考号______ 姓名______ 班级______ 学校______

密封线内不要答题

高三数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|2-x<1\}$，$B=\{x||x-1|<3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|-2<x<1\}$ B. $\{x|x<4\}$ C. $\{x|1<x<4\}$ D. $\{x|x>-2\}$

2. 已知复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，且 $\frac{zi}{1+i}=1+2i$，则 $ab=$

A. -9 B. 9 C. -3 D. 3

3. 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，$M(m,2)$ 在抛物线 C 上，且 $|MF|=4$，则 $p=$

A. 2 B. 4 C. 8 D. 12

4. 若 $a=\log_{0.3}0.4$，$b=1.2^{0.3}$，$c=\log_{2.1}0.9$，则

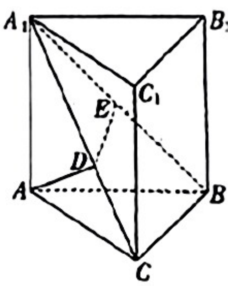
A. $a>b>c$ B. $b>c>a$ C. $a>c>b$ D. $b>a>c$

5. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，则"$a_4+a_7=27(a_1+a_4)$"是"数列 $\{a_n\}$ 的公比为 3"的

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=AB=2$，D 在 A_1C 上，E 是 A_1B 的中点，则 $(AD+DE)^2$ 的最小值是



A. $6-\sqrt{7}$ B. $2\sqrt{7}$

C. $3+\sqrt{7}$ D. $5+\sqrt{7}$

7. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x)=f(5+x)$，且 $f(x+1)$ 是偶函数，当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=2^x+\frac{3}{4}$，则 $f(\log_2 36)=$

A. $\frac{3}{2}$ B. 3 C. $\frac{39}{8}$ D. $\frac{39}{4}$

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 $F(-c,0)$，点 M 在双曲线 C 的右支上，$A(0,b)$，若 $\triangle AMF$ 周长的最小值是 $2c+4a$，则双曲线 C 的离心率是

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B. $\sqrt{3}+1$ C. $\frac{5}{2}$ D. 5

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 某商场开业期间举办抽奖活动，已知抽奖箱中有 30 张奖券，其中有 5 张写有“中奖”字样. 假设抽完的奖券不放回，甲抽完之后乙再抽，记 A 表示甲中奖，B 表示乙中奖，则

A. $P(AB)=\frac{2}{87}$　　B. $P(B)=\frac{4}{29}$　　C. $P(A|B)=\frac{4}{29}$　　D. $P(B|A)=\frac{1}{6}$

10. 已知圆 O：$x^2+y^2=9$，过点 $A(2,0)$ 的直线 l 与圆 O 交于 M，N 两点，则

A. 存在直线 l，使得 $|MN|=4$

B. 使 $|MN|$ 的长为整数的直线 l 有 3 条

C. 存在直线 l，使得 $\triangle MON$ 的面积为 $\frac{9}{2}$

D. 使 $\triangle MON$ 的面积为 4 的直线 l 有 2 条

11. 正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 3，高为 $\sqrt{6}$，则下列结论正确的是

A. $AB\perp PC$

B. 三棱锥 $P-ABC$ 的表面积为 $9\sqrt{3}$

C. 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 27π

D. 三棱锥 $P-ABC$ 的内切球的表面积为 $\frac{3\pi}{2}$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x-3, x>0,\\ x^3-3x+1, x\leqslant 0,\end{cases}$ 函数 $g(x)=f(f(x))-m$ 恰有 5 个零点，则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 有 2 个零点

B. 若 $m=3$，则 $g(x)$ 有 4 个零点

C. 若 $g(x)$ 只有 1 个零点，则 m 的取值范围是 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

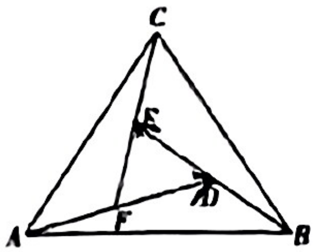
D. 若 $g(x)$ 恰有 5 个零点，则 m 的取值范围是 $[-1,1)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 幸福指数是衡量人们对自身生存和发展状况的感受和体验，即人们的幸福感的一种指数. 某机构从某社区随机调查了 10 人，得到他们的幸福指数（满分：10 分）分别是 7.6，8.5，7.8，9.2，8.1，9.7，9.9，5.8，3.8，8，则这组数据的中位数是__▲__

14. 若 $0<a<4$，则 $\frac{2}{a}+\frac{8}{4-a}$ 的值可以是__▲__.

15. “赵爽弦图”是中国古代数学的图腾，它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形. 如图，某人类比“赵爽弦图”，用 3 个全等的三角形和一个小的等边三角形拼成一个较大的等边三角形. D，E，F 分别是 BE，CF，AD 的中点. 若 $AB=7$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=$ __▲__



16. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$（$\omega\in\mathbf{N}_+$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）满足 $f(\frac{\pi}{6})=0$，$f(\frac{11\pi}{12})=2$，且 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上单调. 若关于 x 的方程 $f(x)=1$ 在 $[m,n]$（$m<n$）上有 2023 个零点，则 $n-m$ 的最小值是__▲__.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

某杂志社对投稿的稿件要进行评审，评审的程序如下：先由两位专家进行初审. 若两位专家的初审都通过，则予以录用；若两位专家的初审都不通过，则不予录用；若恰能通过 1 位专家的初审，则再由另外的两位专家进行复审，若两位专家的复审都通过，则予以录用，否则不予录用. 假设投稿的稿件能通过各位专家初审的概率均为 $\frac{1}{3}$，复审的稿件能通过各位专家复审的概率均为 $\frac{1}{2}$，且每位专家评审结果相互独立.

(1)求投到该杂志的 1 篇稿件被录用的概率；

(2)记 X 表示投到该杂志的 3 篇稿件中被录用的篇数，求 X 的分布列及期望.

18.（12 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b\sin B-c\sin C=a$.

(1)证明：$B-C=\frac{\pi}{2}$.

(2)若 $A=\frac{\pi}{3}$，$a=2\sqrt{3}$，求△ABC 的面积.

19.（12 分）

在①$2S_n=(n+1)a_n$，②$(n-1)S_n=(n+1)S_{n-1}(n\geqslant 2)$这两个条件中任选一个，补充在下面问题中，并作答.

问题：设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且________.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若 $b_n=\frac{a_n}{n+1}+\frac{n+1}{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

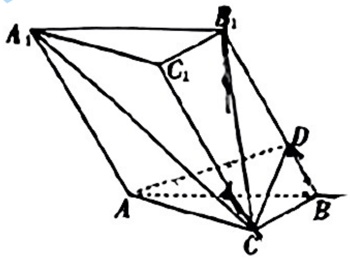
注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

0.(12分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，所有棱长均为 2，且 $B_1C=\sqrt{6}$，$\angle ABB_1=60^\circ$，$\overrightarrow{BB_1}=3\overrightarrow{BD}$.

(1)证明：平面 $ABC\perp$平面 ABB_1A_1.

(2)求平面 ACD 与平面 A_1B_1C 夹角的余弦值.



21.(12分)

椭圆 E 的中心为坐标原点，坐标轴为对称轴，左、右顶点分别为 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，点$(1,\sqrt{6})$在椭圆 E 上.

(1)求椭圆 E 的方程.

(2)过点$(-1,0)$的直线 l 与椭圆 E 交于 P，Q 两点(异于点 A，B)，记直线 AP 与直线 BQ 交于点 M，试问点 M 是否在一条定直线上？若是，求出该直线方程；若不是，请说明理由.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=e^x+mx^3-nx^2-x$(其中 e 为自然对数的底数)，且曲线 $y=f(x)$在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=-x$.

(1)求实数 m，n 的值；

(2)证明：对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant 3x^3-5x^2+1$ 恒成立.

高三数学试卷参考答案

1. C　由题意可得 $A=\{x|x>1\}$，$B=\{x|-2<x<4\}$，则 $A\cap B=\{x|1<x<4\}$.

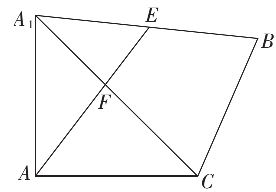
2. D　由题意可得 $(a+bi)i=(1+2i)(1+i)$，则 $-b+ai=-1+3i$，从而 $a=3$，$b=1$，故 $ab=3$.

3. B　由题意可得 $|MF|=2+\dfrac{p}{2}=4$，则 $p=4$.

4. D　由题意可知 $0<a<1$，$b>1$，$c<0$，则 $b>a>c$.

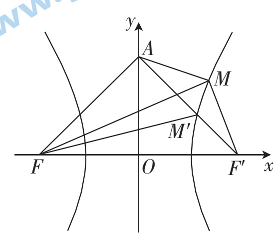
5. B　由 $a_4+a_7=27(a_1+a_4)$，得 $a_1(1+q^3)(q^3-27)=0$，解得 $q=-1$ 或 $q=3$，则"$a_4+a_7=27(a_1+a_4)$"是"数列$\{a_n\}$的公比为 3"的必要不充分条件.

6. C　如图，将平面 A_1BC 与平面 A_1AC 翻折到同一平面上，连接 AE，记 $AE\cap A_1C=F$. 由题意可知 $A_1A=AC=BC=2$，$A_1C=A_1B=2\sqrt{2}$，则 $\angle AA_1C=45°$，$\cos\angle BA_1C=\dfrac{8+8-4}{2\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}$，从而 $\sin\angle BA_1C=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，故 $\cos\angle AA_1B=\cos(\angle AA_1C+\angle BA_1C)=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{8}$. 因为 E 是 A_1B 的中点，所以 $A_1E=\sqrt{2}$，由余弦定理可得 $AE^2=4+2-2\times2\times\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{8}=3+\sqrt{7}$. 因为 D 在 A_1C 上，所以 $AD+DE\geqslant AE$，则 $(AD+DE)^2\geqslant3+\sqrt{7}$.



7. B　因为 $f(x+1)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=f(x+2)$. 因为 $f(1-x)=f(5+x)$，所以 $f(-x)=f(x+6)$，所以 $f(x+2)=f(x+6)$，即 $f(x)=f(x+4)$. 因为 $5=\log_2 32<\log_2 36<\log_2 64=6$，所以 $f(\log_2 36)=f(\log_2 36-4)=f(\log_2\dfrac{9}{4})=\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}=3$.

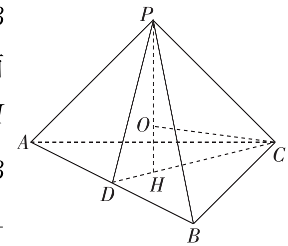
8. B　如图，设双曲线 C 的右焦点为 F'，连接 AF'，线段 AF' 交双曲线 C 于点 M'，则 $|AM|+|MF'|\geqslant|AF'|$. 由双曲线的定义可得 $|MF|-|MF'|=2a$，则 $|AM|+|MF|=|AM|+|MF'|+2a\geqslant|AF'|+2a$. 因为 $A(0,b)$，所以 $|AF|=|AF'|=\sqrt{b^2+c^2}$，则 $2\sqrt{b^2+c^2}+2a=2c+4a$，整理得 $c^2-2ac-2a^2=0$，即 $e^2-2e-2=0$，解得 $e=\sqrt{3}+1$.



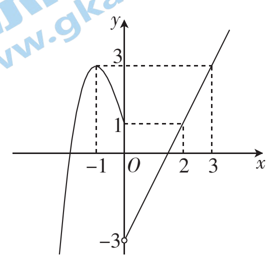
9. AC　由题意可知 $P(A)=\dfrac{5}{30}=\dfrac{1}{6}$，$P(AB)=\dfrac{5}{30}\times\dfrac{4}{29}=\dfrac{2}{87}$，则 A 正确. $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=\dfrac{2}{87}+\dfrac{25}{30}\times\dfrac{5}{29}=\dfrac{1}{6}$，则 B 错误. $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{\frac{2}{87}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{4}{29}$，则 C 正确. $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{2}{87}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{4}{29}$，则 D 错误.

10. BD　由题意知圆心 O 到直线 l 的距离 d 的取值范围为 $[0,2]$，所以最短弦长为 $2\sqrt{3^2-d^2}=2\sqrt{5}$，最长弦长为 6，且最长弦与最短弦有唯一性，故选项 A 错误，选项 B 正确. $\triangle MON$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot|MN|\cdot d=\sqrt{9-d^2}\cdot d=\sqrt{(9-d^2)\cdot d^2}$，$d\in(0,2]$，令 $t=d^2$，$t\in(0,4]$，则 $S=\sqrt{9t-t^2}$，$t\in(0,4]$，显然 S 随 t 的增大而增大，故 $S_{\max}=2\sqrt{5}<\frac{9}{2}$，故选项 C 错误. 由对称性知，使 $\triangle MON$ 的面积为 4 的直线 l 有 2 条，则 D 正确.

11. ABD　如图，取棱 AB 的中点 D，连接 CD，PD，易证 $AB\perp CD$，$AB\perp PD$. 因为 PD，$CD\subset$ 平面 PCD，且 $PD\cap CD=D$，所以 $AB\perp$ 平面 PCD，则 $AB\perp PC$，故 A 正确. 作 $PH\perp$ 平面 ABC，垂足为 H，则 $PH=\sqrt{6}$. 由正三棱锥的性质可知 H 在 CD 上，且 $CH=2DH$. 因为 $AB=3$，所以 $CD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，则 $CH=\sqrt{3}$. 因为 $PH=\sqrt{6}$，所以 $PC=\sqrt{3+6}=3$，则三棱锥 $P-ABC$ 的表面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 9\times 4=9\sqrt{3}$，故 B 正确. 设三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心为 O，半径为 R，则 O 在 PH 上，连接 OC，则 $R^2=CH^2+OH^2=(PH-OH)^2$，即 $R^2=3+OH^2=(\sqrt{6}-OH)^2$，解得 $R^2=\frac{27}{8}$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=\frac{27\pi}{2}$，故 C 错误. 设三棱锥 $P-ABC$ 的内切球的半径为 r，则 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 9\times\sqrt{6}=\frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}r$，解得 $r=\frac{\sqrt{6}}{4}$，从而三棱锥 $P-ABC$ 的内切球的表面积为 $4\pi r^2=\frac{3\pi}{2}$，故 D 正确.



12. ABD　当 $x\leqslant 0$ 时，$f'(x)=3x^2-3$. 由 $f'(x)>0$，得 $x<-1$，由 $f'(x)<0$，得 $-1<x\leqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递减，在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



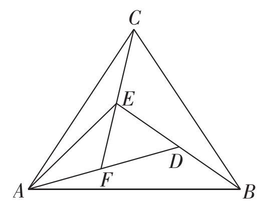
由图可知 $f(x)$ 有 2 个零点，则 A 正确. 设 $t=f(x)$，则 $m=f(t)$. 当 $m=3$ 时，$m=f(t)$ 的解是 $t_1=-1$，$t_2=3$. $f(x)=t_1$ 有 2 个不同实根，$f(x)=t_2$ 有 2 个不同实根，则 $t=f(x)$ 有 4 个不同实根，故 B 正确. 当 $1\leqslant m<3$ 时，$m=f(t)$ 有 3 个不同实根 t_3,t_4,t_5，设 $t_3\in(-2,-1)$，$t_4\in(-1,0]$，$t_5\in[2,3)$. $f(x)=t_3$ 有 2 个不同实根，$f(x)=t_4$ 有 2 个不同实根，$f(x)=t_5$ 有 3 个不同实根，则 $t=f(x)$ 有 7 个不同实根. 当 $-1\leqslant m<1$ 时，$m=f(t)$ 有 2 个不同实根 t_6,t_7，设 $t_6\in[-2,-1)$，$t_7\in[1,2)$. $f(x)=t_6$ 有 2 个不同实根，$f(x)=t_7$ 有 3 个不同实根，则 $t=f(x)$ 有 5 个不同实根. 当 $-3<m<-1$ 时，$m=f(t)$ 有 2 个不同实根 t_8,t_9，设 $t_8\in(-3,-2)$，$t_9\in(0,1)$，$f(x)=t_8$ 有 2 个不同实根，$f(x)=t_9$ 有 2 个不同实根，则 $t=f(x)$ 有 4 个不同实根. 当 $m\leqslant -3$ 时，$m=f(t)$ 有且只有 1 个实根 t_{10}，当 $t_{10}>-3$ 时，则 $t=f(x)$ 有 2 个不同实根，当 $t_{10}\leqslant -3$ 时，$t=f(x)$ 只有 1 个实根. 当 $m>3$ 时，$m=f(t)$ 有且只有 1 个实根 t_{11}，且 $t_{11}>3$，则 $t=f(x)$

只有 1 个实根. 故 C 错误, D 正确.

13. 8.4　将这组数据按从小到大的顺序排列为 7.6, 7.8, 7.9, 8.1, 8.3, 8.5, 8.8, 9, 9.2, 9.5, 则这组数据的中位数是 $\frac{8.3+8.5}{2}=8.4$.

14. 5(答案不唯一, 只要不小于 $\frac{9}{2}$ 即可)　因为 $a+(4-a)=4$, 所以 $\frac{2}{a}+\frac{8}{4-a}=\frac{1}{4}[a+(4-a)]\cdot(\frac{2}{a}+\frac{8}{4-a})=\frac{1}{4}[\frac{2(4-a)}{a}+\frac{8a}{4-a}+10]$. 因为 $0<a<4$, 所以 $\frac{2(4-a)}{a}>0$, $\frac{8a}{4-a}>0$, 所以 $\frac{2(4-a)}{a}+\frac{8a}{4-a}\geqslant 8$, 当且仅当 $\frac{2(4-a)}{a}=\frac{8a}{4-a}$, 即 $a=\frac{4}{3}$ 时, 等号成立, 则 $\frac{2}{a}+\frac{8}{4-a}\geqslant\frac{1}{4}\times(8+10)=\frac{9}{2}$.

15. -14　因为 D, E, F 分别是 BE, CF, AD 的中点, 所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$, 所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AF}$. 因为 F 是 AD 的中点, 所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, 所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$, 所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$. 同理可得 $\overrightarrow{BE}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{7}\overrightarrow{BA}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}-\frac{6}{7}\overrightarrow{AB}$. 故 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=(\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}-\frac{6}{7}\overrightarrow{AB})=\frac{8}{49}\overrightarrow{AC}^2+\frac{4}{49}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{24}{49}\overrightarrow{AB}^2=8+2-24=-14$.



16. 1011π　因为 $f(\frac{\pi}{6})=0$, $f(\frac{11\pi}{12})=2$, 所以 $\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=(\frac{1}{4}+\frac{k_1}{2})\times\frac{2\pi}{\omega}(k_1\in\mathbf{Z})$, 解得 $\omega=\frac{4k_1+2}{3}(k_1\in\mathbf{Z})$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上单调, 所以 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{3}$, 所以 $\omega\leqslant 3$. 因为 $\omega=\frac{4k_1+2}{3}(k_1\in\mathbf{Z})$, 且 $\omega\in\mathbf{N}_+$, 所以 $\omega=2$. 因为 $f(\frac{11\pi}{12})=2$, 所以 $2\cos(2\times\frac{11\pi}{12}+\varphi)=2$, 解得 $\varphi=2k_2\pi-\frac{11\pi}{6}(k_2\in\mathbf{Z})$. 因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$, 故 $f(x)=2\cos(2x+\frac{\pi}{6})$. 由 $f(x)=1$, 得 $\cos(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$, 则 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ 或 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$, 解得 $x=k\pi+\frac{\pi}{12}$ 或 $x=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$, 故 $f(x)$ 的相邻两个零点之间的距离是 $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$. 要使 $n-m$ 最小, 则 m, n 都是 $f(x)=1$ 的解, 则 $n-m\geqslant 1011\times\frac{2\pi}{2}=1011\pi$.

17. 解: (1) 由题意可得投到该杂志的 1 篇稿件初审直接被录用的概率 $P_1=(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$; …… 2 分

投到该杂志的 1 篇稿件初审没有被录用, 复审被录用的概率 $P_2=C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{9}$.

…… 4 分

故投到该杂志的 1 篇稿件被录用的概率 $P=P_1+P_2=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$. …………………… 5 分

(2)由题意可知 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,且 $X\sim B(3,\frac{2}{9})$, …………………… 6 分

$P(X=0)=C_3^0\times(\frac{7}{9})^3=\frac{343}{729}$,$P(X=1)=C_3^1\times\frac{2}{9}\times(\frac{7}{9})^2=\frac{294}{729}=\frac{98}{243}$, …………… 7 分

$P(X=2)=C_3^2\times(\frac{2}{9})^2\times\frac{7}{9}=\frac{84}{729}=\frac{28}{243}$,$P(X=3)=C_3^3\times(\frac{2}{9})^3=\frac{8}{729}$, …………… 8 分

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{343}{729}$	$\frac{98}{243}$	$\frac{28}{243}$	$\frac{8}{729}$

…………………………………………………………………………………… 9 分

故 $E(X)=3\times\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$. ………………………………………………………… 10 分

18. (1)证明:因为 $b\sin B-c\sin C=a$,所以 $\sin^2B-\sin^2C=\sin A$,

所以 $\sin B\sin(A+C)-\sin C\sin(A+B)=\sin A$, ………………………………… 2 分

所以 $\sin B(\sin A\cos C+\cos A\sin C)-\sin C(\sin A\cos B+\cos A\sin B)=\sin A$,

即 $\sin B\sin A\cos C-\sin C\sin A\cos B=\sin A$. ……………………………………… 4 分

因为 $\sin A\neq0$,所以 $\sin B\cos C-\sin C\cos B=1$,即 $\sin(B-C)=1$,故 $B-C=\frac{\pi}{2}$. … 6 分

(2)解:因为 $A=\frac{\pi}{3}$,所以 $B+C=\frac{2\pi}{3}$,则 $B=\frac{7\pi}{12}$,$C=\frac{\pi}{12}$. …………………………… 8 分

由正弦定理可知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=4$,则 $b=4\sin B$,$c=4\sin C$, ……………… 10 分

故△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=4\sqrt{3}\sin B\sin C=4\sqrt{3}\cos C\sin C=2\sqrt{3}\sin 2C=\sqrt{3}$. ……

…………………………………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)选①,因为 $2S_n=(n+1)a_n$,所以 $2S_{n-1}=na_{n-1}(n\geqslant2)$,

所以 $2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}(n\geqslant2)$,所以 $a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1}(n\geqslant2)$, …………………… 2 分

则 $a_n=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}\cdot a_1=n(n\geqslant2)$. ………………………………… 4 分

因为 $a_1=1$ 满足上式,所以 $a_n=n$. ………………………………………………… 5 分

选②,因为 $(n-1)S_n=(n+1)S_{n-1}(n\geqslant2)$,所以 $S_n=\frac{n+1}{n-1}S_{n-1}(n\geqslant2)$,

所以 $S_n=\frac{n+1}{n-1}\times\frac{n}{n-2}\times\cdots\times\frac{3}{1}\times S_1=\frac{n(n+1)}{2}(n\geqslant2)$. …………………… 2 分

因为 $S_1=a_1=1$ 满足上式,所以 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$, ……………………………………… 3 分

则 $a_n=S_n-S_{n-1}=n(n\geqslant 2)$. ……………………………………………………

因为 $a_1=1$ 满足上式,所以 $a_n=n$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可得 $b_n=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+2$, ……………………………………………… 7 分

则 $T_n=[(1-\dfrac{1}{2})+2]+[(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+2]+\cdots+[(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})+2]=[(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})$

$+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})]+2n$ ………………………………………………………………… 10 分

$=\dfrac{n}{n+1}+2n$. …………………………………………………………………………………… 12 分

20.(1)证明:如图,取棱 AB 的中点 O,连接 OB_1,OC,AB_1.

由题意可知 AA_1B_1B 为菱形,且 $\angle ABB_1=60^\circ$,则 $\triangle ABB_1$ 为正三角形.

因为 O 是棱 AB 的中点,所以 $OB_1\perp AB$. …………………………………………………… 1 分

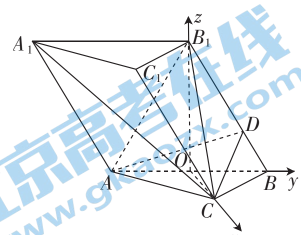
由题意可知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形,则 $OC\perp AB$,$OC=\sqrt{3}$. ………………… 2 分

因为 $\triangle ABB_1$ 是边长为 2 的等边三角形,所以 $OB_1=\sqrt{3}$.

因为 $B_1C=\sqrt{6}$,所以 $OC^2+OB_1^2=B_1C^2$,所以 $OB_1\perp CO$. ……………………………… 3 分

因为 AB,$OC\subset$平面 ABC,且 $AB\cap OC=O$,所以 $OB_1\perp$平面 ABC. ……………………… 4 分

因为 $OB_1\subset$平面 ABB_1A_1,所以平面 $ABC\perp$平面 ABB_1A_1. …………………………………… 5 分



(2)解:由(1)可知 OB,OC,OB_1 两两垂直,故分别以$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OB_1}$的方向为 x,y,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系.

则 $A(0,-1,0)$,$C(\sqrt{3},0,0)$,$D(0,\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$,$A_1(0,-2,\sqrt{3})$,$B_1(0,0,\sqrt{3})$,故$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$,$\overrightarrow{A_1C}=(\sqrt{3},2,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,2,0)$. …………………………………………………… 6 分

设平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}x_1+y_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=-\sqrt{3}x_1+\dfrac{2}{3}y_1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}z_1=0,\end{cases}$令 $x_1=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},5)$. ………………… 8 分

设平面 A_1B_1C 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=\sqrt{3}x_2+2y_2-\sqrt{3}z_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=2y_2=0,\end{cases}$令 $x_2=1$,得 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$. ………………………… 9 分

设平面 ACD 与平面 A_1B_1C 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{1+5}{\sqrt{29}\times\sqrt{2}}=$

$\dfrac{3\sqrt{58}}{29}$. ……………………………………………………………………………………… 11 分

即平面 ACD 与平面 A_1B_1C 夹角的余弦值为$\frac{3\sqrt{58}}{29}$. …………………………………………… 12 分

21. 解：(1)设椭圆 E 的方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0)$， ……………………………………… 1 分

则$\begin{cases}4m=1,\\ m+6n=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac{1}{4},\\ n=\frac{1}{8},\end{cases}$ ………………………………………………………… 3 分

故椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)依题可设直线 l 的方程为 $x=my-1$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$.

联立方程组$\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1,\end{cases}$整理得$(2m^2+1)y^2-4my-6=0$， ……………………………… 5 分

则 $y_1+y_2=\frac{4m}{2m^2+1}$，$y_1y_2=\frac{-6}{2m^2+1}$. ……………………………………………………… 6 分

直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 BQ 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

联立方程组$\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2),\\ y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2),\end{cases}$得 $x_0=\frac{2y_1x_2-4y_1+2x_1y_2+4y_2}{(x_1+2)y_2-(x_2-2)y_1}=\frac{4my_1y_2-6y_1+2y_2}{3y_1+y_2}$. …

………………………………………………………………………………………………… 8 分

由 $y_1+y_2=\frac{4m}{2m^2+1}$，$y_1y_2=\frac{-6}{2m^2+1}$，得 $2my_1y_2=-3(y_1+y_2)$， ………………………… 10 分

所以 $x_0=\frac{-6(y_1+y_2)-6y_1+2y_2}{y_2+3y_1}=-4$， ……………………………………………… 11 分

故点 M 在定直线 $x=-4$ 上. ………………………………………………………………… 12 分

22. (1)解：因为 $f(x)=e^x+mx^3-nx^2-x$，所以 $f'(x)=e^x+3mx^2-2nx-1$， …………… 1 分

则$\begin{cases}f(1)=e+m-n-1=-1,\\ f'(1)=e+3m-2n-1=-1,\end{cases}$ …………………………………………………… 2 分

解得 $m=e$，$n=2e$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)证明：设 $g(x)=f(x)-(3x^3-5x^2+1)=e^x+(e-3)x^3-(2e-5)x^2-x-1$，

则 $g'(x)=e^x+3(e-3)x^2-2(2e-5)x-1$.

设 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=e^x+6(e-3)x-2(2e-5)$.

设 $m(x)=h'(x)$，则 $m'(x)=e^x+6(e-3)$.

当 $x\in(-\infty,\ln(18-6e))$时，$m'(x)<0$，当 $x\in(\ln(18-6e),+\infty)$时，$m'(x)>0$，

所以 $m(x)$在$(-\infty,\ln(18-6e))$上单调递减，在$(\ln(18-6e),+\infty)$上单调递增，即 $h'(x)$在$(-\infty,\ln(18-6e))$上单调递减，在$(\ln(18-6e),+\infty)$上单调递增. …………………… 6 分

因为 $h'(0)=11-4\mathrm{e}>0$，$h'(1)=3\mathrm{e}-8>0$，$h'(\frac{1}{2})=\sqrt{\mathrm{e}}+1-\mathrm{e}<0$，

所以存在 $x_1\in(0,\frac{1}{2})$，$x_2\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $h'(x_1)=h'(x_2)=0$. ………………………… 8 分

故当 $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$h'(x)<0$.

所以 $g'(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 与 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，在 (x_1,x_2) 上单调递减. …………… 9 分

因为 $g'(0)=0$，$g'(1)=0$，所以存在唯一的 $x_3\in(x_1,x_2)$，使得 $g'(x_3)=0$，

所以当 $x\in(-\infty,0)\cup(x_3,1)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(0,x_3)\cup(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

则 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 与 $(x_3,1)$ 上单调递减，在 $(0,x_3)$ 与 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ……… 10 分

故 $g(x)_{\min}$ 是 $g(0)$ 与 $g(1)$ 中的较小值. …………………………………………………… 11 分

因为 $g(0)=0$，$g(1)=0$，所以 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立，

即对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant 3x^3-5x^2+1$ 恒成立. ………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〃精益求精、专业严谨〃的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。