北京市朝阳区 2023 ~2024 学年度第一学期期末质量检测

高二数学

2024.1

（考试时间 120 分钟　　满分 150 分）

本试卷共 4 页，150 分。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知直线 l 的斜率为 $-\sqrt{3}$，则 l 的倾斜角为

（A）$-\frac{\pi}{6}$　　（B）$-\frac{\pi}{3}$　　（C）$\frac{2\pi}{3}$　　（D）$\frac{5\pi}{6}$

（2）已知等差数列 $\{a_n\}$，其前 n 项和为 S_n，若 $a_2+a_5+a_8=3$，则 $S_9=$

（A）3　　（B）6　　（C）9　　（D）27

（3）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的实轴长为 $2\sqrt{2}$，其左焦点到双曲线的一条渐近线的距离为 $\sqrt{2}$，则双曲线的渐近线方程为

（A）$y=\pm x$　　（B）$y=\pm\sqrt{2}x$　　（C）$y=\pm\sqrt{3}x$　　（D）$y=\pm 2x$

（4）过抛物线 $x^2=4y$ 的焦点 F 作倾斜角为 30° 的直线 l 与抛物线交于 A,B 两点，则 $|AB|=$

（A）$\frac{10}{3}$　　（B）4　　（C）$\frac{13}{3}$　　（D）$\frac{16}{3}$

（5）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为 CD 和 A_1B_1 的中点，则异面直线 AF 与 D_1E 所成角的余弦值是

（A）0　　（B）$\frac{3}{5}$　　（C）$\frac{4}{5}$　　（D）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

（6）若方程 $\frac{x^2}{4-m}-\frac{y^2}{m}=1$ 表示椭圆，则实数 m 的取值范围是

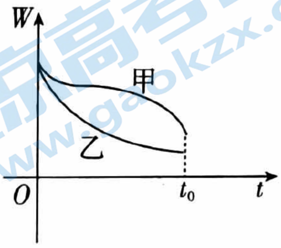
（A）$(0,4)$　　（B）$(-\infty,0)$　　（C）$(4,+\infty)$　　（D）$(-\infty,0)\cup(0,4)$

（7）已知等比数列 $\{a_n\}$ 各项都为正数，前 n 项和为 S_n，则“$\{a_n\}$ 是递增数列”是“$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$S_{2n}<3S_n$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

(8)为了响应国家节能减排的号召,甲、乙两个工厂进行了污水排放治理,已知某月两厂污水的排放量 W 与时间 t 的关系如图所示,下列说法正确的是



(A)该月内,甲乙两厂中甲厂污水排放量减少得更多

(B)该月内,甲厂污水排放量减少的速度是先慢后快

(C)在接近 t_0 时,甲乙两厂中乙厂污水排放量减少得更快

(D)该月内存在某一时刻,甲、乙两厂污水排放量减少的速度相同

(9) A,B 是圆 $C_1:(x-2)^2+(y-m)^2=4$ 上两点,$|AB|=2\sqrt{3}$,若在圆 $C_2:(x-2)^2+(y+1)^2=9$ 上存在点 P 恰为线段 AB 的中点,则实数 m 的取值范围为

(A) $[1,3]$　　(B) $[-5,3]$

(C) $[-5,-3]\cup[1,3]$　　(D) $[-4,-2]\cup[2,4]$

(10)已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=2^n,n\in\mathbf{N}^*$. 设 $t=(a_1+1)(a_2+1)(a_4+1)\cdots(a_{2^{k-1}}+1)$,$k\in\mathbf{N}^*$,若 $\log_2(t+1)=256$,则 $k=$

(A)6　　(B)7　　(C)8　　(D)9

第二部分(非选择题　共 100 分)

二、填空题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分。

(11)两条直线 $l_1:x-y=0$ 与 $l_2:x-y-2=0$ 之间的距离是________.

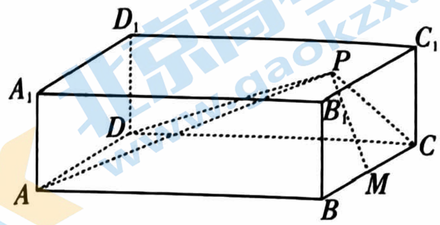
(12)已知函数 $f(x)=\sin 2x$,则 $f'(0)=$________.

(13)以 $A(4,6)$,$B(-2,-2)$ 为直径端点的圆的方程是________.

(14)在空间直角坐标系中,已知点 $A(1,0,0)$,$B(0,1,0)$,$C(0,0,1)$,若点 $P(x,y,-1)$ 在平面 ABC 内,写出一个符合题意的点 P 的坐标________.

(15)某学校球类社团组织学生进行单淘汰制的乒乓球比赛(负者不再比赛),如果报名人数是 2 的正整数次幂,那么每 2 人编为一组进行比赛,逐轮淘汰. 以 2022 年世界杯足球赛为例,共有 16 支队进入单淘汰制比赛阶段,需要四轮,8+4+2+1=15 场比赛决出冠军. 如果报名人数不是 2 的正整数次幂,则规定在第一轮比赛中安排轮空(轮空不计入场数),使得第二轮比赛人数为 2 的最大正整数次幂.(如 20 人参加单淘汰制比赛,第一轮有 12 人轮空,其余 8 人进行 4 场比赛,淘汰 4 人,使得第二轮比赛人数为 16.)最终有 120 名同学参加校乒乓球赛,则直到决出冠军共需________轮;决出冠军的比赛总场数是________.

(16) 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=3$，$AA_1=1$，M 为棱 BC 的中点，点 P 是侧面 CC_1D_1D 上的动点，满足 $\angle APD=\angle CPM$，给出下列四个结论：



① 动点 P 的轨迹是一段圆弧；

② 动点 P 的轨迹长度为 $\dfrac{\pi}{3}$；

③ 动点 P 的轨迹与线段 CC_1 有且只有一个公共点；

④ 三棱锥 $P-ADD_1$ 的体积的最大值为 $\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 5 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

(17)（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=(2x^2-3x)e^x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间.

(18)（本小题 13 分）

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，满足 $S_n=2a_n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$. 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，且 $b_1=-a_1$，$b_2+b_4=-10$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

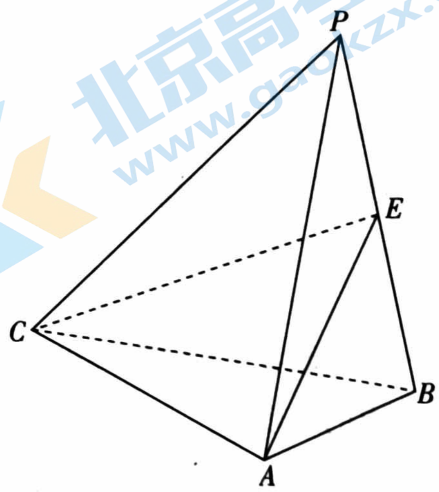
（Ⅱ）求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和.

(19)(本小题 14 分)

如图,三棱锥 $P-ABC$ 中,$AB=BC=CA=PB=1$,平面 $PAB\perp$ 平面 ABC,点 E 是棱 PB 的中点,再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知.

(Ⅰ)求证:$AB\perp PC$;

(Ⅱ)求二面角 $E-AC-B$ 的余弦值.



条件①: $PC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$;

条件②: 直线 PC 与平面 PAB 所成角为 $45°$.

注:如果选择条件①和条件②分别解答,按第一个解答计分.

(20)(本小题 15 分)

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点坐标为 $(0,\sqrt{5})$,离心率为 $\dfrac{2}{3}$.

(Ⅰ)求椭圆 E 的标准方程;

(Ⅱ)过椭圆 E 的右焦点 F 作斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l 交椭圆 E 于 A,B 两点,线段 AB 的垂直平分线 m 分别交直线 l,x 轴,y 轴于点 M,N,K,求 $\dfrac{|KN|}{|MN|}$ 的值.

(21)(本小题 15 分)

设正整数 $n\geq 4$,若由实数组成的集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 满足如下性质,则称 A 为 $\mathcal{H}_n$ 集合:对 A 中任意四个不同的元素 a,b,c,d,均有 $ab+cd\in A$.

(Ⅰ)判断集合 $A_1=\left\{0,\dfrac{1}{2},1,2\right\}$ 和 $A_2=\left\{\dfrac{1}{3},1,2,3\right\}$ 是否为 $\mathcal{H}_4$ 集合,说明理由;

(Ⅱ)若集合 $A=\{0,x,y,z\}$ 为 $\mathcal{H}_4$ 集合,求 A 中大于 1 的元素的可能个数;

(Ⅲ)若集合 A 为 $\mathcal{H}_n$ 集合,求证:A 中元素不能全为正实数.

北京市朝阳区2023~2024学年度第一学期期末质量检测

高二数学参考答案

2024.1

一、选择题(共10小题,每小题5分,共50分)

(1)C　(2)C　(3) A　(4) D　(5)B

(6)B　(7)D　(8) D　(9) C　(10)C

二、填空题(共6小题,每小题5分,共30分)

(11)$\sqrt{2}$　(12) 2　(13) $(x-1)^2+(y-2)^2=25$

(14)$(1,1,-1)$(答案不唯一,满足 $x+y=2$)　(15) 七;119　(16) ①②④

三、解答题(共5小题,共70分)

(17)(本小题13分)

解:(Ⅰ)$f(x)$定义域为$\mathbf{R}$.

$f'(x)=(2x^2+x-3)e^x$.

所以$f'(0)=-3$.又因为$f(0)=0$,

所以$f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=-3x$. ………………………… 5分

(Ⅱ)$f'(x)=(2x^2+x-3)e^x$.

令$f'(x)>0$,即$(2x^2+x-3)e^x>0$,解得$x<-\frac{3}{2}$或$x>1$.

令$f'(x)<0$,即$(2x^2+x-3)e^x<0$,解得$-\frac{3}{2}<x<1$.

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-\frac{3}{2})$,$(1,+\infty)$;

单调递减区间为$(-\frac{3}{2},1)$. ……………………… 13分

(18)(本小题13分)

解:(Ⅰ)当$n=1$时,$S_1=2a_1-1=a_1$得$a_1=1$.

当$n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$时,$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$, ①

由已知$S_n=2a_n-1$, ②

②-①得$a_n=2a_n-2a_{n-1}$.

所以$a_n=2a_{n-1}$.

所以数列$\{a_n\}$为等比数列,且公比为$q=2$.

因为$a_1=1$,所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

设数列$\{b_n\}$公差为d,

$b_1=-1$,$b_2+b_4=(b_1+d)+(b_1+3d)=2b_1+4d=-10$,

由$\begin{cases}b_1=-1,\\ b_1+2d=-5\end{cases}$得$d=-2$.

所以$b_n=b_1+(n-1)d=-1+(n-1)\times(-2)=-2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………… 8分

（Ⅱ）设 $c_n=a_n+b_n=2^{n-1}+(-2n+1)$，前 n 项和

$$T_n=(1+2+4+\cdots+2^{n-1})-2\times(1+2+3+\cdots+n)+n$$

$$=\frac{1-2^n}{1-2}-2\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

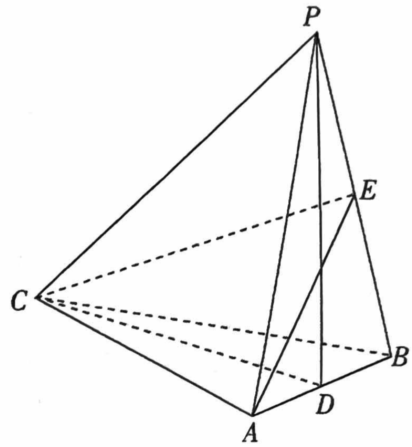
$$=2^n-n^2-1.$$

…………………… 13 分

（19）（本小题 14 分）

解：选择条件①：

（Ⅰ）取 AB 的中点 D，连接 CD,PD.



由于△ABC 是等边三角形，故 $CD\perp AB$，

又平面 $ABC\perp$ 平面 PAB，$CD\subset$ 平面 ABC，

平面 $ABC\cap$ 平面 $PAB=AB$，

故 $CD\perp$ 平面 PAB.

而 $PD\subset$ 平面 PAB，故 $CD\perp PD$，即 $\angle PDC=90°$，

所以 $PD=\sqrt{PC^2-CD^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $BP=1$，$BD=\frac{1}{2}$，故 $PB^2=PD^2+BD^2$，

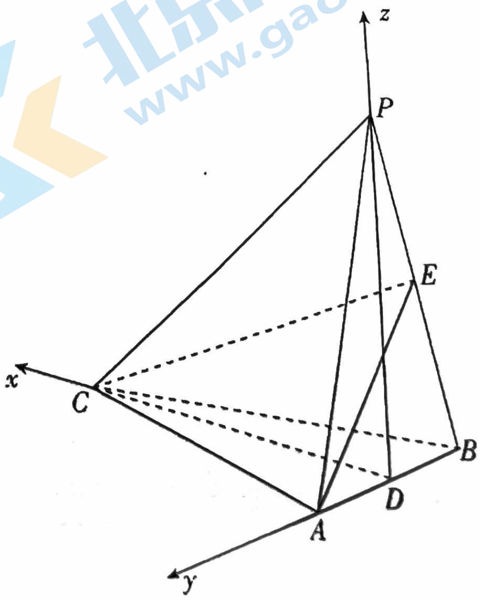
所以 $\angle BDP=90°$，即 $AB\perp PD$.

因为 $AB\perp CD$，$PD\cap CD=D$，$PD,CD\subset$ 平面 PCD，

所以 $AB\perp$ 平面 PCD.

所以 $AB\perp PC$. …………………… 6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 DP,DC,DA 两两垂直，以 D 为坐标原点建立如图空间直角坐标系.



于是 $A(0,\frac{1}{2},0)$，$B(0,-\frac{1}{2},0)$，$C(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0)$，

$P(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$.

点 E 是棱 PB 的中点，所以 $E(0,-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$.

于是 $\overrightarrow{CE}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$，

又 $\overrightarrow{AC}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 EAC 的法向量.

$$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot \boldsymbol{n}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)\cdot(x,y,z)=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=0,\\ \overrightarrow{CE}\cdot \boldsymbol{n}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})\cdot(x,y,z)=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z=0,\end{cases}$$

令 $y=\sqrt{3}$，可得 $x=1,z=3$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},3)$.

又 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$ 是平面 ABC 的法向量.

设二面角 $E-AC-B$ 大小为 θ，由题可知 θ 为锐角，

所以 $\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$. .... 14 分

选择条件②：

（Ⅰ）取 AB 的中点 D，连接 CD，PD.

由于 $\triangle ABC$ 是等边三角形，故 $CD\perp AB$.

又平面 $ABC\perp$ 平面 ABP，$CD\subset$ 平面 ABC，平面 $ABC\cap$ 平面 $ABP=AB$，

所以 $CD\perp$ 平面 ABP.

所以 PC 在平面 ABP 上的射影是 PD.

所以 $\angle CPD$ 是 PC 与平面 ABP 所成角.

所以 $\angle CPD=45°$.

所以 $PD=CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $BP=1$，$BD=\frac{1}{2}$，故 $BP^2=PD^2+BD^2$，所以 $\angle BDP=90°$，即 $AB\perp PD$.

因为 $AB\perp CD$，$PD\cap CD=D$，PD，$CD\subset$ 平面 PCD，

所以 $AB\perp$ 平面 PCD.

所以 $AB\perp CP$. .... 6 分

（Ⅱ）同上. .... 14 分

(20)（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由已知 $\begin{cases}b=\sqrt{5},\\ e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a=3$，则椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. .... 4 分

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，$k\neq 0$.

代入椭圆 E，整理得，

$(9k^2+5)x^2-36k^2x+36k^2-45=0$.

$\Delta=900(k^2+1)>0$，设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$M(x_M,y_M)$，$N(x_N,y_N)$.

则 $x_A+x_B=\frac{36k^2}{9k^2+5}$，则 $x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_B)=\frac{18k^2}{9k^2+5}$，

则 $y_M=k(\frac{18k^2}{9k^2+5}-2)=\frac{-10k}{9k^2+5}$.

依题意 m 的方程为 $y+\frac{10k}{9k^2+5}=-\frac{1}{k}(x-\frac{18k^2}{9k^2+5})$.

令 $y=0$，得 $x_N=\frac{8k^2}{9k^2+5}$.

则 $\frac{|KN|}{|KM|}=\frac{x_N}{x_M}=\frac{4}{9}$，则 $\frac{|KN|}{|MN|}=\frac{4}{5}$. ……………………… 15 分

(21)(本小题 15 分)

解:(Ⅰ)集合 A_1 是 $\mathcal{H}_4$ 集合，理由如下：

当 $\{\{a,b\},\{c,d\}\}=\{\{0,\frac{1}{2}\},\{1,2\}\}$ 时，$0\times\frac{1}{2}+1\times2=2\in A_1$；

当 $\{\{a,b\},\{c,d\}\}=\{\{0,1\},\{\frac{1}{2},2\}\}$ 时，则 $0\times1+\frac{1}{2}\times2=1\in A_1$；

当 $\{\{a,b\},\{c,d\}\}=\{\{0,2\},\{1,\frac{1}{2}\}\}$ 时，$0\times2+\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}\in A_1$.

集合 A_2 不是 $\mathcal{H}_4$ 集合，理由如下：

取 $(a,b,c,d)=(\frac{1}{3},1,2,3)$，则 $ab+cd=\frac{1}{3}\times1+2\times3=\frac{19}{3}\notin A_2$，

不满足题中性质. ……………………… 4 分

(Ⅱ)当 $(a,b,c,d)=(0,z,x,y)$ 时，$ab+cd=xy\in A$；

当 $(a,b,c,d)=(0,x,y,z)$ 时，$ab+cd=yz\in A$；

当 $(a,b,c,d)=(0,y,z,x)$ 时，$ab+cd=xz\in A$.

所以 $\{x,y,z\}=\{xy,yz,xz\}$.

不妨设 $x<y<z$.

①若 $x<y<z<0$，因为 $yz>0$，从而 $yz\notin A$，与 $yz\in A$ 矛盾.

②若 $x<y<0<z$，因为 $xz<yz<xy$，故 $xz=x,yz=y,xy=z$，所以 $z=1,xy=1$.

经验证此时 $A=\{x,\frac{1}{x},0,1\}$ 是 $\mathcal{H}_4$ 集合，元素大于 1 的个数为 0.

③若 $x<0<y<z$，因为 $xz<xy<0$，所以与 $\{x,y,z\}=\{xy,yz,xz\}$ 矛盾.

④若 $0<x<y<z$，因为 $xy<xz<yz$，故 $xy=x,xz=y,yz=z$，所以 $y=1,z=\frac{1}{x}>1$.

经验证此时 $A=\{0,x,1,\frac{1}{x}\}$ 是 $\mathcal{H}_4$ 集合，大于 1 的个数为 1.

综上，A 中大于 1 的元素的可能个数为 0,1. ……………………… 9 分

(Ⅲ)假设集合 A 中全为正实数.

若 A 中至少有两个正实数大于 1,设 $0<a_1<a_2<\cdots<a_n$,则 $a_n>a_{n-1}>1$,

取 $(a,b,c,d)=(a_{n-3},a_{n-2},a_{n-1},a_n)$,则 $ab+cd=a_{n-3}a_{n-2}+a_{n-1}a_n\in A$,

而 $a_{n-3}a_{n-2}+a_{n-1}a_n>a_{n-1}a_n>a_n$,从而 $a_{n-3}a_{n-2}+a_{n-1}a_n\notin A$,矛盾.

因此 A 中至多有 1 个正实数大于 1.

当 $n=4$ 时,设 $a_1<a_2<a_3<a_4$.

若 $0<a_1<a_2<a_3\leqslant 1<a_4$,

当 $(a,b,c,d)=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ 时,$ab+cd=a_1a_2+a_3a_4\in A$;

当 $(a,b,c,d)=(a_1,a_3,a_2,a_4)$ 时,$ab+cd=a_1a_3+a_2a_4\in A$;

当 $(a,b,c,d)=(a_1,a_4,a_2,a_3)$ 时,$ab+cd=a_1a_4+a_2a_3\in A$.

由于 $(a_1a_2+a_3a_4)-(a_1a_3+a_2a_4)=a_4(a_3-a_2)-a_1(a_3-a_2)$

$=(a_4-a_1)(a_3-a_2)>0$,

$(a_1a_3+a_2a_4)-(a_1a_4+a_2a_3)=a_2(a_4-a_3)-a_1(a_4-a_3)$

$=(a_4-a_3)(a_2-a_1)>0$,

所以 $a_1a_2+a_3a_4>a_1a_3+a_2a_4>a_1a_4+a_2a_3>a_1$.

所以 $a_1a_2+a_3a_4=a_4$,$a_1a_3+a_2a_4=a_3$,$a_1a_4+a_2a_3=a_2$.

因为 $0<a_3-a_1<1$,

所以 $a_4-a_2=(a_1a_2+a_3a_4)-(a_1a_4+a_2a_3)$

$=a_4(a_3-a_1)-a_2(a_3-a_1)$

$=(a_4-a_2)(a_3-a_1)<a_4-a_2$,矛盾.

因此当 $n=4$ 时,$0<a_1,a_2,a_3,a_4\leqslant 1$.

当 $n\geqslant 5$ 时,集合 A 中至少有 4 个不同的正实数不大于 1.

设 $S=\{t\mid t=|a_i-a_j|,i,j\in\{1,2,\cdots,n\},i\neq j\}$,

因为 S 是有限集,设 $s-r=\min S$,其中 $r,s\in A$,$r<s$.

又因为集合 A 中至少有 4 个不同的正实数不大于 1,

所以 $s-r<1$,且存在 $p,q\in A$ 且 $p\leqslant 1,q\leqslant 1$ 使 p,q,r,s 互不相同.

则 $0<|p-q|<1$.

当 $(a,b,c,d)=(r,p,s,q)$ 时,$ab+cd=rp+sq\in A$,

当 $(a,b,c,d)=(s,p,r,q)$ 时,$ab+cd=sp+rq\in A$.

于是 $|(rp+sq)-(sp+rq)|=|p(r-s)-q(r-s)|=|p-q|(s-r)<s-r$,

与 $s-r=\min S$ 矛盾.

因此,A 中元素不能全为正实数. ························ 15 分