

2023 北京朝阳高二（下）期末

数 学

2023.7

（考试时间 120 分钟 满分 150 分）

本试卷分为选择题 50 分和非选择题 100 分

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ，集合 $B = \{x | -1 \leq x < 1\}$ ，则 $A \cap B =$

- (A) $\{0, 1\}$ (B) $\{-1, 1\}$ (C) $\{-1, 0\}$ (D) $\{-1, 0, 1\}$

(2) 已知 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ，且 $\sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{3}$ ，则 $\cos \alpha =$

- (A) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(3) 已知不等式 $x^2 + ax + 4 < 0$ 的解集为空集，则实数 a 的取值范围是

- (A) $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ (B) $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$
(C) $(-4, 4)$ (D) $[-4, 4]$

(4) 从集合 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 中任取两个不同的数，则取出的两个数中恰有一个是奇数的概率为

- (A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{6}{7}$

(5) 已知 $a = \lg \frac{1}{3}$ ， $b = 3^{0.1}$ ， $c = \sin 3$ ，则

- (A) $a > b > c$ (B) $b > c > a$ (C) $b > a > c$ (D) $c > b > a$

(6) 设 $a, b \in \mathbf{R}$ ，则 “ $(a-b)a^2 < 0$ ” 是 “ $a < b$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(7) 某学校 4 名同学到 3 个小区参加垃圾分类宣传活动，每名同学只能去 1 个小区，且每个小区至少安排 1 名同学，则不同的安排方法种数为

- (A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) 36

(8) 已知函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ ，则下列结论正确的是

- (A) 函数 $f(x + \pi)$ 的一个周期为 $\frac{\pi}{2}$
(B) 函数 $f(x + \pi)$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{6}$

(C) $y = f(x)$ 的图象可由 $y = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到

(D) $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3\pi}{2}$ 对称

(9) 良好生态环境既是自然财富，也是经济财富。为了保护生态环境，某工厂将产生的废气经过过滤后排放，已知过滤过程中的污染物的残留数量 y （单位：毫克/升）与过滤时间 t （单位：小时）之间的函数关系为 $y = y_0 e^{-kt}$ ($t \geq 0$)， k 为常数且 $k > 0$ ， y_0 为原污染物数量。该工厂某次过滤废气时，若前 4 个小时废气中的污染物恰好被过滤掉 90%，那么再继续过滤 2 小时，废气中污染物的残留数量约为原污染物数量的

(A) 1% (B) 2% (C) 3% (D) 5%

(10) 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足：

① $f(2+x) + f(-x) = 0$ ；

② $f(-1+x) = f(-1-x)$ ；

③ 当 $x \in [-1, 1]$ 时， $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}x, & x \in [-1, 0], \\ 1-x, & x \in (0, 1], \end{cases}$

则函数 $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}$ 在区间 $[-5, 3]$ 上的零点个数为

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(11) 二项式 $(x + \frac{2}{x})^6$ 的展开式中的常数项是_____。（用数字作答）

(12) 某中学高一、高二、高三年级的学生人数分别为 1200，1000，800，为迎接运动会的到来，按照各年级人数所占比例进行分层抽样，选出 30 名志愿者，则高二年级应选出的人数为_____。

(13) 当 $x > -1$ 时，函数 $y = x + \frac{4}{x+1} - 2$ 的最小值为_____，此时 $x =$ _____。

(14) 已知 $a > 0$ ，则关于 x 的不等式 $x^2 - 4ax - 5a^2 < 0$ 的解集是_____。

(15) 若函数 $y = \cos 2x$ 的图象在区间 $(-\frac{\pi}{4}, m)$ 上恰有两个极值点，则满足条件的实数 m 的一个取值为_____。

(16) 已知集合 M 为非空数集，且同时满足下列条件：

(i) $2 \in M$ ；

(ii) 对任意的 $x \in M$, 任意的 $y \in M$, 都有 $x - y \in M$;

(iii) 对任意的 $x \in M$ 且 $x \neq 0$, 都有 $\frac{1}{x} \in M$.

给出下列四个结论:

① $0 \in M$;

② $1 \notin M$;

③ 对任意的 $x, y \in M$, 都有 $x + y \in M$;

④ 对任意的 $x, y \in M$, 都有 $xy \in M$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 5 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

(17) (本小题 13 分)

设函数 $f(x) = 2 \sin \omega x \cos \omega x + m (\omega > 0, m \in \mathbf{R})$, 从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知, 使函数 $f(x)$ 唯一确定.

(I) 求 ω 和 m 的值;

(II) 设函数 $g(x) = f(x - \frac{\pi}{6})$, 求 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值.

条件①: $f(0) = 1$;

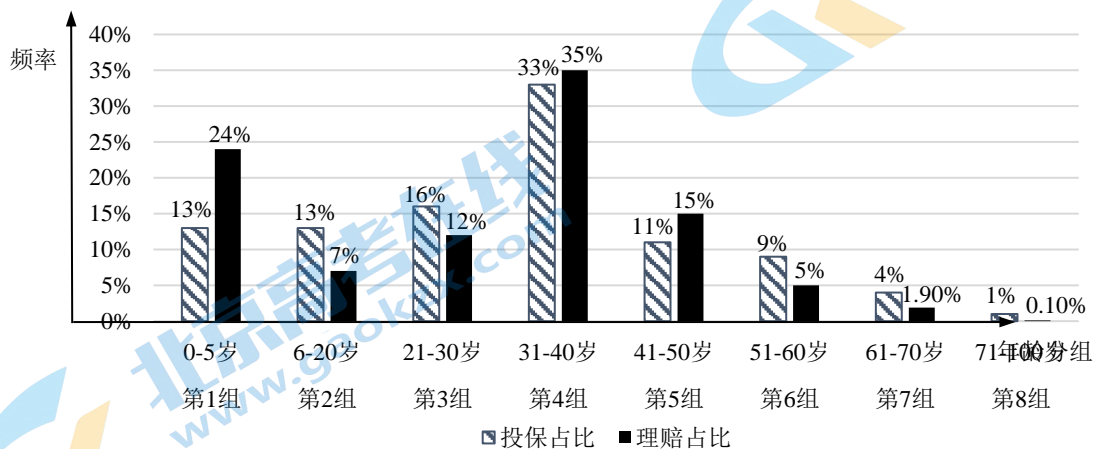
条件②: $f(x)$ 的最小值为 0;

条件③: $f(x)$ 的图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

注: 如果选择的条件不符合要求, 得 0 分; 如果选择多组条件分别解答, 按第一组解答计分.

(18) (本小题 14 分)

某保险公司 2022 年的医疗险理赔服务报告给出各年龄段的投保情况与理赔情况, 统计结果如下:



注: 第 1 组中的数据 13% 表示 0-5 岁年龄段投保人数占全体投保人数的百分比为 13%;

24% 表示 0-5 岁年龄段理赔人数占全体理赔人数的百分比为 24%。其它组类似。

- (I) 根据上述数据, 估计理赔年龄的中位数和第 90 百分位数分别在哪一组, 直接写出结论;
- (II) 用频率估计概率, 从 2022 年在该公司投保医疗险的所有人中随机抽取 3 人, 其中超过 40 岁的人数记为 X , 求 X 的分布列及数学期望;
- (III) 根据上述数据, 有人认为“该公司 2022 年的理赔的平均年龄一定小于投保的平均年龄”, 判断这种说法是否正确, 并说明理由.

(19) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax$ ($a \in \mathbf{R}$).

- (I) 当 $a=3$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (II) 若 $x=2$ 是 $f(x)$ 的一个极值点, 求 $f(x)$ 的单调递增区间;
- (III) 是否存在 a , 使得 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上的最大值为 -2 ? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由.

(20) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = m(2x+1)$ ($m \in \mathbf{R}$).

- (I) 当 $m=1$ 时, 证明 $f(x) \geq g(x)$;
- (II) 若直线 $y=g(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线, 设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 求证: 对任意的 $a > b$, 都有

$$\frac{h(a) - h(b)}{a - b} < 2e^{2a} - 2$$

(21) (本小题 15 分)

若有穷整数数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足 $1 \leq a_i \leq n$ ($i=1, 2, \dots, n$), 且各项均不相同, 则称 A 为 P_n 数列.

对 P_n 数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$, 设 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_i - a_j}{|a_i - a_j|}$ ($i=2, 3, \dots, n$), 则称数列 $\lambda(A): \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为数列 A 的导出数列.

- (I) 分别写出 P_4 数列 $2, 1, 4, 3$ 与 $3, 1, 4, 2$ 的导出数列;
- (II) 是否存在 P_6 数列 A 使得其导出数列 $\lambda(A)$ 的各项之和为 0? 若存在, 求出所有符合要求的 P_6 数列; 若不存在, 说明理由;
- (III) 设 P_n 数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 与 $A': a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ 的导出数列分别为 $\lambda(A): \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 与 $\lambda(A'): \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$, 求证: $a_i = a'_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) 的充分必要条件是 $\lambda_i = \lambda'_i$ ($i=1, 2, \dots, n$).

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

- (1) C (2) A (3) D (4) C (5) B
(6) A (7) D (8) B (9) C (10) B

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

- (11) 160 (12) 10 (13) 1, 1
(14) $(-a, 5a)$ (15) π （答案不唯一） (16) ①③④

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

(17)（共 13 分）

解：选①③.

(I) 因为 $f(x) = 2\sin \omega x \cos \omega x + m = \sin 2\omega x + m$,

由 $f(0) = 1$, 得 $m = 1$.

因为 $f(x)$ 的图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

$$\text{所以 } \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{所以 } T = \frac{2\pi}{|2\omega|} = \pi.$$

因为 $\omega > 0$, 所以 $\omega = 1$ 6 分

(II) 由 (I) 可知 $f(x) = \sin 2x + 1$.

$$g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1.$$

因为 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

所以当 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时,

$g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上取得最大值 $g(\frac{5\pi}{12}) = 2$ 13 分

选②③.

(I) 因为 $f(x) = 2\sin \omega x \cos \omega x + m = \sin 2\omega x + m$,

由 $f(x)$ 的最小值为 0, 得 $m = 1$.

因为 $f(x)$ 的图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

$$\text{所以 } \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$T = \frac{2\pi}{|2\omega|} = \pi$$

所以 $\omega > 0$, 所以 $\omega = 1$ 6分

(II) 同选①③.

(18) (共 14 分)

解: (I) 理赔年龄的中位数在第 4 组, 理赔年龄的第 90 百分位数在第 5 组. 4分

(II) 用频率估计概率, 从投保医疗险的人中随机抽取 1 人超过 40 岁的概率为 $\frac{1}{4}$.

X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{9}{64}$$

$$P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{64}$$

所以随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

所以随机变量 X 的数学期望

$$E(X) = 0 \times \frac{27}{64} + 1 \times \frac{27}{64} + 2 \times \frac{9}{64} + 3 \times \frac{1}{64} = \frac{3}{4}. \dots\dots\dots 11分$$

(III) 不正确.

比如理赔的年龄比较靠近每一组区间的右端点,
投保的年龄比较接近每一组区间的左端点,
这样估计的结果就是理赔的平均年龄较大.

用区间的右端点估计理赔的平均年龄为

$$5 \times 0.24 + 20 \times 0.07 + 30 \times 0.12 + 40 \times 0.35 + 50 \times 0.15 + 60 \times 0.05 + 70 \times 0.019 + 100 \times 0.001 = 32.13,$$

用区间的左端点估计投保的平均年龄为

$$0 \times 0.13 + 6 \times 0.13 + 21 \times 0.16 + 31 \times 0.33 + 41 \times 0.11 + 51 \times 0.09 + 61 \times 0.04 + 71 \times 0.01 = 26.62,$$

因为 $32.13 > 26.62$, 所以说法不正确. 14分

(19) (共 15 分)

解：函数 $f(x) = \ln x - ax$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，则 $f'(x) = \frac{1}{x} - a$ 。

(I) 当 $a=3$ 时， $f(x) = \ln x - 3x$ ，所以 $f(1) = -3$ 。

因为 $f'(x) = \frac{1}{x} - 3$ ，所以 $f'(1) = 1 - 3 = -2$ 。

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y + 3 = -2(x - 1)$ ，

即 $2x + y + 1 = 0$ 。..... 4分

(II) 因为 $x=2$ 是 $f(x)$ 的一个极值点，所以 $f'(2) = \frac{1}{2} - a = 0$ 。解得 $a = \frac{1}{2}$ 。

所以 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x$ ， $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$ 。

当 $0 < x < 2$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增；

当 $x > 2$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减。

所以当 $a = \frac{1}{2}$ 时， $x=2$ 是 $f(x)$ 的极大值点。

此时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$ 。..... 9分

(III) ① 当 $a \leq \frac{1}{e}$ 时，

因为 $x \in (0, e]$ ， $f'(x) = \frac{1}{x} - a \geq \frac{1}{e} - a \geq 0$ ，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上单调递增。

此时 $f(x)_{\max} = f(e) = \ln e - ae = 1 - ae$ 。

若 $1 - ae = -2$ ，则 $a = \frac{3}{e}$ ，不合题意。

② 当 $a > \frac{1}{e}$ ，即 $0 < \frac{1}{a} < e$ 时，

令 $f'(x) = \frac{1}{x} - a = 0$ ，解得 $x = \frac{1}{a}$ 。

当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增；

当 $\frac{1}{a} < x < e$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减。

此时 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{a}\right) = \ln \frac{1}{a} - 1$ 。

若 $\ln \frac{1}{a} - 1 = -2$, 则 $a = e$, 符合题意.

综上, 当 $a = e$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上的最大值为 -2 15 分

(20) (共 13 分)

解: (I) 当 $m = 1$ 时, 设 $\varphi(x) = f(x) - g(x) = e^{2x} - 2x - 1$, 则 $\varphi'(x) = 2e^{2x} - 2$.

令 $\varphi'(x) = 2e^{2x} - 2 = 0$, 解得 $x = 0$.

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$.

所以 $f(x) \geq g(x)$ 成立. 5 分

(II) 由已知得 $f'(x) = 2e^{2x}$.

设切点为 $P(x_0, e^{2x_0})$,

$$\text{则 } \begin{cases} 2e^{2x_0} = 2m, \\ m(2x_0 + 1) = e^{2x_0}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = 0, \\ m = 1. \end{cases}$$

所以 $g(x) = 2x + 1$, $h(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

要证 $\frac{h(a) - h(b)}{a - b} < 2e^{2a} - 2$,

即证 $\frac{e^{2a} - 2a - e^{2b} + 2b}{a - b} < 2e^{2a} - 2$,

即证 $\frac{e^{2a} - e^{2b}}{a - b} < 2e^{2a}$,

即证 $1 - e^{2b-2a} < 2(a - b)$.

令 $2a - 2b = t, t > 0$, 原不等式等价于 $1 - e^{-t} < t$, 即 $t + e^{-t} > 1$.

设 $F(t) = t + e^{-t}$, 则 $F'(t) = 1 - e^{-t} > 0$.

所以 $F(t)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $F(t) > F(0) = 1$.

所以 $t + e^{-t} > 1$ 成立.

所以对任意 $a > b$, 都有 $\frac{h(a) - h(b)}{a - b} < 2e^{2a} - 2$ 13 分

(21) (共 15 分)

解: (I) $2, 1, 4, 3$ 的导出数列为 $0, -1, 2, 1$,

$3, 1, 4, 2$ 的导出数列为 $0, -1, 2, -1$ 4 分

(II) 不存在, 理由如下:

设 $A: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$,

$$\text{则 } \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{a_2 - a_1}{|a_2 - a_1|}, \quad \lambda_3 = \frac{a_3 - a_1}{|a_3 - a_1|} + \frac{a_3 - a_2}{|a_3 - a_2|},$$

$$\lambda_4 = \frac{a_4 - a_1}{|a_4 - a_1|} + \frac{a_4 - a_2}{|a_4 - a_2|} + \frac{a_4 - a_3}{|a_4 - a_3|},$$

$$\lambda_5 = \frac{a_5 - a_1}{|a_5 - a_1|} + \frac{a_5 - a_2}{|a_5 - a_2|} + \frac{a_5 - a_3}{|a_5 - a_3|} + \frac{a_5 - a_4}{|a_5 - a_4|},$$

$$\lambda_6 = \frac{a_6 - a_1}{|a_6 - a_1|} + \frac{a_6 - a_2}{|a_6 - a_2|} + \frac{a_6 - a_3}{|a_6 - a_3|} + \frac{a_6 - a_4}{|a_6 - a_4|} + \frac{a_6 - a_5}{|a_6 - a_5|}.$$

因为 $\frac{a_i - a_j}{|a_i - a_j|} \in \{-1, 1\} (i \neq j)$,

所以 $\lambda_2 \in \{-1, 1\}$ 是奇数,

$\lambda_3 \in \{-2, 0, 2\}$ 是偶数,

$\lambda_4 \in \{-3, -1, 1, 3\}$ 是奇数,

$\lambda_5 \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ 是偶数,

$\lambda_6 \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$ 是奇数.

因为 $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6$ 共三个奇数,

所以 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6$ 是奇数.

所以 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6$ 不可能为 0.9 分

(III) 必要性:

若 $a_i = a'_i (i = 1, 2, \dots, n)$,

则 $\lambda_i = \lambda'_i = 0$,

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_i - a_j}{|a_i - a_j|} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a'_i - a'_j}{|a'_i - a'_j|} = \lambda'_i (i = 2, 3, \dots, n).$$

充分性: 下面用反证法证明.

假设存在 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $a_i \neq a'_i$.

若 $a_n \neq a'_n$, 令 $k = n$.

若 $a_n = a'_n, a_{n-1} = a'_{n-1}, \dots, a_{j+1} = a'_{j+1}, a_j \neq a'_j$, 令 $k = j$.

因为 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\}$,

所以 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_k\}$.

设 a_1, a_2, \dots, a_{k-1} 中有 l 项比 a_k 小, 则有 $k-l-1$ 项比 a_k 大,

所以 $\lambda_k = l - (k-l-1) = 2l - k + 1$.

设 $a'_1, a'_2, \dots, a'_{k-1}$ 中有 l' 项比 a'_k 小, 则有 $k-l'-1$ 项比 a'_k 大,

所以 $\lambda'_k = l' - (k-l'-1) = 2l' - k + 1$.

因为 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_k\}$ 且 $a_k \neq a'_k$, 所以 $l \neq l'$,

所以 $\lambda_k \neq \lambda'_k$, 矛盾.

所以 $a_i = a'_i (i=1, 2, \dots, n)$ 15 分

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年7月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新 最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者底部栏目<**高一高二**>**期末试题**>，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

