

# 高三十月考试

## 数 学

### 注意事项：

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:集合、常用逻辑用语、不等式、函数、导数、三角函数、平面向量。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若向量  $\overrightarrow{AB} = (12, -2)$  与  $\overrightarrow{CD} = (a, -6)$  垂直, 则  $a =$   
A. 1      B. 2      C.  $-1$       D.  $-2$
2. 已知集合  $M = \{a \in \mathbb{N} | ax^2 = 9, x \in \mathbb{Z}\}$ ,  $N = \{x \in \mathbb{Z} | ax^2 = 9, a \in \mathbb{N}\}$ , 则  
A.  $M \cap N = \{1\}$       B.  $N \subseteq M$       C.  $M \cap N = \emptyset$       D.  $M \subseteq N$
3. 下列命题中,既是存在量词命题又是真命题的是  
A.  $\exists x \in \mathbb{R}, 1 + \sin x < 0$       B. 每个等腰三角形都有内切圆  
C.  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x \geqslant -1$       D. 存在一个正整数, 它既是偶数又是质数
4. 若  $a = \log_3 82, b = \log_2 15, c = 0.2^{-1.1}$ , 则  
A.  $b < a < c$       B.  $b < c < a$       C.  $a < b < c$       D.  $c < b < a$
5. 已知  $a, b$  均为实数, 则“ $a^2 = b^2$ ”是“ $a^2 + ab = 2b^2$ ”的  
A. 充要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充分不必要条件      D. 既不充分也不必要条件
6. 某质点的位移  $y$ (单位: m)与时间  $t$ (单位: s)满足函数关系式  $y = t^4 + 3t^2 - t$ , 当  $t = t_0$  时, 该质点的瞬时加速度大于  $9 \text{ m/s}^2$ , 则  $t_0$  的取值范围是  
A.  $(\frac{1}{3}, +\infty)$       B.  $(\frac{1}{2}, +\infty)$   
C.  $(1, +\infty)$       D.  $(\frac{3}{2}, +\infty)$
7. 已知  $f(x+1)$  是偶函数,  $f(0) = 0$ , 且当  $x \geqslant 1$  时,  $f(x)$  单调递增, 则不等式  $\frac{f(x)}{4x^2 - 1} < 0$  的解集为  
A.  $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, 2)$       B.  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$   
C.  $(-2, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 2)$       D.  $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (2, +\infty)$

8. 若函数  $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{5})$  ( $\omega > 0$ ) 在区间  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  上恰有两个零点, 则  $\omega$  的取值范围是

- A.  $(\frac{23}{15}, \frac{11}{5}]$       B.  $[\frac{23}{15}, \frac{11}{5})$   
C.  $[\frac{23}{15}, \frac{11}{5}) \cup [\frac{13}{5}, \frac{43}{15})$       D.  $(\frac{23}{15}, \frac{11}{5}] \cup [\frac{13}{5}, \frac{43}{15}]$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 若函数  $f(x) = \sin 5x$ , 则

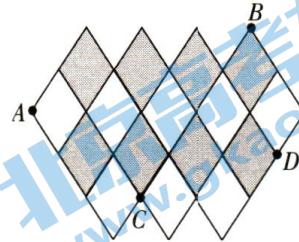
- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\frac{\pi}{5}$   
B.  $f(x)$  的图象关于点  $(\frac{4\pi}{5}, 0)$  对称  
C.  $f(x)$  在  $(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3})$  上有极小值  
D.  $f(x)$  的图象关于直线  $x = -\frac{\pi}{10}$  对称

10. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(xy) = f(x)f(y) - f(x) - f(y) + 2$ ,  $f(0) < 2$ ,  $f(0) \neq f(1)$ , 且  $f(x) > 0$ , 则

- A.  $f(0) = 1$       B.  $f(-1) = 2$       C.  $f(-x) = 2f(x)$       D.  $f(-x) = f(x)$

11. 已知 16 个边长为 2 的小菱形的位置关系如图所示, 且每个小菱形的最小内角为  $60^\circ$ , 图中的  $A, B, C, D$  四点均为菱形的顶点, 则

- A.  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = -20$   
B.  $\overrightarrow{AC}$  在  $\overrightarrow{AB}$  上的投影向量为  $\frac{5}{19}\overrightarrow{AB}$   
C.  $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{13}{12}\overrightarrow{AC}$   
D.  $\overrightarrow{AD}$  在  $\overrightarrow{AC}$  上的投影向量的模为  $2\sqrt{7}$



12. 已知函数  $y = a^x$  与  $y = \log_a x$  的图象只有一个交点, 则  $a$  的取值可能为

- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{16}$       C.  $e^{\frac{1}{e}}$       D.  $\sqrt{e}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 若  $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{(x+4)(2x+a)}$  为奇函数, 则  $a = \boxed{\quad}$ .

14. 若  $a^4 + b^4 = 7$ , 且  $\frac{1}{a^4} + \frac{4}{b^4} \geq m$  恒成立, 则  $m$  的取值范围是  $\boxed{\quad}$ .

15. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x), g(x)$  的导函数都存在, 若  $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) < 10x$ , 且  $f(2)g(2) - f(1)g(1)$  为整数, 则  $f(2)g(2) - f(1)g(1)$  的可能取值的最大值为  $\boxed{\quad}$ .

16. 已知  $\alpha, \beta \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ ,  $\sin(\alpha + \beta) + \sqrt{3}\cos(\alpha + \beta) + 4(\alpha^2 - \alpha) = -3$ , 则  $\beta = \boxed{\quad}$ .

考号

姓名

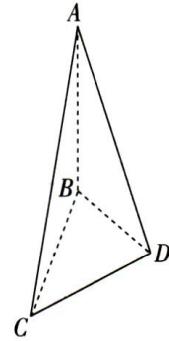
班级

学校

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

山东省滨州市的黄河楼位于蒲湖水面内东南方向的东关岛上,渤海五路以西,南环路以北. 整个黄河楼颜色质感为灰红,意味黄河楼气势恢宏,更在气势上体现黄河的宏壮. 如图,小张为了测量黄河楼的实际高度  $AB$ ,选取了与楼底  $B$  在同一水平面内的两个测量基点  $C, D$ ,现测得  $\angle BCD = 30^\circ$ ,  $\angle BDC = 95^\circ$ ,  $CD = 116$  m, 在点  $D$  处测得黄河楼顶  $A$  的仰角为  $45^\circ$ ,求黄河楼的实际高度(结果精确到 0.1 m,取  $\sin 55^\circ = 0.82$ ).

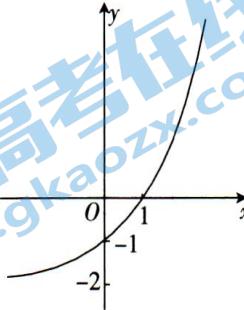


18. (12 分)

已知函数  $f(x) = a^x + b$  的部分图象如图所示.

(1)求  $f(x)$  的解析式;

(2)将  $f(x)$  的图象向左平移 1 个单位长度,得到  $g(x)$  的图象,求  $g(x) \cdot f(-x)$  的最大值.



19. (12 分)

小张要制作一个如图所示的正三棱柱形实木块,假设该三棱柱形实木块的所有棱长之和为 60 cm.

(1)设该三棱柱形实木块的底面边长为  $x$  cm,体积为  $V$  cm<sup>3</sup>,求  $V$  关于  $x$  的函数表达式;

(2)求该三棱柱形实木块体积的最大值.



20. (12 分)

已知函数  $f(x) = \sin^2 x - \sin 2x \sin \frac{5\pi}{6}$ .

(1) 设钝角  $\alpha$  满足  $\tan 2\alpha = -\frac{24}{7}$ , 求  $f(\alpha)$  的值;

(2) 若  $f(\beta) = \frac{1}{6}$ ,  $\beta \in (\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8})$ , 求  $\cos(2\beta - \frac{\pi}{12})$  的值.

21. (12 分)

已知函数  $f(x) = 2^{1+ax} - x (a \neq 0)$ .

(1) 若  $a = -1$ , 求  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上的值域;

(2) 若函数  $y = f(f(x)) - x$  恰有两个零点, 求  $a$  的取值范围.

22. (12 分)

已知函数  $f(x) = \ln(1+x) + \frac{x^2}{2}$ .

(1) 求曲线  $y = f(x)$  在  $x=1$  处切线的斜率;

(2) 当  $x \in (0, +\infty)$  时, 比较  $f(x)$  与  $x$  的大小;

(3) 若函数  $g(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$ , 且  $f(e^{\frac{a}{2}}) = g(b) - 1 (a > 0, b > 0)$ , 证明:  $f(b^2) + 1 > g(a+1)$ .