2024北京昌平高一（上）期末

数　学

第一部分（选择题）

一、选择题共10小题，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{0,2\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则集合 $A\cup B=$（　）

A. $\{0\}$　　B. $\{-1,1\}$　　C. $\{-1,0,1,2\}$　　D. $\{2\}$

2. 下列函数中，是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　）

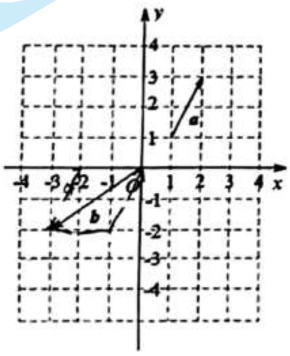
A. $y=\dfrac{1}{x}$　　B. $y=x^2-1$　　C. $y=2^{-x}$　　D. $y=\log_{\frac{1}{2}}|x|$

3. 对于任意实数 a，b，c，下列命题是真命题的是（　）

A. 如果 $a>b$，那么 $ac>bc$　　B. 如果 $a>b$，那么 $|a|>|b|$

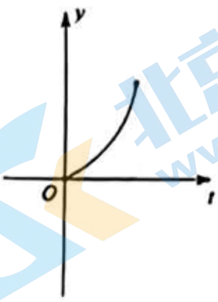
C. 如果 $a>b$，那么 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　D. 如果 $ac^2>bc^2$，那么 $a>b$

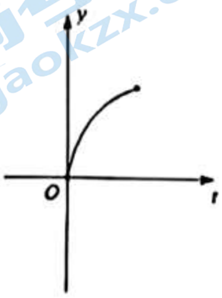
4. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$（　）

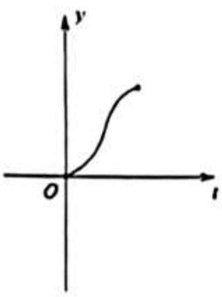


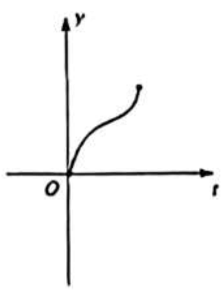
A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. 4

5. 向一个给定的容器（如图所示）中倒水，且任意相等的时间间隔内所倒的水的体积相等，记容器内水面的高度 y 随时间 t 变化的函数为 $y=f(t)$，则以下函数图象中，可能是 $y=f(t)$ 的图象的是（　）

A.


B.


C.


D.


6. 以下茎叶图记录了甲、乙两名学生六次数学测验的成绩（百分制）.

甲		乙
1	6	
2	7	7
9	8	2 5 7
5 3 0	9	2 3

给出下列四个结论：

①甲同学成绩的极差比乙同学大；

②甲同学成绩的平均数比乙同学高；

③甲同学成绩的60% 分位数比乙同学小；

④甲同学成绩的方差比乙同学大

其中所有正确结论的序号是（ ）

A. ①④　　B. ①③　　C. ②④　　D. ①③④

7. 为了得到函数 $y=\lg\dfrac{x}{100}$ 的图象，只需把函数 $y=\lg x$ 的图象上所有的点（ ）

A. 向左平移 2 个单位长度　　B. 向右平移 2 个单位长度

C. 向上平移 2 个单位长度　　D. 向下平移 2 个单位长度

8. 已知函数 $f(x)=x^2-x+c-3$，则“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使 $f\left(x_0\right)<0$”是“$c<3$”的（ ）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+\dfrac{1}{2}, x\le 0\\ |\ln x|, x>0\end{cases}$，则函数 $g(x)=f(x)-k(0<k\le\dfrac{1}{2})$ 的零点个数为（ ）

A. 2　　B. 1 或 2　　C. 3　　D. 1 或 3

10. 高一年级某班 30 名同学参加体能测试，给出下列三个判断：

①有人通过了体能测试；

②同学甲没有通过体能测试；

③有人没有通过体能测试.

若这三个判断中只有一个是真，则下列选项中正确的是（ ）

A. 只有 1 名同学通过了体能测试　　B. 只有 1 名同学没有通过体能测试

C. 30 名同学都通过了体能测试　　D. 30 名同学都没通过体能测试

第二部分（非选择题）

二、填空题共 6 小题.

11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\lg(x+3)$ 的定义域为________.

12. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，且$\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$，$\vec{n}=3\vec{a}+k\vec{b}$.若$\vec{m}//\vec{n}$，则$k=$______________.

13. $0.3^{0.3}$，$\log_3 10$，$\sqrt[10]{27}$三个数中最大的数是________________.

14. 在$\triangle ABC$中，点D，E满足$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$.若$\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$x+y=$__________.

15. 甲、乙、丙三人投篮的命中率分别为$0.8,0.5,0.5$.若三人各投篮一次，则甲、乙、丙三人都投中的概率为______________；至少有两人投中的概率为______________.

16. 已知函数$f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$，给出下列四个结论：

① $f(x)$在定义域上单调递增；

② $f(x)$存在最大值；

③不等式$f(x)\le\dfrac{1}{3}$的解集是$(-\infty,-\ln 2]$；

④ $f(x)$的图象关于点$(0,\dfrac{1}{2})$对称.

其中所有正确结论的序号是________________.

三、解答题共 5 小题，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

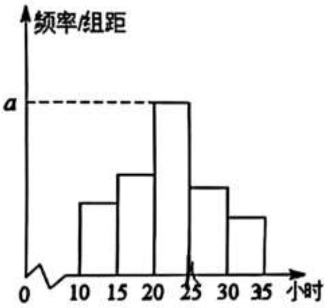
17. 已知全集$U=\mathbf{R}$，$A=\left\{x\middle|x^2-x-2>0\right\}$，$B=\left\{x\middle|\dfrac{x+2}{x-1}<0\right\}$，$C=\left\{x\middle|x^2+(3-a)x-3a<0\right\}$.

（1）求$A\cap B$，$A\cup B$.

（2）若$\left(\complement_U A\right)\subseteq C$，求实数$a$的取值范围.

18. 为促进更多人养成良好的阅读习惯，某小区开展了“我读书，我快乐”的活动.为了解小区居民最近一个月的阅读时间（单位：小时），随机抽取M个居民作为样本，得到这M个居民的阅读时间，整理得到如下数据分组及频数、频率分布表和频率分布直方图：

分组区间	频数	频率
$[10,15)$	15	0.15
$[15,20)$	20	
$[20,25)$	35	0.35
$[25,30)$	m	
$[30,35]$	12	0.12
合计	M	1



（1）求出表中 M， m 及图中 a 的值；

（2）若本小区有3200人，试估计该小区阅读时间在区间 $[15,20)$ 内的人数；

（3）在所取样本中，从阅读时间不少于25小时的居民中，按分层抽样的方法选取5人，并从这5人中选2人去参加社区知识竞赛，求至多有1人阅读时间在区间 $[25,30)$ 内的概率.

19. 已知函数 $f(x)=ax^2-bx-1(a\neq 0)$.

（1）若关于 x 的不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集为 $\left[-1,-\dfrac{1}{4}\right]$，

（i）求 a,b 的值；

（ii）设 $g(x)=1-\dfrac{f(x)}{x}$， $x\in(0,+\infty)$，求 $g(x)$ 的最小值；

（2）当 $b=a-1$ 时，若函数 $f(x)$ 的图象上任意一点都不在直线 $y=x$ 的上方，求 a 的取值范围.

20. 某旅行社不定期组成旅游团去风景区旅游，若旅游团人数在30或30以下（不低于20），则收取费用180元/人；若旅游团人数大于30，则给予如下优惠：每多1人，费用每人减少3元，直到达到满额50人为止（大客车限乘51人，含司机）. 旅行社每次需支出成本费用3000元.

（1）若旅游团人数为40，求每人应交的费用；

（2）设旅游团人数为 x 时每人应交的费用为 y 元，求出 y 与 x 之间的关系式；

（3）求旅游团人数 x 为多少时，旅行社可获得的利润 L 最大.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}+a$ 是奇函数.

（1）求实数 a 的值；

（2）判断函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性，并说明理由；

（3）解关于 t 的不等式 $f(1-3t)+f(t-2)<0$.

参考答案

一、选择题共 10 小题，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】C

【分析】根据并集的知识求得正确答案.

【详解】依题意 $A\cup B=\{-1,0,1,2\}$.

故选：C

2.【答案】B

【分析】根据函数奇偶性与单调性判断即可.

【详解】对于选项 A：$y=\dfrac{1}{x}$ 关于原点对称，是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 A 不正确；

对于选项 B：$y=x^2-1$ 关于 y 轴对称，是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 B 正确；

对于选项 C：$y=2^{-x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 是非奇非偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 C 不正确；

对于选项 D：$y=\log_{\frac{1}{2}}|x|=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x, x>0\\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), x<0\end{cases}$ 关于 y 轴对称，是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 D 不正确.

故选：B.

3.【答案】D

【分析】采用举反例的方法，可判断 A，B，C，利用不等式性质可判断 D.

【详解】对于 A：如果 $a>b$，当 $c<0$ 时，则 $ac<bc$，选项 A 不正确；

对于 B：如果 $a>b$，取 $a=0$，$b=-1$，满足条件，但 $|a|<|b|$，选项 B 不正确；

对于 C：如果 $a>b$，取 $a=1$，$b=-1$，满足条件，但 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，选项 C 不正确；

对于 D：如果 $ac^2>bc^2$，则必有 $c\neq 0$，故 $c^2>0$，则 $a>b$，选项 D 正确.

故选：D.

4.【答案】B

【分析】根据向量加法的运算法则和向量模的计算求解.

【详解】由图知 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-3,-2)$，所以 $\vec{a}+\vec{b}=(-2,0)$，

所以 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+0}=2$.

故选：B.

5.【答案】C

【分析】分析函数增长速度得到结论.

【详解】因为单位时间内注水的体积不变，结合容器的形状，水面的高度变化应该是：先逐渐变快，后逐渐变慢.

故选：C

6.【答案】A

【分析】根据茎叶图、极差、平均数、百分位数、方差等知识进行分析，从而确定正确答案.

【详解】①甲同学成绩的极差为$95-61=34$，

乙同学成绩的极差为$93-77=16$，所以①正确，排除C选项.

②甲同学成绩的平均数为$\frac{61+72+89+90+93+95}{6}=\frac{500}{6}=\frac{250}{3}$，

乙同学成绩的平均数为$\frac{77+82+85+87+92+93}{6}=\frac{516}{6}=\frac{258}{3}$，所以②错误.

③$6\times0.6=3.6$，所以甲同学成绩的60%分位数是90，

乙同学成绩的60%分位数是87，所以③错误，排除BD选项. 所以A选项正确.

同时，通过观察茎叶图可知甲同学的成绩相对分散，乙同学的成绩相对集中，

所以甲同学成绩的方差比乙同学大，④正确.

故选：A

7.【答案】D

【分析】变形函数解析式，再与指定函数比对即得.

【详解】函数$y=\lg\frac{x}{100}$化为：$y=\lg x-2$，显然把函数$y=\lg x$的图象下移2个单位长度即得$y=\lg x-2$的图象，

所以为了得到函数$y=\lg\frac{x}{100}$的图象，只需把函数$y=\lg x$的图象上所有的点向下平移2个单位长度.

故选：D

8.【答案】B

【分析】由不等式有解得到c的取值范围，从而得到充分性不成立；通过$c<3$，判断函数对应的不等式有解，说明必要性成立.

【详解】由"$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使$f\left(x_0\right)<0$"，即$x^2-x+c-3<0$，所以$\Delta=1-4\left(c-3\right)>0$，

即$c<\frac{13}{4}$，充分性不成立；

已知函数$f(x)=x^2-x+c-3$，当"$c<3$"时，$\Delta=1-4\left(c-3\right)>0$，函数与$x$轴有两个交点，所以"$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使$f\left(x_0\right)<0$"成立，即必要性成立.

综述，已知函数$f(x)=x^2-x+c-3$，则"$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使$f\left(x_0\right)<0$"是"$c<3$"的必要而不充分条件.

故选：B.

9.【答案】A

【分析】分段分析函数 $f(x)$ 的取值集合，再分段确定 $g(x)$ 的零点个数即可.

【详解】当 $x\le 0$ 时，函数 $f(x)=e^{x}+\frac{1}{2}$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增， $f(x)\in(\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$，显然

$g(x)\in(\frac{1}{2}-k,\frac{3}{2}-k]$，

而 $0<k\le\frac{1}{2}$，即恒有 $g(x)>0$，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上无零点；

当 $x>0$ 时， $f(x)=|\ln x|$，函数 $f(x)$ 取值集合为 $[0,+\infty)$，

由 $g(x)=0$， $0<k\le\frac{1}{2}$，得 $|\ln x|=k$，解得 $x=e^{-k}$ 或 $x=e^{k}$， $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点，

所以函数 $g(x)$ 的零点个数为 2.

故选：A

10.【答案】C

【分析】根据给定条件，分析确定正确的一个判断，即可求得正确答案.

【详解】“有人通过了体能测试”与“有人没有通过体能测试”不可能都为真，

若“同学甲没有通过体能测试” 为真，则 “有人没有通过体能测试” 必真，不符合题意，

因此“同学甲没有通过体能测试”是假的，即同学甲通过了体能测试，②假，①真，③假，

由“有人没有通过体能测试”是假的判断，得 30 名同学都通过了体能测试，C 正确.

故选：C

第二部分（非选择题）

二、填空题共 6 小题.

11.【答案】$\left(-3,1\right)$

【分析】由函数定义域的求法直接求解.

【详解】由 $\begin{cases}1-x>0\\x+3>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1\\x>-3\end{cases}\Rightarrow -3<x<1$.

故答案为：$\left(-3,1\right)$

12.【答案】-6

【分析】根据向量平行列方程，从而求得 k 的值.

【详解】由于 $\vec{m}//\vec{n}$，所以存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $\vec{m}=\lambda\vec{n}$，

即 $\vec{a}-2\vec{b}=\lambda\left(3\vec{a}+k\vec{b}\right)=3\lambda\vec{a}+k\lambda\vec{b}$，

所以 $\begin{cases}3\lambda=1\\k\lambda=-2\end{cases}$，解得 $\lambda=\frac{1}{3},k=-6$.

故答案为：-6

13.【答案】$\log_3 10$

【分析】利用指数函数、对数函数等知识，和 1，2 进行比较即可求得正确答案.

【详解】$0.3^{0.3} < 0.3^0 = 1$，

$\sqrt[10]{27} = 27^{\frac{1}{10}}$，$1 = 27^0 < 27^{\frac{1}{10}} < 27^{\frac{1}{9}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{9}} = 3^{\frac{1}{3}} < 8^{\frac{1}{3}} = 2$，

$\log_3 10 > \log_3 9 = 2$，

所以三个数中最大的是$\log_3 10$.

故答案为：$\log_3 10$

14.【答案】$-\frac{1}{2}$##-0.5

【分析】利用向量的线性运算，结合平面向量基本定理求解即得.

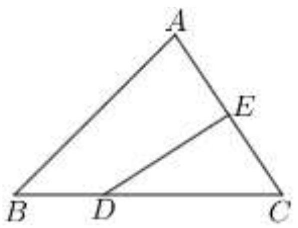
【详解】在$\triangle ABC$中，点 D，E 满足$\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$，

则$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，

而$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$不共线，又$\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$，因此$x = -\frac{2}{3}, y = \frac{1}{6}$，

所以$x + y = -\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$



15.【答案】 ①. 0.2##$\frac{1}{5}$ ②. 0.65##$\frac{13}{20}$

【分析】根据相互独立事件概率计算公式求得正确答案.

【详解】甲、乙、丙三人都投中的概率为$0.8 \times 0.5 \times 0.5 = 0.2$.

至少有两人投中的概率为

$(1-0.8) \times 0.5 \times 0.5 + 0.8 \times (1-0.5) \times 0.5 + 0.8 \times 0.5 \times (1-0.5) + 0.8 \times 0.5 \times 0.5 = 0.65$.

故答案为：0.2；0.65

16.【答案】①③④

【分析】根据给定的函数，分析单调性判断①；利用指数函数值域判断②；解指数不等式判断③；探讨函数图象的对称性判断④即得.

【详解】函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ 的定义域为 **R**，函数 $y=e^{-x}$ 在 **R** 上单调递减，因此 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，①正确；

由于 $e^{-x}>0$，则 $1+e^{-x}>1$，$f(x)\in(0,1)$，函数 $f(x)$ 不存在最大值，②错误；

不等式 $f(x)\le\dfrac{1}{3}$，即 $\dfrac{1}{1+e^{-x}}\le\dfrac{1}{3}$，整理得 $e^{-x}\ge 2$，解得 $x\le-\ln 2$，$f(x)\le\dfrac{1}{3}$ 的解集是 $(-\infty,-\ln 2]$，③正确；

由于 $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}+\dfrac{1}{1+e^{x}}=\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}+\dfrac{1}{1+e^{x}}=1$，因此 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,\dfrac{1}{2})$ 对称，④正确，

所以所有正确结论的序号是①③④.

故答案为：①③④

【点睛】结论点睛：函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，$\forall x\in D$，

(1)存在常数 a，b 使得 $f(x)+f(2a-x)=2b\Leftrightarrow f(a+x)+f(a-x)=2b$，则函数 $y=f(x)$ 图象关于点 (a,b) 对称.

(2)存在常数 a 使得 $f(x)=f(2a-x)\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)$，则函数 $y=f(x)$ 图象关于直线 $x=a$ 对称.

三、解答题共 5 小题，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17.【答案】（1）$A\cap B=\{x|-2<x<-1\},A\cup B=\{x|x<1\text{或}x>2\}$

（2）$a>2$

【分析】（1）解不等式求得集合 A,B，进而求得 $A\cap B$，$A\cup B$.

（2）先求得 $\complement_U A$，然后根据 $(\complement_U A)\subseteq C$ 以及对 a 进行分类讨论，从而求得 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>2$，

所以 $A=\{x|x<-1\text{或}x>2\}$，

$\dfrac{x+2}{x-1}<0\Leftrightarrow(x+2)(x-1)<0$，解得 $-2<x<1$，

所以 $B=\{x|-2<x<1\}$，

所以 $A\cap B=\{x|-2<x<-1\},A\cup B=\{x|x<1\text{或}x>2\}$.

【小问 2 详解】

$\complement_U A=\{x|-1\le x\le 2\}$，

$x^2+(3-a)x-3a=(x+3)(x-a)<0$，

当 $a=-3$ 时，$(x+3)(x-a)=(x+3)^2<0$ 无解，

无法使得 $(\complement_U A)\subseteq C$ 成立，不符合题意.

当$a<-3$时，由$(x+3)(x-a)<0$解得$a<x<-3$，

则$C=\{x|a<x<-3\}$，无法使得$(\complement_U A)\subseteq C$成立，不符合题意.

当$a>-3$时，由$(x+3)(x-a)<0$解得$-3<x<a$，

则$C=\{x|-3<x<a\}$，

要使$(\complement_U A)\subseteq C$成立，则需$a>2$.

18.【答案】（1）$M=100, m=18, a=0.7$

（2）640

（3）$\frac{7}{10}$

【分析】（1）根据频率与频数求得M，结合图表求得m, a.

（2）根据阅读时间在区间$[15,20)$内的频率求得对应的人数.

（3）根据分层抽样以及古典概型概率计算公式求得正确答案.

【小问1详解】

依题意，$M=\frac{15}{0.15}=100$，

所以$m=100-15-20-35-12=18$，

$a=\frac{0.35}{5}=0.7$.

【小问2详解】

阅读时间在区间$[15,20)$内的人数为$3200\times\frac{20}{100}=640$.

【小问3详解】

$[25,30)$抽取$5\times\frac{18}{18+12}=3$人，记为$1,2,3$，

$[30,35]$抽取$5\times\frac{12}{18+12}=2$人，记为$4,5$.

从这5人中选2人去参加社区知识竞赛，基本事件有：

$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}$，共10个，

至多有1人阅读时间在区间$[25,30)$内包含的基本事件有：

$\{1,4\},\{1,5\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}$，共7个，

所以至多有1人阅读时间在区间$[25,30)$内的概率为$\frac{7}{10}$.

19.【答案】（1）（i）$a=-4, b=5$；（ii）$g(x)$的最小值为10

（2）$[-4,0)$

【分析】（1）（i）根据一元二次不等式的解求得 a,b.（ii）利用基本不等式求得 $g(x)$ 的最小值.

（2）由 $f(x)\le x$ 恒成立，然后对 a 进行分类讨论来求得 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

（i）依题意，关于 x 的不等式 $ax^2-bx-1\ge 0$ 的解集为 $\left[-1,-\frac{1}{4}\right]$，

所以 $\begin{cases} a<0 \\ -1+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{b}{a} \\ -1\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{-1}{a} \end{cases}$，解得 $a=-4,b=5$.

（ii）由（i）得 $f(x)=-4x^2-5x-1$，

当 $x>0$ 时，$g(x)=1-\frac{f(x)}{x}=1+\frac{4x^2+5x+1}{x}=4x+\frac{1}{x}+6$

$\ge 2\sqrt{4x\times\frac{1}{x}}+6=10$，当且仅当 $4x=\frac{1}{x},x=\frac{1}{2}$ 时等号成立，

所以 $g(x)$ 的最小值为 10.

【小问 2 详解】

当 $b=a-1$ 时，$f(x)=ax^2-(a-1)x-1(a\ne 0)$，

由于函数 $f(x)$ 的图象上任意一点都不在直线 $y=x$ 的上方，

所以 $f(x)\le x$ 恒成立，即 $ax^2-(a-1)x-1\le x$ 恒成立，

即 $ax^2-ax-1\le 0$ 恒成立，

当 $a>0$ 时，不等式 $ax^2-ax-1\le 0$ 不恒成立，

当 $a<0$ 时，要使 $ax^2-ax-1\le 0$ 恒成立，

则需 $\begin{cases} a<0 \\ \Delta=a^2+4a\le 0 \end{cases}$，解得 $-4\le a<0$，

所以 a 的取值范围是 $[-4,0)$.

20.【答案】（1）150 元；

（2）$y=\begin{cases} 180, 20\le x\le 30, x\in \mathrm{N} \\ 270-3x, 30<x\le 50, x\in \mathrm{N} \end{cases}$；

（3）45.

【分析】（1）根据题意计算即可；

（2）根据自变量x的取值范围，分$20\le x\le 30$或$30<x\le 50$列出函数解析式即可；

（3）利用题中的函数解析式，结合自变量的取值范围和配方法，分段求最值，即可得到结论．

【小问1详解】

若旅游团人数为40，每人应交的费用为：$180-3(40-30)=150$元；

【小问2详解】

当$20\le x\le 30$时，$y=180$，

当$30<x\le 50$时，$y=180-3(x-30)=270-3x$，

即$y=\begin{cases}180, 20\le x\le 30, x\in \mathrm{N}\\ 270-3x, 30<x\le 50, x\in \mathrm{N}\end{cases}$；

【小问3详解】

当$20\le x\le 30$时，$L=180x-3000$，

当$30<x\le 50$时，$L=x(270-3x)-3000=-3x^2+270x-3000$，

即$L=\begin{cases}180x-3000, 20\le x\le 30\\ -3x^2+270x-3000, 30<x\le 50\end{cases}$．

当$20\le x\le 30$时，$L=180x-3000$中L随x的增大而增大，

所以$x=30$时，$L_{\max}=2400$，

当$30<x\le 50$时，$L=-3x^2+270x-3000=-3(x-45)^2+3075$，

即$x=45$时，$L_{\max}=3075>2400$．

所以当旅游团人数为45时，旅行社可获得的利润L最大.

21.【答案】(1) $\frac{1}{2}$；

（2）单调递减，理由见解析；

（3）$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{3},2)$．

【分析】(1) 利用奇函数的定义求出a的值.

（2）利用指数函数的单调性判断$f(x)$在$(0,+\infty)$上的单调性即得.

（3）由奇函数的性质及函数$f(x)$的单调性解不等式即得.

【小问1详解】

函数$f(x)=\frac{1}{2^x-1}+a$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，由$f(x)$是奇函数，得$f(-x)+f(x)=0$，

因此$\frac{1}{2^{-x}-1}+a+\frac{1}{2^x-1}+a=\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2^x-1}+2a=-1+2a=0$，解得$a=\frac{1}{2}$，

所以实数a的值为$\frac{1}{2}$.

【小问2详解】

由（1）知 $f(x)=\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

函数 $y=2^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则函数 $y=2^x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

函数 $y=\frac{1}{2^x-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

【小问 3 详解】

因为函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

显然当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)<0$，

不等式 $f(1-3t)+f(t-2)<0\Leftrightarrow f(t-2)<-f(1-3t)=f(3t-1)$，

于是 $3t-1<t-2<0$ 或 $0<3t-1<t-2$ 或 $3t-1>0>t-2$，

解 $3t-1<t-2<0$，得 $t<-\frac{1}{2}$，解 $0<3t-1<t-2$，得无解，解 $3t-1>0>t-2$，得 $\frac{1}{3}<t<2$，

所以不等式 $f(1-3t)+f(t-2)<0$ 的解集为 $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{3},2)$.

【点睛】易错点睛：借助函数单调性求解在定义域上不单调的函数不等式，必须分成在同一单调区间内和在不同单调区间内两大类求解.