考号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 学校＿＿＿＿

密 封 线 内 不 要 答 题

高三数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 复数$(2-i)(1-i)$在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知集合$A=\{y|y=x^2+\frac{1}{x^2}\}$，$B=\{x|x^2-4x-3<0\}$，则$A\cup B=$

A. $(1,+\infty)$　　B. $[2,3)$　　C. $(1,2]$　　D. $(2,+\infty)$

3. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{12})$，则"$\omega=\pi$"是"$f(x)$的最小正周期为2"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$的长轴长为6，则该椭圆的离心率为

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{31}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{11}}{6}$

5. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为AB，A_1D_1的中点，则

A. $EF/\!/$平面BB_1D_1　　B. $EF/\!/$平面B_1CD_1

C. $EF\perp$平面A_1BD　　D. $EF\perp$平面BC_1D

6. 公差不为0的等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=n^2a_1$，若a_1，a_2，a_{k_1}，a_{k_2}，a_{k_3}依次成等比数列，则$k_3=$

A. 81　　B. 63

C. 41　　D. 32

7. 已知单位向量a，b，若对任意实数x，$|xa+b|\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$恒成立，则向量$a$，$b$的夹角的取值范围为

A. $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$　　B. $[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$

C. $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$　　D. $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$

8. 从商业化书店到公益性城市书房，再到"会呼吸的文化森林"——图书馆，[illegible]化、开放式的图书馆一直以来是大众的共同心声. 现有一块不规则的地，其平面图形如图1所示，AC=8(百米)，建立如图2所示的平面直角坐标系，将曲线AB看成函数 [illegible] 图象的一部分，BC为一次函数图象的一部分，若在此地块上建立一座图书馆，平面图为直角梯形CDEF(如图2)，则图书馆占地面积(万平方米)的最大值为

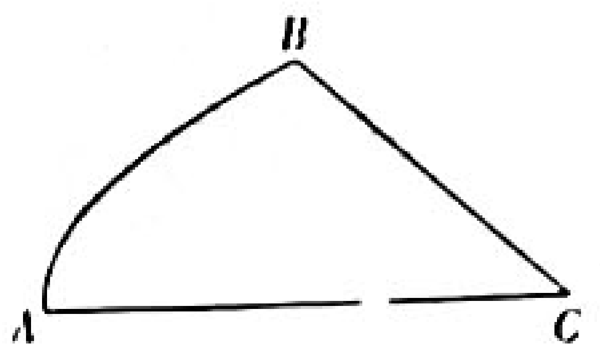


图1

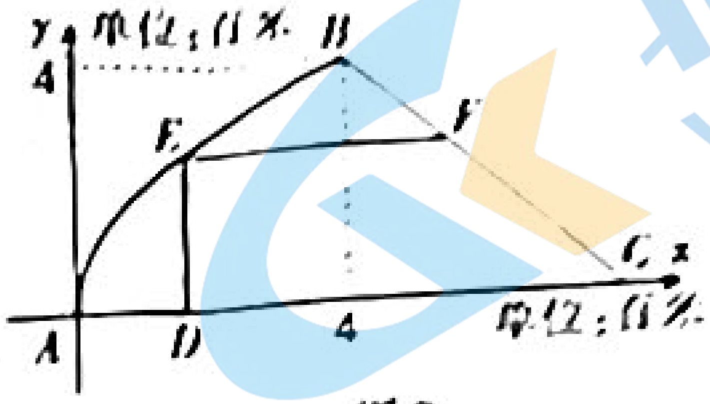


图2

A. $8\sqrt{3}$　　B. $\frac{116}{9}$　　C. $\frac{196\sqrt{3}}{[illegible]}$　　D. $\frac{2}{7}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 将 A、B、C、D 这4张卡片分给甲、乙、丙、丁4人，每人分得一张卡片，则

A. "甲得到 A 卡片"与"乙得到 A 卡片"为对立事件

B. "甲得到 A 卡片"与"乙得到 A 卡片"为互斥但不对立事件

C. 甲得到 A 卡片的概率为 $\frac{1}{4}$

D. 甲、乙2人中有人得到 A 卡片的概率为 $\frac{1}{2}$

10. 已知 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，$M(\cos\gamma,\sin\gamma)$ 是单位圆上的三点，满足 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$0<\gamma<2\pi$，且 $\overrightarrow{OM}=\lambda(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，其中 λ 为非零常数，则下列结论一定正确的有

A. 若 $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$　　B. 若 $\lambda=1$，则 $\beta=\alpha+\frac{2}{3}\pi$

C. $\sin\gamma=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$　　D. $\sin\gamma=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}$

11. 已知函数 $f(x)=\frac{x}{x-1}-10^x(x>1)$，$g(x)=\frac{x}{x-1}-\lg x(x>1)$ 的零点分别为 x_1，x_2，则

A. $x_1=2\lg x_2$　　B. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$

C. $x_1+x_2>4$　　D. $x_1x_2<10$

12. 已知 F 是抛物线 $W: y^2=2px(p>0)$ 的焦点，点 $A(1,2)$ 在抛物线 W 上. 过点 F 的两条互相垂直的直线 l_1，l_2 分别与抛物线 W 交于 B，C 和 D，E，过点 A 分别作 l_1，l_2 的垂线，垂足分别为 M，N，则

A. 四边形 $AMFN$ 面积的最大值为2

B. 四边形 $AMFN$ 周长的最大值为 $4\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{|BC|}+\frac{1}{|DE|}$ 为定值 $\frac{1}{2}$

D. 四边形 $BDCE$ 面积的最小值为32

北京高考在线 www.gaokzx.com

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. $(x-\frac{2}{x^3})^4$ 的展开式中，常数项是___▲___.

14. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=x^2+(a-1)x+a+1$，则 $f(-3)=$___▲___.

15. 已知点 $A(-1,1)$、$B(1,3)$，若线段 AB 与圆 $C:(x-1)^2+y^2=m$ 存在公共点，则 m 的取值范围为___▲___.

16. 某儿童玩具的实物图如图 1 所示，从中抽象出的几何模型如图 2 所示，由 OA、OB、OC、OD 四条等长的线段组成，其结构特点是能使它任意抛至水平面后，总有一条线段所在的直线竖直向上，则 $\sin\angle AOB=$___▲___.

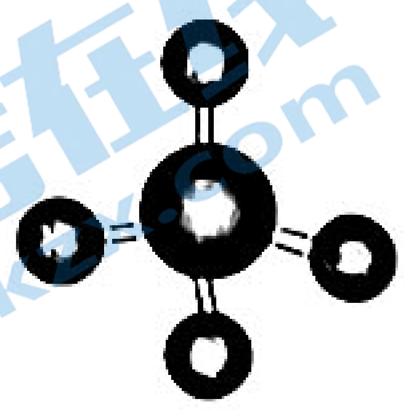


图 1

图 2

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $C=\frac{2\pi}{3}$，$b^3-a^2b+ac^2-bc^2=0$.

(1)求 A 的大小；

(2)若 $c=\sqrt{3}$，求 BC 边上高的长度.

18.（12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_5=14$，$a_6=16$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

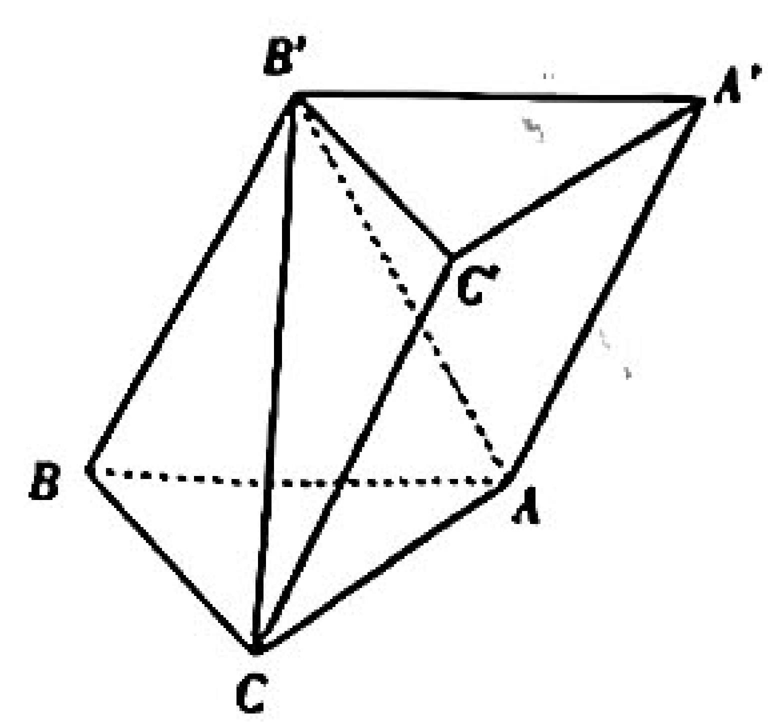
(2)若$\{b_n\}$为正项等比数列，$b_6=b_1b_5=64$，求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前 n 项和 T_n.

19.（12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，$AB\perp BC$，平面 $ABC\perp$平面 $ABB'A'$，$AB=BC=BB'=2$，$\overrightarrow{BB'}$在直线 AB 上的投影向量为$\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

(1)证明：$BC\perp CC'$.

(2)求二面角 $B'-AC-B$ 的余弦值.



(12 分)

某短视频平台的一位博主，其视频以展示乡村生活为主，赶集、出城、抓鱼、养鸡等新时代农村生活吸引了许多观众，该博主为家乡的某农产品进行直播带货，通过 5 次试销得到了销量 y（单位：百万盒）与单价 x（单位：元/盒）的如下数据：

x	6	6.2	6.4	6.6	6.8
y	50	45	45	40	35

(1) 根据以上数据，求 y 关于 x 的经验回归方程；

(2) 在所有顾客中随机抽取部分顾客（人数很多）进行体验调查问卷，其中"体验非常好"的占一半，"体验良好""体验不满意"的各占 25%，然后在所有顾客中随机抽取 8 人作为幸运顾客赠送礼品，记抽取的 8 人中"体验非常好"的人数为随机变量 η，求 η 的分布列和均值.

参考公式：回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=1369$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=205.2$.

(12 分)

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 $F(2,0)$，过点 F 的直线 l 与双曲线 C 的右支相交于 M,N 两点，点 M 关于 y 轴对称的点为 P. 当 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=0$ 时，$|MN|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求双曲线 C 的方程；

(2) 若 $\triangle MNP$ 的外心为 Q，求 $\dfrac{|QF|}{|MN|}$ 的取值范围.

(12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{x\ln x}{e^x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程；

(2) 已知 $a>0$，$\forall x\in(1,+\infty)$，$f(x)<a\ln a+ax$，求 a 的取值范围.

密封线内不要答题

高三数学参考答案

1. D　$(2-i)(1-i)=1-3i$，故复数$(2-i)(1-i)$在复平面内对应的点位于第四象限.

2. A　因为$x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$，当且仅当$x=\pm 1$时，等号成立，所以$A=\{y|y\geqslant 2\}$. 又$B=\{x|1<x<3\}$，所以$A\cup B=(1,+\infty)$.

3. A　$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，当$\omega=\pi$时，$f(x)$的最小正周期为2. 当$f(x)$的最小正周期为2时，$\omega=\pm\pi$，故选A.

4. B　因为椭圆的长轴长为6，所以$m=9$，$c^2=9-5=4$，即$c=2$，所以该椭圆的离心率$e=\frac{2}{3}$.

5. A　取A_1B_1的中点G，连接EG，FG(图略). 因为E，F分别为AB，A_1D_1的中点，所以$EG/\!/BB_1$，$FG/\!/B_1D_1$. 又EG，$FG\not\subset$平面BB_1D_1，所以$EG/\!/$平面BB_1D_1，$FG/\!/$平面BB_1D_1，故平面$EFG/\!/$平面BB_1D_1. 又$EF\not\subset$平面BB_1D_1，所以$EF/\!/$平面BB_1D_1，A正确，可证得B，C，D不正确.

6. C　当$n=1$时，$S_1=a_1$，当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_1-(n-1)^2a_1=(2n-1)a_1$，
所以$a_n=(2n-1)a_1$，所以$a_2=3a_1$，所以$q=3$，则$a_{k_3}=a_1\times 3^4=81a_1$，又因为$a_{k_3}=(2k_3-1)a_1=81a_1$，所以$2k_3-1=81$，则$k_3=41$.

7. B　因为$|x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2\geqslant\frac{3}{4}$，则$x^2\boldsymbol{a}^2+2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2\geqslant\frac{3}{4}$，即$x^2+2x\cos\theta+\frac{1}{4}\geqslant 0$恒成立，$\Delta=4\cos^2\theta-1\leqslant 0$，解得$-\frac{1}{2}\leqslant\cos\theta\leqslant\frac{1}{2}$，故$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角的取值范围是$[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$.

8. D　由图可知，$f(x)=k\sqrt{x}$的图象经过点$B(4,4)$，则$f(x)=2\sqrt{x}$.
再由$B(4,4)$，$C(8,0)$，可知直线BC的函数解析式为$y=-x+8$.
设$E(x,2\sqrt{x})$，则$D(x,0)$，$F(8-2\sqrt{x},2\sqrt{x})$，即直角梯形$CDEF$的面积$S=\frac{1}{2}(8-2\sqrt{x}-x+8-x)\times 2\sqrt{x}=16\sqrt{x}-2x\sqrt{x}-2x$. 由题意知，$S=16\sqrt{x}-2x\sqrt{x}-2x$，$0<x<4$. 令$t=\sqrt{x}$，则$S(t)=16t-2t^3-2t^2$，$0<t<2$，则$S'(t)=16-6t^2-4t=-2(t+2)(3t-4)$，当$t=\frac{4}{3}$时，直角梯形$CDEF$的面积最大，最大值为$\frac{352}{27}$.

9. BCD　甲得到A卡片与乙得到A卡片不可能同时发生，但可能同时不发生，所以"甲得到A卡片"与"乙得到A卡片"为互斥但不对立事件，A不正确，B正确. 甲得到A卡片的概率为$\frac{A_3^3}{A_4^4}=\frac{1}{4}$，C正确. 甲、乙2人中有人得到A卡片的概率为$\frac{C_2^1A_3^3}{A_4^4}=\frac{1}{2}$.

10. AB　因为$\overrightarrow{OM}=\lambda(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，所以$\overrightarrow{OM}^2=\lambda^2(\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2)$，所以$\cos(\beta-\alpha)=\frac{1}{2\lambda^2}-1$. 若$\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

则$\cos(\beta-\alpha)=0$，又$0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，所以$\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$，A正确.

若$\lambda=1$，则$\cos(\beta-\alpha)=-\frac{1}{2}$，则$\beta=\alpha+\frac{2}{3}\pi$，B正确.

由$\overrightarrow{OM}=\lambda(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，得$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}=\lambda(1+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})$，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OB}=\lambda(1+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})$，
即$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OB}$，所以$\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma$，

即$\cos(\alpha-\gamma)=\cos(\beta-\gamma)$，由于$0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$0<\gamma<2\pi$，

则$(\alpha-\gamma)+(\beta-\gamma)=-2\pi$或0，即$\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$或$\pi+\frac{\alpha+\beta}{2}$，C，D不一定正确.

11. BC　因为函数$y=\frac{x}{x-1}(x>1)$，$y=10^x$与$y=\lg x$的图象均关于直线$y=x$对称，设$y=\frac{x}{x-1}(x>1)$与$y=10^x$图象的交点为A，$y=\frac{x}{x-1}(x>1)$与$y=\lg x$图象的交点为B，则$A(x_1,10^{x_1})$与$B(x_2,\lg x_2)$也关于直线

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信

$y=x$ 对称,则 $x_1=\lg x_2$,$x_2=10^{x_1}$.

因为 $\frac{x_1}{x_1-1}-10^{x_1}=0$,所以 $\frac{x_1}{x_1-1}=x_2$,则 $x_1+x_2=x_1x_2$,即 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$.

因为 $y=\frac{x}{x-1}(x>1)$ 的图象与直线 $y=x$ 的交点为(2,2),所以 $x_1+x_2>4$,

$x_1x_2=x_1\cdot 10^{x_1}$,$x_1\in(1,2)$,则 $10<x_1x_2<200$.

12. ABD 依题意得,$p=2$,$y^2=4x$,由 $|AM|^2+|AN|^2=|AF|^2=4$,得 $|AM|^2+|AN|^2\geq 2|AM|\cdot|AN|$,所以 $|AM|\cdot|AN|\leq 2$,当且仅当 $|AM|=|AN|=\sqrt{2}$ 时,等号成立,所以四边形 $AMFN$ 面积的最大值为2,故A正确.

由 $|AM|^2+|AN|^2=(|AM|+|AN|)^2-2|AM|\cdot|AN|$,得 $(|AM|+|AN|)^2\leq 8$,即 $|AM|+|AN|\leq 2\sqrt{2}$,所以四边形 $AMFN$ 周长的最大值为 $4\sqrt{2}$,故B正确.

设直线 BC 的方程为 $x=my+1$,$B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消 x 得 $y^2-4my-4=0$,则 $|BC|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=4(1+m^2)$,同理 $|DE|=4(1+\frac{1}{m^2})$.

$\frac{1}{|BC|}+\frac{1}{|DE|}=\frac{1}{4(m^2+1)}+\frac{m^2}{4(m^2+1)}=\frac{1}{4}$,故C不正确.

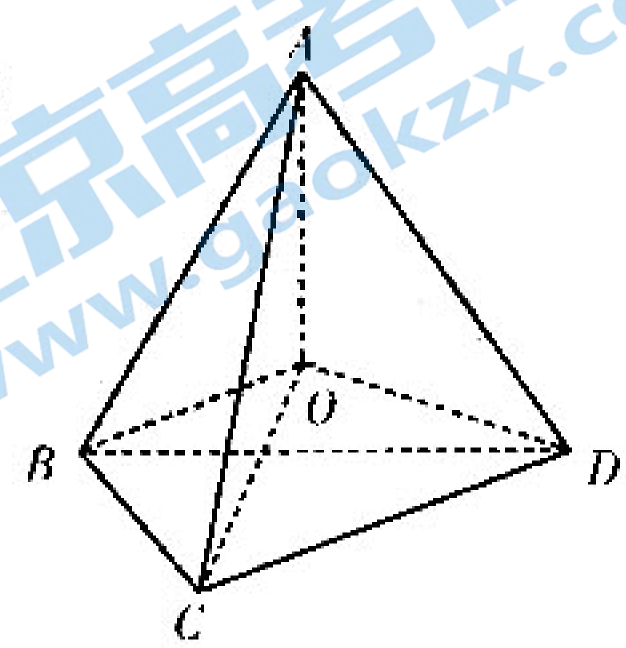
$\frac{1}{|BC|}+\frac{1}{|DE|}\geq 2\sqrt{\frac{1}{|BC|}\cdot\frac{1}{|DE|}}$,所以 $|BC|\cdot|DE|\geq 64$,当且仅当 $|BC|=|DE|=8$ 时,等号成立,此时 $S_{BDCE}=\frac{1}{2}|BC|\cdot|DE|\geq 32$,故D正确.

13. -8 $(x-\frac{2}{x^3})^4$ 的展开式中,常数项是 $C_4^1x^3(-\frac{2}{x^3})=-8$.

14. -3 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(0)=a-1=0$,解得 $a=1$.故当 $x\in[0,+\infty)$ 时,$f(x)=x^2-2x$,则 $f(-3)=-f(3)=-3$.

15. $[\frac{9}{2},9]$ 直线 AB 的方程为 $x-y+2=0$,圆心 C 到直线 AB 的距离 $d=\frac{1+2}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.因为直线 AB 与圆 C 存在公共点,所以 $m\geq(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2=\frac{9}{2}$.又 $AC^2=5$,$BC^2=9$,所以 $m\leq 9$.故 m 的取值范围为 $[\frac{9}{2},9]$.

16. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 如图,连接 AB,AC,AD,BC,CD,BD,得到正四面体 $ABCD$,则点 O 为正四面体 $ABCD$ 外接球的球心.



设 $AB=2a$,外接球的半径为 R,则 $R^2=(\frac{2\sqrt{6}a}{3}-R)^2+\frac{4}{3}a^2$,则 $R^2=(\frac{2\sqrt{6}a}{3}-R)^2+\frac{4}{3}a^2$,解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}a$,则 $\cos\angle AOB=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2OA\cdot OB}=-\frac{1}{3}$,

所以 $\sin\angle AOB=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

17. 解:(1)因为 $b^3-a^2b+ac^2-bc^2=0$,所以 $(b^2+ab-c^2)(b-a)=0$. …………2分

又 $C=\frac{2\pi}{3}$,所以 $c^2=a^2+b^2+ab$,所以 $b^2+ab-c^2\neq 0$. …………4分

所以 $b-a=0$,故 $A=B=\frac{\pi}{6}$. …………5分

(2)因为 $c=\sqrt{3}$,所以 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=1$,$b=a=1$, …………7分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}$. …………9分

设 BC 边上的高为 h,则 $\frac{1}{2}ah=\frac{\sqrt{3}}{4}$,解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 BC 边上高的长度为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………10分

18. 解:(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d.由 $a_1+a_5=14$,可得 $a_3=7$.

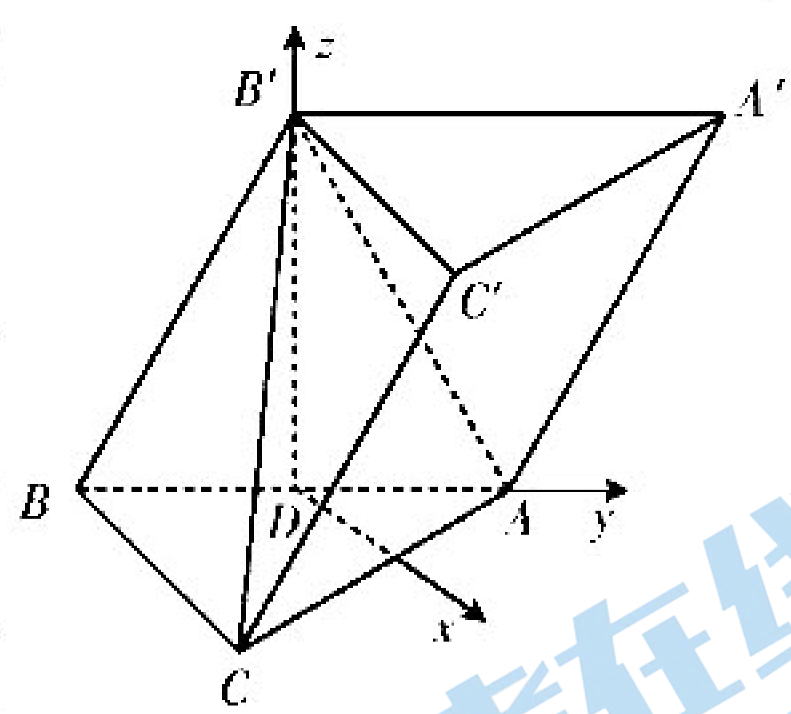
关注北京高考在线官方微信:北京高考资讯(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信

因为 $a_6=16$，所以 $3d=a_6-a_3=16-7=9$，所以 $d=3$. ………………………………………… 2分
因为 $a_3=a_1+2d=7$，所以 $a_1=1$，………………………………………………………… 4分
故 $a_n=3n-2$. ………………………………………………………………………………… 5分
(2)因为 $b_1\cdot b_9=b_5^2=64$，且$\{b_n\}$为正项数列，所以 $b_5=8$.

设等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，则 $q^3=\frac{b_8}{b_5}=8$，得 $q=2$，

所以 $b_n=b_8q^{n-8}=64\times2^{n-8}=2^n$. ………………………………………………………… 8分
因为 $a_n\cdot b_n=(3n-2)\cdot2^n$，
所以 $T_n=1\times2^1+4\times2^2+7\times2^3+\cdots+(3n-2)\times2^n$，
$2T_n=1\times2^2+4\times2^3+7\times2^4+\cdots+(3n-2)\times2^{n+1}$，…………………………………… 9分
两式相减，可得 $-T_n=2+3(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(3n-2)\times2^{n+1}=(5-3n)\cdot2^{n+1}-10$. ………… 11分
故 $T_n=(3n-5)\cdot2^{n+1}+10$. ……………………………………………………………… 12分

19. (1)证明：取 AB 的中点 D，连接 $B'D$，因为$\overrightarrow{BB'}$在直线 AB 上的投影向量为$\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，且平面 $ABC\perp$ 平面 $ABB'A'$，所以 $B'D\perp$ 平面 ABC. ……………………………………………………………… 1分
又 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $B'D\perp BC$. ……………………………………………………… 2分
因为 $AB\perp BC$，$AB\cap B'D=D$，所以 $BC\perp$ 平面 $ABB'A'$. …………………………………… 3分
因为 $BB'\subset$ 平面 $ABB'A'$，所以 $BC\perp BB'$. ………………………………………………… 4分
又 $BB'/\!/CC'$，所以 $BC\perp CC'$. ……………………………………………………………… 5分
(2)解：过点 D 作 BC 的平行线，以点 D 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$，



则 $A(0,1,0)$，$B'(0,0,\sqrt{3})$，$C(2,-1,0)$，$\overrightarrow{AB'}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{B'C}=(2,-1,-\sqrt{3})$. ……………………………………………………………… 6分

设平面 $B'AC$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}-y+\sqrt{3}z=0,\\2x-y-\sqrt{3}z=0.\end{cases}$ 令 $z=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(3,3,\sqrt{3})$. ……………………………………………………………… 8分
由图可知，平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$. ……………………………… 9分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$，………………………………………………… 11分

由图可知，二面角 $B'-AC-B$ 为锐角，所以二面角 $B'-AC-B$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$. ………… 12分

20. 解：(1)由题知 $\bar{x}=\frac{6+6.2+6.4+6.6+6.8}{5}=6.4$，$\bar{y}=\frac{50+45+45+40+35}{5}=43$. ……………… 2分

所以 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{1369-5\times6.4\times43}{205.2-5\times6.4^2}=\frac{-7}{0.4}=-17.5$. ……………………… 4分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=43+17.5\times6.4=155$. ……………………………………………… 5分
所以经验回归方程为 $\hat{y}=-17.5x+155$. ……………………………………………………… 6分

(2)由题知"体验非常好"的频率为$\frac{1}{2}$，"体验良好""体验不满意"的频率各为$\frac{1}{4}$，

随机变量 η 服从二项分布，即 $\eta\sim B(8,\frac{1}{2})$，$P(X=k)=C_8^k(\frac{1}{2})^8(k=0,1,2,3,\cdots,8)$，……… 7分

所以随机变量 η 的分布列如下表：

η	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

……………………………………………………………………………………………… 10分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息

随机变量 η 的均值为 $E(\eta)=8\times\frac{1}{2}=4$. …………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)当 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=0$ 时, $|MN|=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. …………………………………………… 2 分

又 $a^2+b^2=4$,所以 $a^2=3,b^2=1$. …………………………………………………………………… 3 分

故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$. …………………………………………………………… 4 分

(2)当直线 l 的斜率不存在时, $|MN|=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $|QF|=c=2$,则 $\frac{|QF|}{|MN|}=\sqrt{3}$.

当直线 l 的斜率为 0 时,不符合题意. …………………………………………………………… 5 分

当直线 l 的斜率存在且不为 0 时,设 l 的方程为 $y=k(x-2)$, $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,

联立方程组 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ \frac{x^2}{3}-y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(1-3k^2)x^2+12k^2x-12k^2-3=0$,

因为 l 与 C 的右支相交于 M,N 两点,所以 $k^2>\frac{1}{3}$,且 $x_1+x_2=\frac{12k^2}{3k^2-1}$, $x_1x_2=\frac{12k^2+3}{3k^2-1}$,

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{3}(1+k^2)}{3k^2-1}$. …………………………………… 7 分

因为 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-4)=\frac{4k}{3k^2-1}$,所以线段 MN 的中点 $R(\frac{6k^2}{3k^2-1},\frac{2k}{3k^2-1})$,所以线段 MN 的垂直平分线方程为 $y-\frac{2k}{3k^2-1}=-\frac{1}{k}(x-\frac{6k^2}{3k^2-1})$. ……………………………………………… 8 分

由题意可知 Q 为 MN 的垂直平分线与 y 轴的交点,令 $x=0$,得 $y=\frac{8k}{3k^2-1}$,即 $Q(0,\frac{8k}{3k^2-1})$,则 $|QF|=\sqrt{4+(\frac{8k}{3k^2-1})^2}=\frac{2\sqrt{9k^4+10k^2+1}}{3k^2-1}$, …………………………………………………………………… 9 分

则 $\frac{|QF|}{|MN|}=\sqrt{\frac{9k^2+1}{3k^2+3}}=\sqrt{3-\frac{8}{3k^2+3}}$. …………………………………………………… 10 分

因为 $k^2>\frac{1}{3}$,所以 $1<\sqrt{3-\frac{8}{3k^2+3}}<\sqrt{3}$. ……………………………………………… 11 分

综上所述, $\frac{|QF|}{|MN|}$ 的取值范围为 $(1,\sqrt{3}]$. ……………………………………………… 12 分

22. 解:(1)由题可知 $f'(x)=\frac{\ln x-1-x\ln x}{e^x}$, …………………………………………………… 1 分

则 $f(1)=0$, $f'(1)=-\frac{1}{e}$, …………………………………………………………………………… 3 分

所以 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=-\frac{1}{e}(x-1)$,即 $y=-\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}$. ……………………… 5 分

(2) $\forall x\in(1,+\infty)$, $f(x)<a\ln a+ax$,则 $x\ln x<ae^x(\ln a+x)$,即 $x\ln x<ae^x\ln(ae^x)$, ……………… 7 分

令 $g(x)=x\ln x$,则 $g'(x)=1+\ln x$,当 $x\in(0,\frac{1}{e})$ 时, $g'(x)<0$,即 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上单调递减,当 $x\in(\frac{1}{e},+\infty)$ 时, $g'(x)>0$,即 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上单调递增,且当 $x\in(0,1)$ 时, $g(x)<0$,当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $g(x)>0$. ………………………………………………………………………………………… 9 分

由 $x\ln x<ae^x\ln(ae^x)$,可得 $g(x)<g(ae^x)$,

因为 $x\in(1,+\infty)$,所以 $ae^x>x$,即 $a>\frac{x}{e^x}$. ……………………………………………………… 11 分

令 $h(x)=\frac{x}{e^x}$, $x\in(1,+\infty)$,求导得 $h'(x)=\frac{1-x}{e^x}<0$,则 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $a\geq\frac{1}{e}$,即 a 的取值范围是 $[\frac{1}{e},+\infty)$. …………………………………………………… 12 分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。