北京市西城区高三统一测试

# 数学（理科）

2019.4

## 第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,0<x<2\}$，$B=\{-3,-1,1,3\}$，则集合 $(\complement_U A)\cap B=$

（A）$\{-3,-1\}$　　（B）$\{-3,-1,3\}$

（C）$\{1,3\}$　　（D）$\{-1,1\}$

2．若复数 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$，则在复平面内 $z$ 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

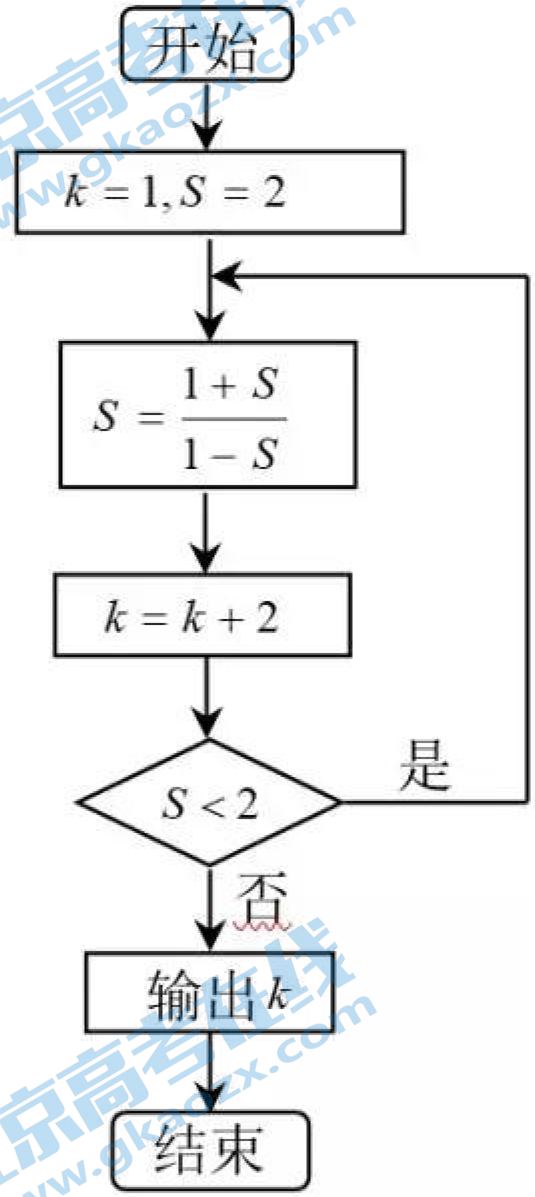
3. 执行如图所示的程序框图，则输出的 $k$ 值为

（A）4

（B）5

（C）7

（D）9




4. 下列直线中，与曲线 $C$: $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-2+4t \end{cases}$ ($t$为参数)没有公共点的是

（A） $2x+y=0$ （B） $2x+y-4=0$

（C） $2x-y=0$ （D） $2x-y-4=0$

5. 设 $a,b,m$ 均为正数，则 “$b>a$” 是 “$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$” 的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

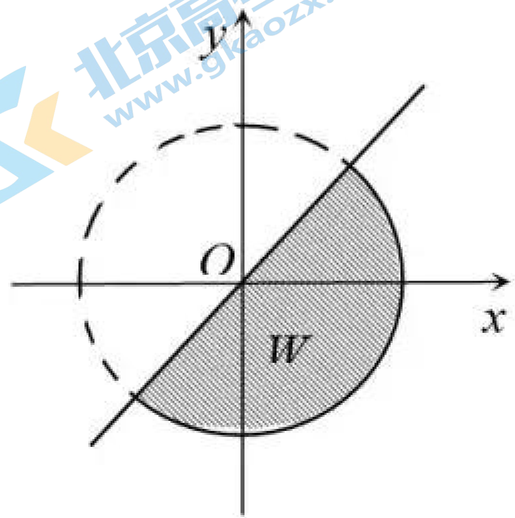
6. 如图，阴影表示的平面区域$W$是由曲线$x-y=0$，$x^2+y^2=2$所围成的．若点$P(x,y)$在$W$ 内（含边界），则$z=4x+3y$的最大值和最小值分别为

（A）$5\sqrt{2}$，$-7$

（B）$5\sqrt{2}$，$-5\sqrt{2}$

（C）$7$，$-5\sqrt{2}$

（D）$7$，$-7$



7. 团体购买公园门票，票价如下表：

| 购票人数 | 1~50 | 51~100 | 100 以上 |
|---|---|---|---|
| 门票价格 | 13 元/人 | 11 元/人 | 9 元/人 |

现某单位要组织其市场部和生产部的员工游览该公园，若按部门作为团体，选择两个不同的时间分别购票游览公园，则共需支付门票费为 1290 元；若两个部门合在一起作为一个团体，同一时间购票游览公园，则需支付门票费为 990 元，那么这两个部门的人数之差为

（A） 20　　（B） 30

（C） 35　　（D） 40

8. 如果把一个平面区域内两点间的距离的最大值称为此区域的直径，那么曲线 $x^4+y^2=2$ 围成的平面区域的直径为

（A） $\sqrt[4]{32}$　　（B） 3

（C） $2\sqrt{2}$　　（D） 4

# 第 II 卷（非选择题　共 110 分）

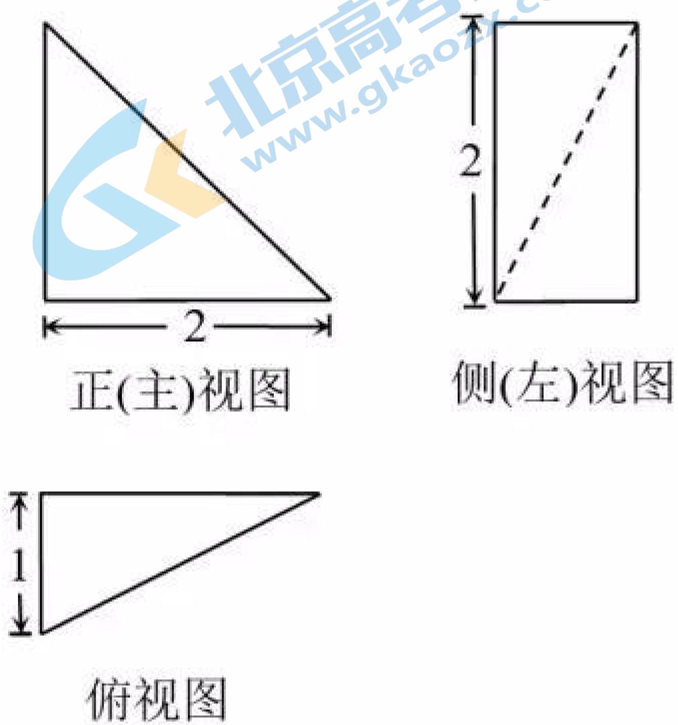
**二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.**

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，$a_5=8$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n=$______.

10. 设 $F_1$，$F_2$ 为双曲线 $C$: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的两个焦点，若双曲线 $C$ 的两个顶点恰好将线段 $F_1F_2$ 三等分，则双曲线 $C$ 的离心率为______.

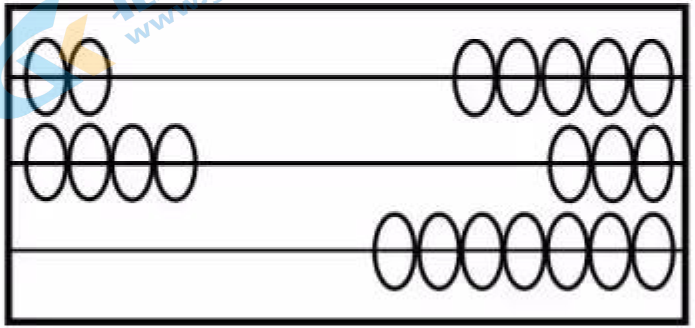
11. 函数 $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$ 的最小正周期 $T=$______；如果对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\leqslant a$，那么实数 $a$ 的取值范围是______.

12. 某四棱锥的三视图如图所示，那么此四棱锥的体积为______.



13. 能说明“若 $\sin\alpha=\cos\beta$，则 $\alpha+\beta=k\cdot 360^{\circ}+90^{\circ}$，其中 $k\in\mathbf{Z}$”为假命题的一组 $\alpha$，$\beta$ 的值是___.

14. 如图所示，玩具计数算盘的三档上各有 7 个算珠，现将每档算珠分为左右两部分，左侧的每个算珠表示数 2，右侧的每个算珠表示数 1（允许一侧无珠），记上、中、下三档的数字和分别为 $a$，$b$，$c$．例如，图中上档的数字和 $a=9$．若 $a$，$b$，$c$ 成等差数列，则不同的分珠计数法有____种.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

在△$ABC$ 中，已知 $a^2+c^2-b^2=mac$，其中 $m\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ）判断 $m$ 能否等于 3，并说明理由；

（Ⅱ）若 $m=-1$，$b=2\sqrt{7}$，$c=4$，求 $\sin A$．

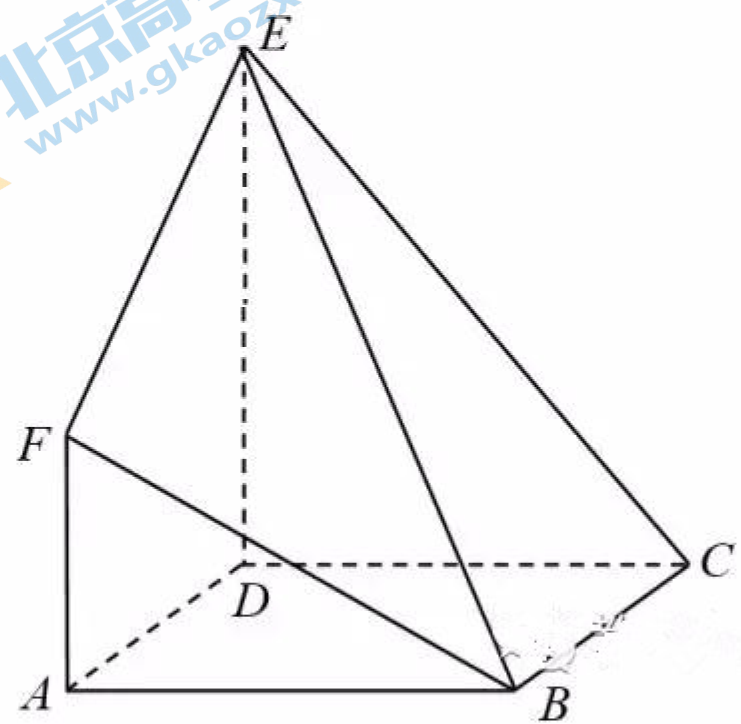
16．（本小题满分 14 分）

如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，梯形 $ADEF$ 与平行四边形 $ABCD$ 所在平面互相垂直，$AF\parallel DE$，$DE\perp AD$，$AD\perp BE$，$AF=AD=\frac{1}{2}DE=1$，$AB=\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求证：$BF\parallel$ 平面 $CDE$；

（Ⅱ）求二面角 $B-EF-D$ 的余弦值；

（Ⅲ）判断线段 $BE$ 上是否存在点 $Q$，使得平面 $CDQ\perp$ 平面 $BEF$？若存在，求出 $\frac{BQ}{BE}$ 的值，若不存在，说明理由．



17.（本小题满分 13 分）

为培养学生的阅读习惯，某校开展了为期一年的“弘扬传统文化，阅读经典名著”活动．活动后，为了解阅读情况，学校统计了甲、乙两组各 10 名学生的阅读量（单位：本），统计结果用茎叶图记录如下，乙组记录中有一个数据模糊，无法确认，在图中以 $a$ 表示．

| 甲 | | 乙 |
|---|---|---|
| 8 6 2 1 | 0 | 1 2 4 4 |
| 7 2 2 1 0 | 1 | 2 3 6 6 $a$ |
| 1 | 2 | 0 |

（Ⅰ）若甲组阅读量的平均值大于乙组阅读量的平均值，求图中 $a$ 的所有可能取值；

（Ⅱ）将甲、乙两组中阅读量超过 15 本的学生称为“阅读达人”．设 $a=3$，现从所有“阅读达人”里任取 3 人，求其中乙组的人数 $X$ 的分布列和数学期望．

（Ⅲ）记甲组阅读量的方差为 $s_0^2$．在甲组中增加一名学生 $A$ 得到新的甲组，若 $A$ 的阅读量为 10，则记新甲组阅读量的方差为 $s_1^2$；若 $A$ 的阅读量为20，则记新甲组阅读量的方差为 $s_2^2$，试比较 $s_0^2$，$s_1^2$，$s_2^2$ 的大小．（结论不要求证明）

18．（本小题满分 13 分）

设函数 $f(x)=me^{x}-x^{2}+3$，其中 $m\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ）当 $f(x)$ 为偶函数时，求函数 $h(x)=xf(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上有两个零点，求 $m$ 的取值范围．

19．（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $W$：$\dfrac{x^2}{4m}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 的长轴长为 4，左、右顶点分别为 $A,B$，经过点 $P(n,0)$ 的直线与椭圆 $W$ 相交于不同的两点 $C,D$（不与点 $A,B$ 重合）．

（Ⅰ）当 $n=0$，且直线 $CD\perp x$ 轴时，求四边形 $ACBD$ 的面积；

（Ⅱ）设 $n=1$，直线 $CB$ 与直线 $x=4$ 相交于点 $M$，求证：$A,D,M$ 三点共线．

20．（本小题满分 13 分）

如图，设 $A$ 是由 $n\times n$ $(n\geqslant 2)$ 个实数组成的 $n$ 行 $n$ 列的数表，其中 $a_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 表示位于第 $i$ 行第 $j$ 列的实数，且 $a_{ij}\in\{1,-1\}$．

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ |
| $a_{n1}$ | $a_{n2}$ | $\cdots$ | $a_{nn}$ |

定义 $p_{st}=a_{s1}a_{t1}+a_{s2}a_{t2}+\cdots+a_{sn}a_{tn}$ $(s,t=1,2,\cdots,n)$ 为第 $s$ 行与第 $t$ 行的积．若对于任意 $s,t$（$s\neq t$），都有 $p_{st}=0$，则称数表 $A$ 为完美数表．

（Ⅰ）当 $n=2$ 时，试写出一个符合条件的完美数表；

（Ⅱ）证明：不存在 10 行 10 列的完美数表；

（Ⅲ）设 $A$ 为 $n$ 行 $n$ 列的完美数表，且对于任意的 $i=1,2,\cdots,l$ 和 $j=1,2,\cdots,k$，都有 $a_{ij}=1$，证明：$kl\leqslant n$．

# 北京市西城区高三统一测试

## 数学（理科）参考答案及评分标准

2019.4

**一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.**

1．B　　2．D　　3．D　　4．C

5．C　　6．A　　7．B　　8．B

**二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.**

9．$2^{n-1}-\dfrac{1}{2}$　　10．3　　11．$\pi$；$a\geqslant\sqrt{2}$

12．$\dfrac{4}{3}$　　13．答案不唯一，如 $\alpha=110^\circ$，$\beta=20^\circ$　　14．32

注：第 11 题第一问 3 分，第二问 2 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分．

15．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）当 $m=3$ 时，由题可知 $a^2+c^2-b^2=3ac$，

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$， ………………… 3 分

得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{3}{2}$． ………………… 4 分

这与 $\cos B\in[-1,1]$ 矛盾，

所以 $m$ 不可能等于 3． ………………… 6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），得 $\cos B=\dfrac{m}{2}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $B=\dfrac{2\pi}{3}$． ………………… 7 分

因为 $b=2\sqrt{7}$，$c=4$，$a^2+c^2-b^2=-ac$，

所以 $a^2+16-28=-4a$，

解得 $a=-6$（舍）或 $a=2$． ………………… 9 分

在△$ABC$ 中，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$， ………………… 11 分

得 $\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{2}{2\sqrt{7}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$． ………………… 13 分

16.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由底面 $ABCD$ 为平行四边形，知 $AB//CD$，

又因为 $AB\not\subset$ 平面 $CDE$， $CD\subset$ 平面 $CDE$，

所以 $AB//$ 平面 $CDE$. ………………… 2 分

同理 $AF//$ 平面 $CDE$，

又因为 $AB\cap AF=A$，

所以平面 $ABF//$ 平面 $CDE$. ………………… 3 分

又因为 $BF\subset$ 平面 $ABF$，

所以 $BF//$ 平面 $CDE$. ………………… 4 分

（Ⅱ）连接 $BD$，

因为平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADEF\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$DE\perp AD$，

所以 $DE\perp$ 平面 $ABCD$. 则 $DE\perp DB$.

又因为 $DE\perp AD$， $AD\perp BE$， $DE\cap BE=E$，

所以 $AD\perp$ 平面 $BDE$，则 $AD\perp BD$.

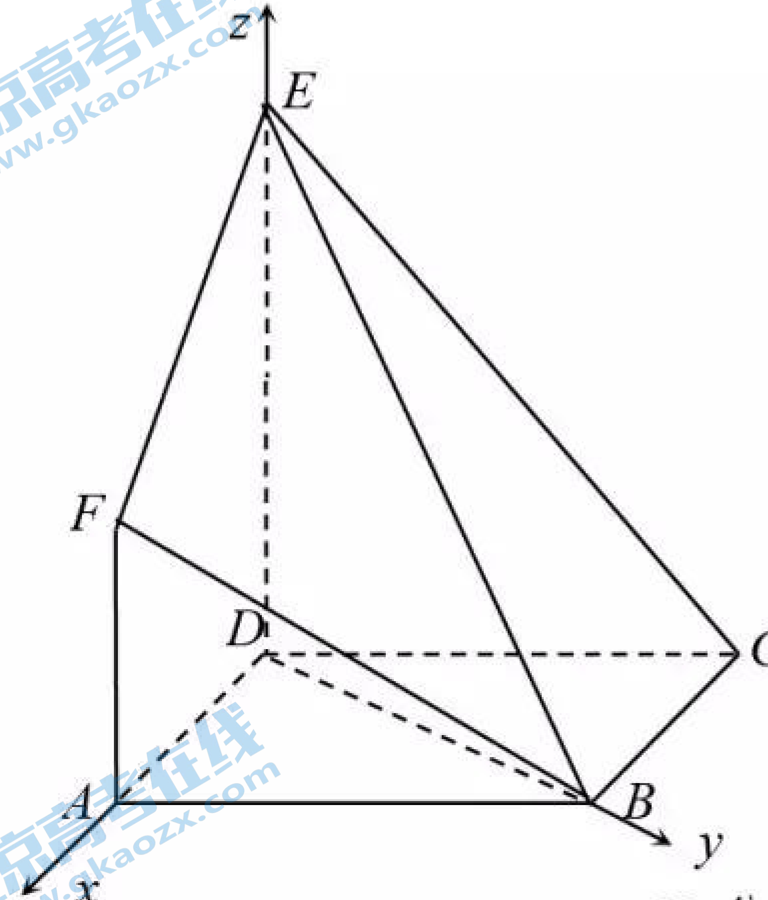
故 $DA$, $DB$, $DE$ 两两垂直，所以以 $DA$, $DB$, $DE$ 所在的直线分别为 $x$ 轴、 $y$ 轴和 $z$ 轴，

如图建立空间直角坐标系， ………………… 6 分

则 $D(0,0,0)$， $A(1,0,0)$， $B(0,1,0)$， $C(-1,1,0)$， $E(0,0,2)$， $F(1,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{BE}=(0,-1,2)$，$\overrightarrow{EF}=(1,0,-1)$， $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$ 为平面 $DEF$ 的一个法向量.

设平面 $BEF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，




由 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0$， $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0$， 得 $\begin{cases}-y+2z=0,\\ x-z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,2,1)$． ……………………8 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

如图可得二面角 $B-EF-D$ 为锐角，

所以二面角 $B-EF-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$． ……………………10 分

（III）结论：线段 $BE$ 上存在点 $Q$，使得平面 $CDQ\perp$ 平面 $BEF$． ……………………11 分

证明如下：

设 $\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{BE}=(0,-\lambda,2\lambda)$ $(\lambda\in[0,1])$，

所以 $\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BQ}=(0,1-\lambda,2\lambda)$.

设平面 $CDQ$ 的法向量为 $\boldsymbol{u}=(a,b,c)$，又因为 $\overrightarrow{DC}=(-1,1,0)$，

所以 $\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{DQ}=0$，$\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，即 $\begin{cases}(1-\lambda)b+2\lambda c=0,\\-a+b=0,\end{cases}$ ………………… 12 分

若平面 $CDQ\perp$ 平面 $BEF$，则 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{u}=0$，即 $a+2b+c=0$，………………… 13 分

解得 $\lambda=\frac{1}{7}\in[0,1]$.

所以线段 $BE$ 上存在点 $Q$，使得平面 $CDQ\perp$ 平面 $BEF$，且此时 $\frac{BQ}{BE}=\frac{1}{7}$. …… 14 分

17.（本小题满分 13 分）

**解**：（Ⅰ）甲组 10 名学生阅读量的平均值为 $\frac{1+2+6+8+10+11+12+12+17+21}{10}=10$，

乙组 10 名学生阅读量的平均值为 $\frac{1+2+4+4+12+13+16+16+(10+a)+20}{10}=\frac{98+a}{10}$.

………………… 2 分

由题意，得 $10>\frac{98+a}{10}$，即 $a<2$. ………………… 3 分

故图中 $a$ 的取值为 0 或 1. ………………… 4 分

17．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）甲组 10 名学生阅读量的平均值为 $\frac{1+2+6+8+10+11+12+12+17+21}{10}=10$，

乙组 10 名学生阅读量的平均值为 $\frac{1+2+4+4+12+13+16+16+(10+a)+20}{10}=\frac{98+a}{10}$.

………………… 2 分

由题意，得 $10>\frac{98+a}{10}$，即 $a<2$.　………………… 3 分

故图中 $a$ 的取值为 0 或 1.　………………… 4 分

（Ⅱ）由图可知，甲组“阅读达人”有 2 人，乙组“阅读达人”有 3 人.

由题意，随机变量 $X$ 的所有可能取值为：1，2，3.　………………… 5 分

且 $P(X=1)=\frac{C_2^2\cdot C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，$P(X=2)=\frac{C_2^1\cdot C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$.　…… 8 分

所以随机变量 $X$ 的分布列为：

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{10}$ |

………………… 9 分

所以 $E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$.　………………10 分

（Ⅲ）$s_1^2<s_0^2<s_2^2$.　………………… 13 分

18．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由函数 $f(x)$ 是偶函数，得 $f(-x)=f(x)$，

即 $me^{-x}-(-x)^2+3=me^{x}-x^2+3$ 对于任意实数 $x$ 都成立，

所以 $m=0$． …………………… 2 分

此时 $h(x)=xf(x)=-x^3+3x$，则 $h'(x)=-3x^2+3$．

由 $h'(x)=0$，解得 $x=\pm 1$． …………………… 3 分

当 $x$ 变化时，$h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表所示：

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $h(x)$ | ↘ | 极小值 | ↗ | 极大值 | ↘ |

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-1,1)$ 上单调递增． ……………… 5 分

所以 $h(x)$ 有极小值 $h(-1)=-2$，$h(x)$ 有极大值 $h(1)=2$． ……………… 6 分

（Ⅱ）由 $f(x)=me^{x}-x^2+3=0$，得 $m=\dfrac{x^2-3}{e^x}$．

所以"$f(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上有两个零点"等价于"直线 $y=m$ 与曲线 $g(x)=\dfrac{x^2-3}{e^x}$，

$x\in[-2,4]$ 有且只有两个公共点"． …………………… 8 分

对函数 $g(x)$ 求导，得 $g'(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{e^x}$． …………………… 分

由 $g'(x)=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$． ………………… 10 分

当 $x$ 变化时，$g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表所示：

| $x$ | $(-2,-1)$ | $-1$ | $(-1,3)$ | $3$ | $(3,4)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | ↘ | 极小值 | ↗ | 极大值 | ↘ |

所以 $g(x)$ 在 $(-2,-1)$，$(3,4)$ 上单调递减，在 $(-1,3)$ 上单调递增． ……………… 11 分

又因为 $g(-2)=e^2$，$g(-1)=-2e$，$g(3)=\dfrac{6}{e^3}<g(-2)$，$g(4)=\dfrac{13}{e^4}>g(-1)$，

所以当 $-2e<m<\dfrac{13}{e^4}$ 或 $m=\dfrac{6}{e^3}$ 时，直线 $y=m$ 与曲线 $g(x)=\dfrac{x^2-3}{e^x}$，$x\in[-2,4]$ 有且只有两个公共点．

即当 $-2e<m<\dfrac{13}{e^4}$ 或 $m=\dfrac{6}{e^3}$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上有两个零点． ……… 13 分

19．（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题意，得 $a^2=4m=4$， 解得 $m=1$. ………………… 2 分

所以椭圆 $W$ 方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………… 3 分

当 $n=0$，及直线 $CD\perp x$ 轴时，易得 $C(0,1)$，$D(0,-1)$. 且 $A(-2,0)$，$B(2,0)$.

所以 $|AB|=4$，$|CD|=2$，

显然此时四边形 $ACBD$ 为菱形，所以四边形 $ACBD$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times4\times2=4$. …… 5 分

（Ⅱ）当直线 $CD$ 的斜率 $k$ 不存在时，由题意，得 $CD$ 的方程为 $x=1$，

代入椭圆 $W$ 的方程，得 $C(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$D(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，

易得 $CB$ 的方程为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-2)$.

则 $M(4,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AM}=(6,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=(3,-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，

所以 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AD}$，即 $A,D,M$ 三点共线. ………………… 7 分

当直线 $CD$ 的斜率 $k$ 存在时，设 $CD$ 的方程为 $y=k(x-1)\ (k\neq0)$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

联立方程$\begin{cases} y=k(x-1), \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$消去$y$，得$(4k^2+1)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$. ……… 9 分

由题意，得$\Delta>0$恒成立，故$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{4k^2+1}$. …………… 10 分

直线$CB$的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$.

令$x=4$，得$M(4,\dfrac{2y_1}{x_1-2})$. ……………… 11 分

又因为$A(-2,0)$，$D(x_2,y_2)$，

则直线$AD$，$AM$的斜率分别为$k_{AD}=\dfrac{y_2}{x_2+2}$，$k_{AM}=\dfrac{y_1}{3(x_1-2)}$， …………… 12 分

所以$k_{AD}-k_{AM}=\dfrac{y_2}{x_2+2}-\dfrac{y_1}{3(x_1-2)}=\dfrac{3y_2(x_1-2)-y_1(x_2+2)}{3(x_1-2)(x_2+2)}$.

上式中的分子 $3y_2(x_1-2)-y_1(x_2+2)=3k(x_2-1)(x_1-2)-k(x_1-1)(x_2+2)$

$$=2kx_1x_2-5k(x_1+x_2)+8k$$

$$=2k\times\frac{4k^2-4}{4k^2+1}-5k\times\frac{8k^2}{4k^2+1}+8k$$

$$=0,$$

所以 $k_{AD}-k_{AM}=0$.

所以 $A,D,M$ 三点共线. …………………… 14 分

20.（本小题满分 13 分）

解:（Ⅰ）答案不唯一. 如:

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| $-1$ | 1 |

…………………… 3 分

（Ⅱ）假设存在 10 行 10 列的完美数表 $A$.

根据完美数表的定义，可以得到以下两个结论:

（1）把完美数表的任何一列的数变为其相反数（即 $+1$ 均变为 $-1$，而 $-1$ 均变为 $+1$），得到的新数表是完美数表;

（2）交换完美数表的任意两列，得到的新数表也是完美数表. ………………… 5 分

完美数表 $A$ 反复经过上述两个结论的变换，前三行可以为如下形式：

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\cdots$ | 1 | 1 | $\cdots$ | 1 | 1 | $\cdots$ | 1 | 1 | $\cdots$ | 1 |
| 1 | $\cdots$ | 1 | 1 | $\cdots$ | 1 | $-1$ | $\cdots$ | $-1$ | $-1$ | $\cdots$ | $-1$ |
| 1 | $\cdots$ | 1 | $-1$ | $\cdots$ | $-1$ | 1 | $\cdots$ | 1 | $-1$ | $\cdots$ | $-1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | 共 $x$ 列 | | | 共 $y$ 列 | | | 共 $z$ 列 | | | 共 $w$ 列 | |

在这个新数表中，设前三行中的数均为 1 的有 $x$ 列，前三行中“第 1，2 行中的数为 1，且第 3 行中的数为$-1$”的有 $y$ 列，前三行中“第 1，3 行中的数为 1，且第 2 行中的数为$-1$”的有 $z$ 列，前三行中“第 1 行中的数为 1，且第 2，3 行中的数为$-1$”的有 $w$ 列（如上表所示），

则 $x+y+z+w=10$ ①

由 $p_{12}=0$，得 $x+y=z+w$；　②

由 $p_{13}=0$，得 $x+z=y+w$；　③

由 $p_{23}=0$，得 $x+w=y+z$.　④

解方程组①，②，③，④，得 $x=y=z=w=\dfrac{5}{2}$.

这与 $x,y,z,w\in\mathbf{N}$ 矛盾，

所以不存在 10 行 10 列的完美数表.　………………… 8 分

（III）记第 1 列前 $l$ 行中的数的和 $a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{l1}=X_1$，第 2 列前 $l$ 行中的数的和 $a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{l2}=X_2$，……，第 $n$ 列前 $l$ 行中的数的和 $a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{ln}=X_n$，

因为对于任意的 $i=1,2,\cdots,l$ 和 $j=1,2,\cdots,k$，都有 $a_{ij}=1$，

所以 $X_1=X_2=\cdots=X_k=l$.　………………… 9 分

又因为对于任意 $s,t$（$s\neq t$），都有 $p_{st}=0$，

所以 $X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2=ln$.　………………… 11 分

又因为 $X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\geqslant X_1^2+X_2^2+\cdots+X_k^2=l^2k$，

所以 $ln\geqslant l^2k$，即 $kl\leqslant n$.　………………… 13 分