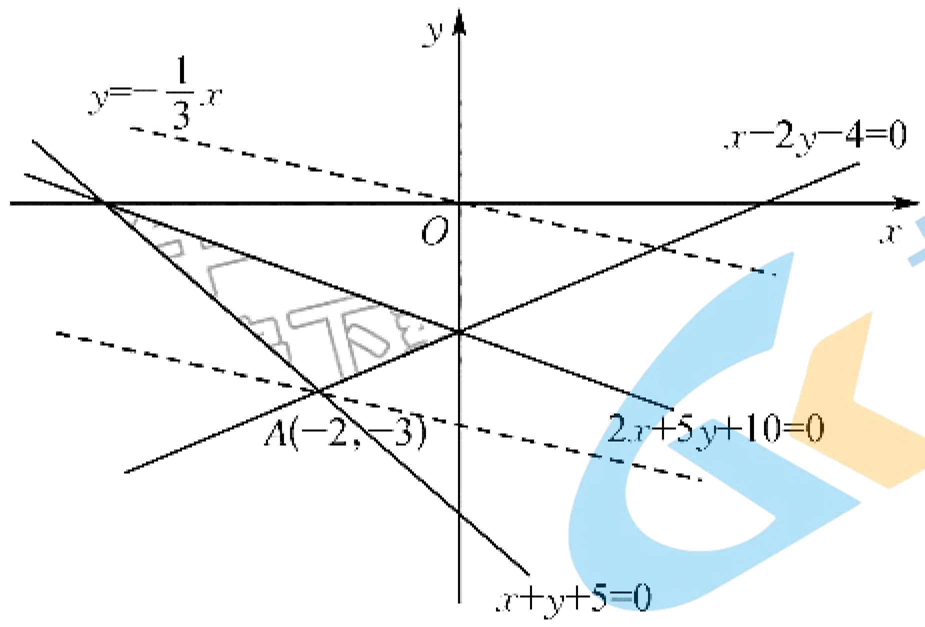
法二：在棱柱中，$JB,JC,JI$ 两两互相垂直，则 $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{JI}-\frac{1}{2}\overrightarrow{JB}$，$\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{JC}$，所以 $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{JI}^2=16$，又 $BK=2\sqrt{5}$，$JD=5$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{BK},\overrightarrow{JD}\rangle=\frac{\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{JD}}{|\overrightarrow{BK}|\cdot|\overrightarrow{JD}|}=\frac{16}{2\sqrt{5}\times5}=\frac{8\sqrt{5}}{25}$.

11. D　设 $BC$ 中点为 $T$，$\triangle ABC$ 的外心为 $O_1$，$\triangle PBC$ 的外心为 $O_2$，过点 $O_1$ 作平面 $ABC$ 的垂线，过点 $O_2$ 作平面 $PBC$ 的垂线，两条垂线的交点 $O$ 即为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心. 因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PBC$ 都是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形，可得 $PT=AT=3$. 因为平面 $PBC\perp$ 平面 $ABC$，且 $TO_1=TO_2=\frac{1}{3}AT=1$，所以四边形 $OO_1TO_2$ 是边长为1的正方形，所以外接球半径 $R=OP=\sqrt{OO_2^2+O_2P^2}=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$. $M$ 到平面 $ABC$ 的距离 $d\leqslant R+OO_1=\sqrt{5}+1$.



12. A　由题意可知，$A(-1,0)$，$F(1,0)$. 过点 $B$ 作准线 $x=-1$ 的垂线，垂足为 $D$，由抛物线的定义可知，$\frac{|AB|}{|BF|}=\frac{|AB|}{|BD|}=\frac{1}{\sin\angle BAD}$，要使 $\frac{|AB|}{|BF|}$ 取得最大值，则 $\sin\angle BAD$ 取得最小值，需直线 $AB$ 与 $C$ 相切. 设直线 $AB$ 的方程为 $y=k(x+1)$，由 $\begin{cases}y=k(x+1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 $y$ 可得，$k^2x^2-(2k^2-4)x+k^2=0$，所以 $\Delta=(2k^2-4)^2-4k^4=0$，解得 $k=\pm1$，因为 $B$ 是 $C$ 上第一象限内的点，所以 $k=1$，$B(1,2)$，所以 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$.

13. $-11$ 可行域如图所示，作出直线 $y=-\frac{1}{3}x$，并平移，当直线 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z$ 经过 $A$ 时，$z$ 取得最小值. 由 $\begin{cases}x+y+5=0,\\x-2y-4=0,\end{cases}$ 解得 $A(-2,-3)$，$z_{\min}=-2+3\times(-3)=-11$.




14. $\frac{31}{8}$ 由 $a_n+S_n=4$ 得，当 $n=1$ 时，$a_1=2$，当 $n\geq 2$ 时，$a_{n-1}+S_{n-1}=4$，两式相减得 $a_n-a_{n-1}+a_n=0$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，故 $S_5=\frac{2[1-(\frac{1}{2})^5]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{8}$.

15. $\frac{9}{35}$ 由题意可知，连续依次摸出的 4 个球分别是：白白红红，白红白红，红白白红共 3 种情况，第一种摸出“白白红红”的概率为 $\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{35}$，第二种摸出“白红白红”的概率为 $\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{35}$，第三种摸出“红白白红”的概率为 $\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{35}$，所以连续摸 4 次停止的概率等于 $\frac{9}{35}$.

16. ①④⑤或②③④ 选①作为已知条件时，$f(x)=(1+\cos x)\sin x$，则 $f'(x)=2\cos^2 x+\cos x-1=(2\cos x-1)(\cos x+1)$，令 $f'(x)>0$，解得 $\cos x>\frac{1}{2}$；令 $f'(x)<0$，解得 $\cos x<\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上为增函数，在 $(\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5\pi}{3}+2k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上为减函数，显然 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上不单调，③不正确；显然 $f(x)$ 的一个周期是 $2\pi$，所以当 $x=\frac{5\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(\frac{5\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$，⑤正确；因为 $f(2\pi-x)=[1+\cos(2\pi-x)]\sin(2\pi-x)=-(1+\cos x)\sin x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称，④正确，可知选①④⑤. 若选②，$f(x)=(1-\cos x)\sin x$，则 $f'(x)=-2\cos^2 x+\cos x+1=(2\cos x+1)(1-\cos x)$，令 $f'(x)>0$，解得 $\cos x>-\frac{1}{2}$；令 $f'(x)<0$，解得 $\cos x<-\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上为增函数，在 $(\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上为减函数，显然 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，③正确；因为 $f(2\pi-x)=[1-\cos(2\pi-x)]\sin(2\pi-x)=-(1-\cos x)\sin x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称，④正确；显然 $f(x)$ 的一个周期是 $2\pi$，所以当 $x=\frac{4\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(\frac{4\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$，⑤不正确；可知选②③④.

17. 解：(1)由正弦定理及 $2a\cos B\sin C+c\sin A=0$，得 $2ac\cos B+ac=0$， …………………… 3 分

所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$. …………………… 4 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{2}{3}\pi$. …………………… 5 分

(2)因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$，

所以 $\frac{1}{2}BD\cdot c\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}BD\cdot a\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，即 $a+c=5$. …………………… 8 分

又 $\frac{1}{2}ac\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$，所以 $ac=4$. …………………… 10 分

易知方程组 $\begin{cases}a+c=5,\\ac=4\end{cases}$ 有解且 $a,c$ 均大于 0，

由余弦定理得，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{2\pi}{3}=(a+c)^2-ac=21$，

所以 $b=\sqrt{21}$. …………………… 12 分

18. 解：(1)这 100 名购物者中消费金额低于 200 元的人数为 $10+15+35=60$. …………………… 2 分

故从这 100 名购物者中随机抽取 1 人，估计该人消费金额低于 200 元的概率为 $P=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$. ………………………… 4 分

(2)由题意可知，$X$ 的可能取值 0，1，2，3

由(1)知，任意 1 名购物者消费金额低于 200 元的概率为 $P_1=\frac{3}{5}$，

消费金额不低于 200 元的概率为 $P_2=1-P_1=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$，

若以频率估计概率，则 $X$ 服从二项分布 $N\left(3,\frac{2}{5}\right)$. ………………………… 6 分

$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$；………………………… 7 分

$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$；………………………… 8 分

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{36}{125}$；………………………… 9 分

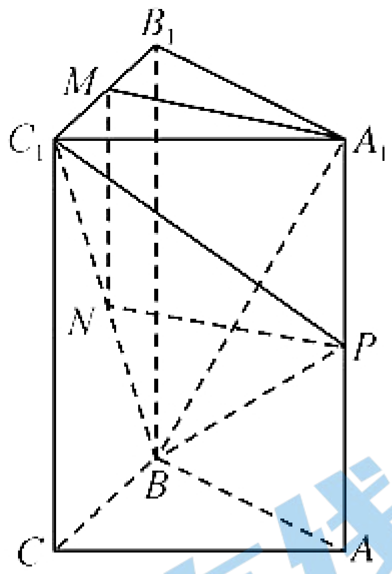
$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^0=\frac{8}{125}$. ………………………… 10 分

所以 $X$ 的分布列为

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{27}{125}$ | $\frac{54}{125}$ | $\frac{36}{125}$ | $\frac{8}{125}$ |

$E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$. ………………………… 12 分

19. (1)证明：在线段 $BC_1$ 上取中点 $N$，连结 $MN$、$NP$.



因为 $MN$ 是 $\triangle C_1BB_1$ 的中位线，

所以 $MN /\!/ B_1B$，且 $MN=\frac{1}{2}B_1B$. ………………………… 2 分

又因为 $A_1P /\!/ B_1B$，且 $A_1P=\frac{1}{2}B_1B$，………………………… 3 分

所以，$MN /\!/ A_1P$，且 $MN=A_1P$，

所以 $MNPA_1$ 是平行四边形，

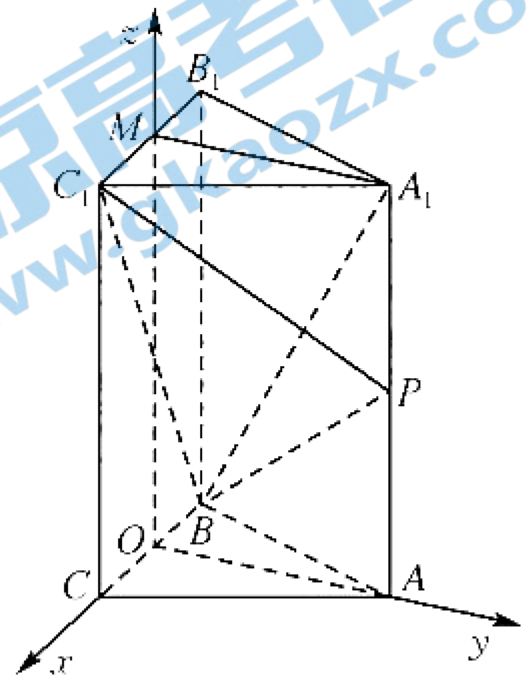
所以 $A_1M /\!/ PN$，………………………… 4 分

又 $A_1M\not\subset$平面 $PBC_1$，$PN\subset$平面 $PBC_1$，

所以 $A_1M /\!/$平面 $PBC_1$. ………………………… 6 分

(2)解：取 $BC$ 中点 $O$，因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱，

所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $OA\perp BC$. ………………………… 7 分



分别以$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OM}$的方向为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴的正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则

$B(-1,0,0)$，$C_1(1,0,3)$，$A_1(0,\sqrt{3},3)$. ………………………… 8 分

所以$\overrightarrow{BC_1}=(2,0,3)$，$\overrightarrow{BA_1}=(1,\sqrt{3},3)$.

设平面 $A_1BC_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$.

则$\begin{cases}\overrightarrow{BC_1}\cdot\boldsymbol{n}_1=2x-3z=0,\\ \overrightarrow{BA_1}\cdot\boldsymbol{n}_1=x+\sqrt{3}y+3z=0,\end{cases}$ 取 $x=3$，则 $\boldsymbol{n}_1=(3,\sqrt{3},-2)$. ………………………… 10 分

因为平面 $BB_1C_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{3\times0+\sqrt{3}\times1+(-2)\times0}{\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2+(-2)^2}\times1}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以锐二面角 $A_1-BC_1-B_1$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$. ………………………… 12 分

20. 解：(1)$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=e^x-a$，

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为增函数；………………………… 2 分

当 $a>0$ 时，$f'(x)=e^x-e^{\ln a}$，

当 $x<\ln a$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上为减函数，在$(\ln a,+\infty)$上为增函数. ………………………… 4 分

(2)由 $a=e-2$ 及 $f(x)\geqslant x^2$，得 $e^x-x^2-(e-2)x-1\geqslant0$.

设 $h(x)=e^x-x^2-(e-2)x-1(x>0)$，则 $h'(x)=e^x-2x-e+2$.

设 $g(x)=e^x-2x-e+2$，则 $g'(x)=e^x-2$.

当 $0<x<\ln 2$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>\ln 2$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $h'(x)$在$(0,\ln 2)$上为减函数，在$(\ln 2,+\infty)$上为增函数，

所以 $x=\ln 2$ 是 $h'(x)$的极小值点，也是 $h'(x)$的最小值点. ………………………… 6 分

因为 $0<\ln 2<1$，$h'(1)=0$，所以 $h'(\ln 2)<h'(1)=0$，

又 $h'(0)=3-e>0$，所以存在 $x_0\in(0,\ln 2)$，使得 $h'(x_0)=0$，…………………… 8 分

所以当 $x\in(0,x_0)\cup(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(x_0,1)$ 时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上为增函数，在 $(x_0,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $h(x_0)$ 为 $h(x)$ 的极大值，$h(1)$ 为 $h(x)$ 的极小值，…………………… 10 分

因为 $h(0)=h(1)=0$，所以当 $x>0$ 时，$h(x)\geq 0$（当且仅当 $x=1$ 时取等号），

故当 $x>0$ 时，$f(x)\geq x^2$． …………………… 12 分

21.（1）解：设 $F_2(c,0)$，则 $|F_1F_2|=2c=2$，即 $c=1$；…………………… 1 分

由 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰直角三角形，得 $a=\sqrt{2}c=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$， …………………… 2 分

所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2-1}=1$，…………………… 3 分

所以椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$． …………………… 4 分

（2）证明：由直线 $AB$ 过焦点 $F_2(1,0)$，当 $x_1\neq 1$ 时，得直线 $AB$ 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-1}(x-1)$， …………………… 5 分

代入 $x^2+2y^2=2$，并结合 $x_1^2+2y_1^2=2$ 整理，得 $(3-2x_1)x^2-4y_1^2x+2y_1^2-2(x_1-1)^2=0$，

设 $B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4y_1^2}{3-2x_1}$，…………………… 7 分

设 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2y_1^2}{3-2x_1}$，…………………… 8 分

结合 $2y_1^2=2-x_1^2$，得 $\frac{y_0}{x_0}=\frac{\frac{y_1}{x_1-1}(x_0-1)}{x_0}=\frac{y_1}{x_1-1}(1-\frac{1}{x_0})=\frac{y_1}{x_1-1}(1-\frac{3-2x_1}{2y_1^2})$

$=\frac{y_1}{x_1-1}\cdot\frac{2y_1^2-3+2x_1}{2y_1^2}=\frac{2-x_1^2-3+2x_1}{2(x_1-1)y_1}=-\frac{x_1-1}{2y_1}$， …………………… 10 分

所以直线 $OM$ 的方程为 $y=-\frac{x_1-1}{2y_1}x$，…………………… 11 分

由 $\begin{cases}x_1x+2y_1y=2,\\ y=-\frac{x_1-1}{2y_1}x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=-\frac{x_1-1}{y_1},\end{cases}$ 即 $N(2,-\frac{x_1-1}{y_1})$，

所以 $k_{AF_2}\cdot k_{NF_2}=\frac{y_1}{x_1-1}\cdot\frac{-\frac{x_1-1}{y_1}-0}{2-1}=-1$，即 $\angle AF_2N=90^\circ$，

当 $x_1=1$ 时，$AB$ 中点为 $F_2$，即 $M(1,0)$，直线 $l$ 与 $OM$ 交点 $N$ 坐标为 $(2,0)$，

由此时 $AF_2\perp x$ 轴知 $\angle AF_2N=90^\circ$，故 $\angle AF_2N$ 为定值． …………………… 12 分

22.解：（1）直线 $l$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=-3-4t,\\ y=2+3t\end{cases}$（$t$ 为参数），消去参数 $t$，

得直线 $l$ 的普通方程为 $3x+4y+1=0$． …………………… 2 分

将 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta=y$ 代入 $\rho^2-10\rho\sin\theta+5=0$，

得曲线 $C$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-10y+5=0$． …………………… 5 分

（2）因为射线 $\theta=\alpha(\rho\geq 0)$ 与直线 $l$：$3x+4y+1=0$ 垂直，

所以 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$． …………………… 6 分

将 $\theta=\alpha(\rho\geq 0)$ 代入曲线 $C$ 的极坐标方程得 $\rho^2-8\rho+5=0$，

设 $A$，$B$ 所对应的极径分别为 $\rho_A$，$\rho_B$，则 $\Delta=8^2-4\times 5=44>0$，$\rho_A+\rho_B=8$，$\rho_A\rho_B=5$，

易知 $\rho_A$，$\rho_B$ 均大于 0，

所以 $\left|\frac{1}{|OA|}-\frac{1}{|OB|}\right|=\left|\frac{1}{\rho_A}-\frac{1}{\rho_B}\right|=\frac{|\rho_B-\rho_A|}{|\rho_A\rho_B|}=\frac{1}{5}\sqrt{(\rho_B+\rho_A)^2-4\rho_A\rho_B}=\frac{2\sqrt{11}}{5}$． …………………… 10 分

23.（1）解：由 $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$，当且仅当 $a=b=c$ 时，取得等号． …………………… 2 分

又 $a+b+c=3$，所以 $abc\leq\left(\frac{3}{3}\right)^3=1$．

故当且仅当 $a=b=c=1$ 时，$abc$ 取得最大值 1． …………………… 5 分

（2）证明：要证 $a^3b+b^3c+c^3a\geq 3abc$，需证 $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\geq 3$． …………………… 6 分

因为 $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+(a+b+c)=\left(\frac{a^2}{c}+c\right)+\left(\frac{b^2}{a}+a\right)+\left(\frac{c^2}{b}+b\right)$

$\geq 2\sqrt{a^2}+2\sqrt{b^2}+2\sqrt{c^2}=2(a+b+c)=6$，即 $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\geq 3$，当且仅当 $a=b=c=1$ 时取得等号．

故 $a^3b+b^3c+c^3a\geq 3abc$． …………………… 10 分

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ″ 精益求精、专业严谨 ″ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。