

梅州市高三总复习质检试题（2024.2）

数 学

本试卷共 6 页。满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x < a\}$ ， $B = \{x | -1 < x < 2\}$ ， $A \cup \complement_{\mathbb{R}} B = \mathbb{R}$ ，则 a 的取值范围为
 A. $(-\infty, -1]$ B. $(-1, 2]$ C. $[-1, 2)$ D. $[2, +\infty)$
2. 已知 $2-i$ （其中 i 为虚数单位）是关于 x 的方程 $x^2 + px + q = 0$ 的一个根，则实数 p, q 分别等于
 A. $p = 4, q = 5$ B. $p = -4, q = -5$ C. $p = -4, q = 5$ D. $p = 4, q = -5$
3. 某单位有职工 450 人，其中男职工 150 人，现为了了解职工健康情况，该单位采取分层随机抽样的方法抽取了一个容量为 90 的样本，得出体重情况：男性平均体重为 63 千克；女性平均体重为 54 千克。则下列说法不正确的是
 A. 抽查的样本中女职工人数为 60 B. 该单位男职工的体重普遍比女职工较重
 C. 估计该单位职工平均体重为 58.5 D. 每一位男或女职工被抽中的可能性均为 $\frac{1}{5}$
4. 某圆锥的底面直径和高均是 2，则其内切球（与圆锥的底面和侧面均相切）的半径为
 A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
5. 已知 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -2$ ，则 $\sin 2\alpha =$
 A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{4}$

6. 如果双曲线 $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ 的离心率为 2, 那么椭圆 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ 的离心率为

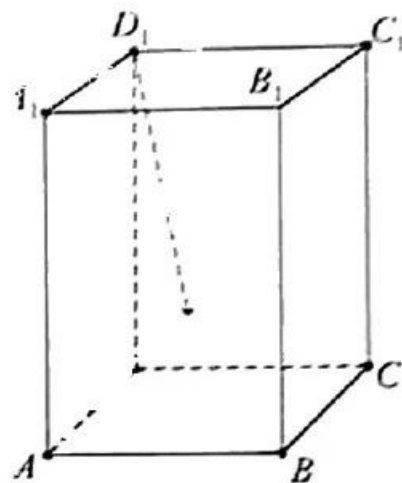
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

7. 已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , S 为 $\triangle ABC$ 的面积, $2S = b^2 + c^2 - a^2$, 则 $\frac{c}{b}$ 的取值范围为

- A. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5}\right)$ B. $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5}\right)$ C. $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 2\right)$ D. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 2\right)$

8. 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2AB = 2$, 点 P 是面 ABB_1A_1 上的动点, 若点 P 到点 D_1 的距离是点 P 到直线 AB 的距离的 2 倍, 则动点 P 的轨迹是 () 的一部分

- A. 圆 B. 椭圆
C. 双曲线 D. 抛物线



二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 已知直线 m, n 和平面 α, β , 且 $n \subset \alpha$, 则下列条件中, p 是 q 的充分不必要条件的是

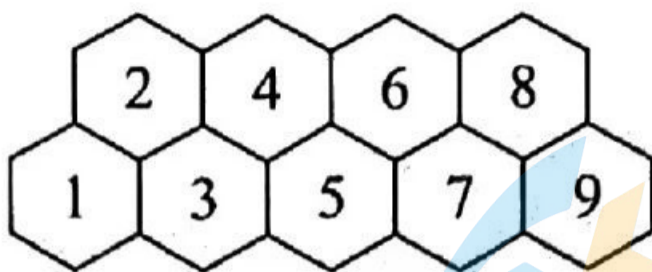
- A. $p: m \parallel \alpha, q: m \parallel n$ B. $p: m \perp \alpha, q: m \perp n$
C. $p: \alpha \parallel \beta, q: n \parallel \beta$ D. $p: n \perp \beta, q: \alpha \perp \beta$

10. 已知函数 $f(x) = e^{\sin x} - e^{\cos x}$, 则下列说法正确的是

- A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称 B. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 中心对称
C. $f(x)$ 是一个周期函数 D. $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内有且只有一个零点

11. 如图, 从 1 开始出发, 一次移动是指: 从某一格开始只能移动到邻近的一格, 并且总是向右或右上或右下移动, 而一条移动路线由若干次移动构成, 如从 1 移动到 9, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$ 就是一条移动路线。从 1 移动到数字 n ($n = 2, 3, \dots, 9$) 的不同路线条数记为 r_n , 从 1 移动到 9 的事件中, 跳过数字 n ($n = 2, 3, \dots, 8$) 的概率记为 p_n , 则下

列结论正确的是



A. $r_6 = 8$

B. $r_{n+1} > r_n$

C. $p_5 = \frac{9}{34}$

D. $p_7 > p_8$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知 \vec{e}_1, \vec{e}_2 表示两个夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的单位向量， O 为平面上的一个固定点， P 为这个平面上任意一点，当 $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ 时，定义 (x, y) 为点 P 的斜坐标。设点 Q 的斜坐标为 $(2, 1)$ ，则 $|\overrightarrow{OQ}| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. $3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{333\dots3}_{n \text{ 个 } 3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 已知圆 $C: (x-4)^2 + y^2 = 5$ ，点 P 在抛物线 $T: y^2 = 4x$ 上运动，过点 P 引圆 C 的切线，切点分别为 A, B ，则 $|AB|$ 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是等比数列。已知 $a_1 = b_1 = 4, b_2 = a_2 + 1, b_3 = 2a_3 - 4$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的项从小到大依次排列（相等项计两项）得到新数列 $\{c_n\}$ ，求 $\{c_n\}$ 的前 50 项的和。

16. (15分) 甲、乙两人进行五局三胜制乒乓球比赛, 已知每局比赛, 甲胜的概率为 $\frac{2}{3}$, 乙胜的概率为 $\frac{1}{3}$.

(1) 求甲赢得比赛的概率;

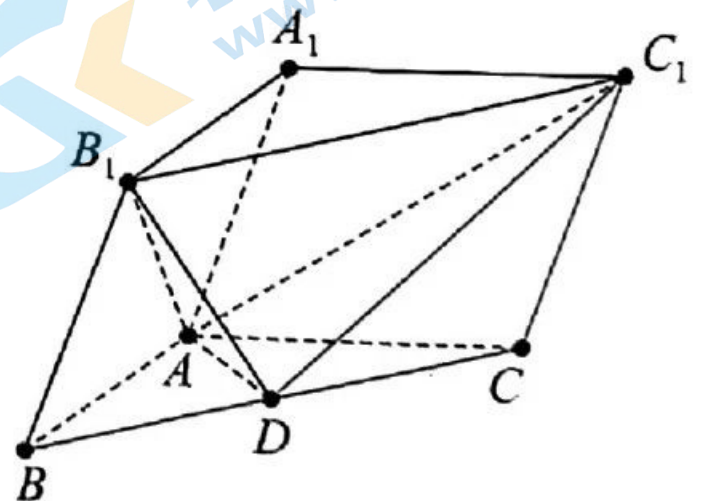
(2) 求两人比赛局数的数学期望.

17. (15分) 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AC=2$, $\angle BAC=120^\circ$, 且 $BC=2BB_1$, $\angle CBB_1=60^\circ$,

侧面 $BCC_1B_1 \perp$ 底面 ABC , D 是 BC 的中点.

(1) 求证: 平面 $C_1AD \perp$ 平面 B_1AD ;

(2) 在棱 AA_1 上是否存在点 Q , 使得 BQ 与平面 ACC_1A_1 的所成角为 60° . 如果存在, 请求出 $\frac{AQ}{AA_1}$; 如果不存在, 请说明理由.



18. (17分) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{ax}{x+1}$ ($a > 0$).

(1) 若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点, 求 a 的值;

(2) 若 $f(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 证明: $(\frac{2024}{2023})^{2024} > e$ (e 为自然对数的底数).

19. (17分) 有一种曲线画图工具如图1所示, O 是滑槽 AB 的中点, 短杆 ON 可绕 O 转动, 长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动, 且 $DM = DN = ON = 1$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内做往复运动时, 带动 N 绕 O 转动, 跟踪动点 N 的轨迹得到曲线 C_1 , 跟踪动点 M 的轨迹得到曲线 C_2 , 以 O 为原点, AB 所在的直线为 x 轴建立如图2所示的平面直角坐标系.

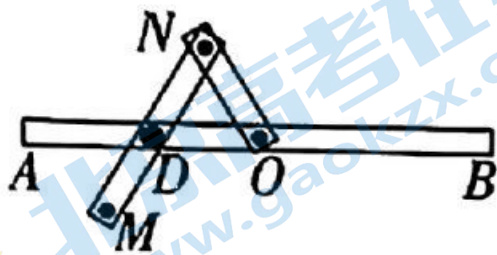


图 1

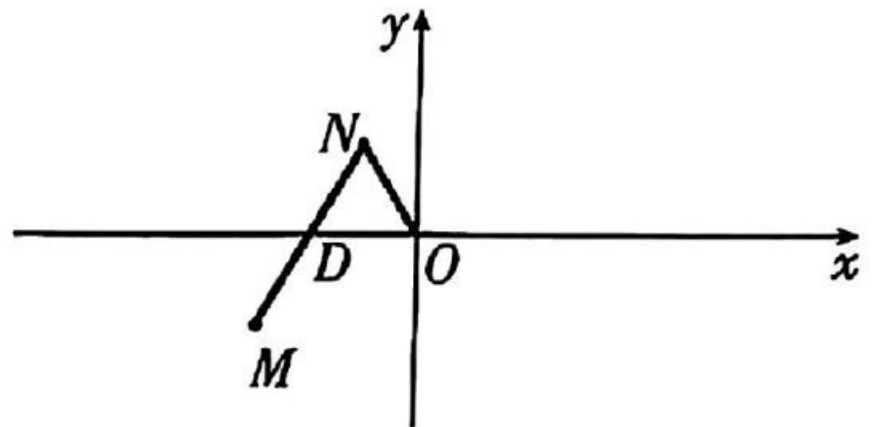


图 2

(1) 分别求曲线 C_1 和 C_2 的方程;

(2) 曲线 C_1 与 x 轴的交点为 E, F , 动直线 $l: y = kx + m$ 与曲线 C_1 相切, 且与曲线 C_2 交于 P, Q 两点, 求 $\triangle EPQ$ 的面积与 $\triangle FPQ$ 的面积乘积的取值范围.