

2022 北京四中高三（上）期中

数 学

（试卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。）

1. 已知集合 $A = \{x \mid x - 2 < 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - x < 0\}$, 则 $A \cap B =$

(A) $(-\infty, 2)$ (B) $(-\infty, 0)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(0, 1)$

2. 已知复数 z 满足 $(1 + 2i)z = 2 + i$, 则 $|z| =$

(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (B) 1 (C) $\sqrt{5}$ (D) 5

3. 下列函数中, 既是偶函数, 又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是

(A) $y = x^3$ (B) $y = -x^2 + 1$ (C) $y = \log_2 x$ (D) $y = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0 \\ 2^{-x}, & x < 0 \end{cases}$

4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = a_{n-1} + 2 (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$, $a_1 = 1$, 其前 n 项和为 S_n , 若 $2022 < S_n < 2035$, 则 $n =$

(A) 47 (B) 46 (C) 45 (D) 44

5. 若点 $M \left(\cos \frac{5\pi}{6}, \sin \frac{5\pi}{6} \right)$ 在角 α 的终边上, 则 $\tan 2\alpha =$

(A) $-\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b = 3, c = \sqrt{6}, \angle C = \frac{\pi}{4}$, 则 $\angle B$ 的大小为

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

7. 如果 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, S_n 为其前 n 项和, 那么“ $q > 0$ ”是“数列 $\{S_n\}$ 为单调数列”的

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0, \\ \log_2(x+1), & x > 0. \end{cases}$ 则函数 $y = f(f(x)) - 2$ 的零点个数为

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

9. 声音的等级 $f(x)$ (单位: dB) 与声音强度 x (单位: W / m^2) 满足 $f(x) = 10 \times \lg \frac{x}{1 \times 10^{-12}}$. 喷气式飞机起

飞时, 声音的等级约为 140 dB; 一般说话时, 声音的等级约为 60 dB, 那么喷气式飞机起飞时声音强度约为一般说话时声音强度的

(A) 10^6 倍 (B) 10^8 倍 (C) 10^{10} 倍 (D) 10^{12} 倍

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1, & x \geq 1, \\ kx - k, & x < 1 \end{cases}$ 若存在非零实数 x_0 , 使得 $f(1-x_0) = f(1+x_0)$ 成立, 则实数 k 的

取值范围是

(A) $(-\infty, -1)$ (B) $(-\infty, -1]$ (C) $(-1, 0)$ (D) $[-1, 0)$

二、填空题(本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.)

11. 函数 $f(x) = \frac{1}{1 - \ln x}$ 的定义域是_____.

12. 计算: $\log_3 75 - 2\log_9 5 - \log_{\sqrt{3}} \sqrt{5} =$ _____.

13. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{1}{2}, a_3 = 2$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q =$ _____;

$a_1a_3 + a_2a_4 + a_3a_5 + a_4a_6 + \dots + a_na_{n+2} =$ _____.

14. 若关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + a \leq 0$ 在区间 $[0, 4]$ 上有解, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 已知函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{3\pi}{10}\right)$ ($\omega > 0$) 在区间 $[0, 2\pi]$ 上有且仅有 5 个零点, 则下列结论中正确的是_____.

(1) $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{100}\right)$ 上单调递增;

(2) $f(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上有且仅有 3 个极大值点;

(3) $f(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上有且仅有 2 个极小值点;

(4) ω 的取值范围是 $\left[\frac{12}{5}, \frac{29}{10}\right)$.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 85 分.)

16. (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin^2 x + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

17. (本小题 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $c = 2, C = 30^\circ$. 再从条件(1)、条件(2)、条件(3)这三个条件中选择一个作为已知, 使其能够确定唯一的三角形, 求:

(I) a 的值;

(II) $\triangle ABC$ 的面积.

条件① $b = 2\sqrt{3}$; 条件②: $2b = \sqrt{3}a$; 条件③: $A = 45^\circ$.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

18.(本小题 13 分)

某科研单位在研发钛合金产品的过程中使用了一种新材料.该产品的性能指标值 y 是这种新材料的含量 x (单位:克)的函数,且性能指标值 y 越大,该产品的性能越好.

当 $0 \leq x < 7$ 时, y 和 x 的关系为以下三种函数模型中的一个:

① $y = ax^2 + bx + c$; ② $y = k \cdot a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$; ③ $y = k \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$;

其中 k, a, b, c 均为常数.

当 $x \geq 7$ 时, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-m}$, 其中 m 为常数.

研究过程中部分数据如下表:

x (单位: 克)	0	2	6	10
y	-4	8	8	$\frac{1}{9}$

(I)指出模型①②③中最能反映 y 和 $x(0 \leq x < 7)$ 关系的一个,并说明理由;

(II)求出 y 与 x 的函数关系式;

(III)求该新合金材料的含量 x 为多少时,产品的性能达到最佳.

19.(本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x + (a-1)x, a \in \mathbf{R}$.

(I)当 $a = 2$ 时,求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II)求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最小值;

(III)求证:“ $a \geq 0$ ”是“函数 $f(x)$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递增”的充分不必要条件.

20.(本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x - ax + \frac{e^x}{x}, a \in \mathbf{R}$.

(I)当 $a \leq e$ 时,求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II)若函数 $f(x)$ 存在两个极小值点 x_1, x_2 , 求证: $f(x_1) = f(x_2)$.

21.(本小题 15 分)

已知正整数 $n \geq 5$, 集合 $S_n = \{X \mid X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$. 对于 S_n 中的元素

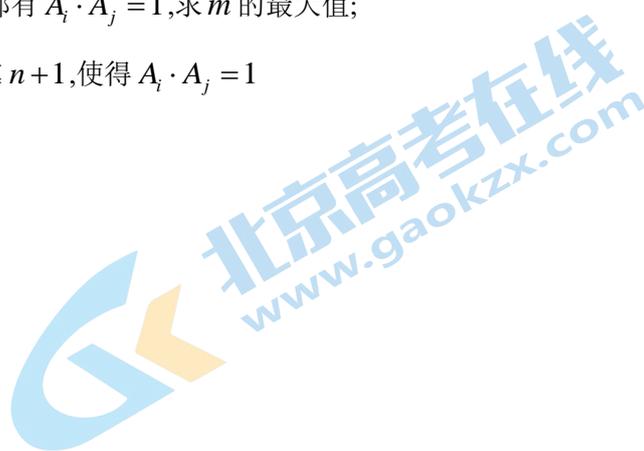
$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 定义 $A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$.

令 $T_n = \{X \in S_n \mid X \cdot X = 3\}$.

(I)直接写出 T_6 的两个元素及 T_6 的元素个数;

(II) 已知 $A_1, A_2, \dots, A_m \in T_6$, 满足对任意 $1 \leq i < j \leq m$, 都有 $A_i \cdot A_j = 1$, 求 m 的最大值;

(III) 证明: 对任意 $A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \in T_n$, 总存在 $1 \leq i < j \leq n+1$, 使得 $A_i \cdot A_j = 1$



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯