

东城区 2020-2021 学年度第一学期期末统一检测

高一数学

2021.1

本试卷共 4 页，满分 100 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

- (1) 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$ ，集合 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 1\}$ ，那么 $A \cap B =$
- (A) $\{1\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{-1, 1\}$ (D) $\{-1, 0, 1\}$

- (2) 已知 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = x - 2$ ，则 $f(-\frac{1}{2})$ 的值为
- (A) $-\frac{5}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$

- (3) 若扇形的半径为 1，周长为 π ，则该扇形的圆心角为
- (A) π (B) $\pi - 1$ (C) $\pi - 2$ (D) $\frac{\pi - 1}{2}$

- (4) 下列命题为真命题的是
- (A) 若 $a > b$ ，则 $a^2 > b^2$ (B) 若 $a > b > 0$ ，则 $ac^2 > bc^2$

- (C) 若 $a < b$ ， $c > 0$ ，则 $ac > bc$ (D) 若 $a < b < 0$ ， $c > 0$ ，则 $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$

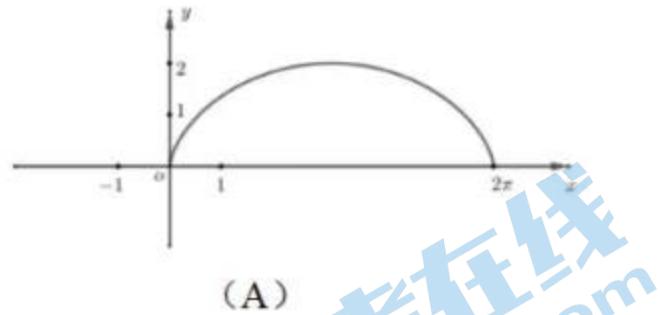
- (5) 已知 $\tan \alpha = -1$ ，则 $2\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha =$
- (A) $-\frac{7}{4}$ (B) $-\frac{1}{2}$
(C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

- (6) 若函数 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的减函数， $a > 0$ ，则下列不等式一定成立的是
- (A) $f(a^2) < f(a)$ (B) $f(a) < f(\frac{1}{a})$
(C) $f(a) < f(2a)$ (D) $f(a^2) < f(a-1)$

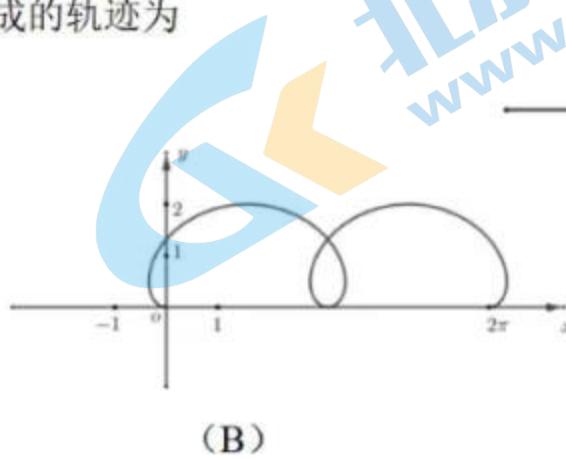
- (7) 已知 $a = \log_2 3$ ， $b = \log_4 5$ ， $c = \log_8 7$ ，则
- (A) $a < b < c$ (B) $c < a < b$
(C) $c < b < a$ (D) $b < c < a$

- (8) “ $\alpha = k\pi + \beta, k \in \mathbf{Z}$ ” 是 “ $\tan \alpha = \tan \beta$ ” 成立的
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

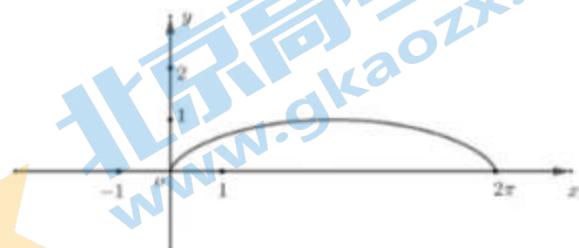
- (9) 如图所示, 单位圆上一定点 A 与坐标原点重合. 若单位圆从原点出发沿 x 轴正向滚动一周, 公众号: 北京初高中数学则 A 点形成的轨迹为



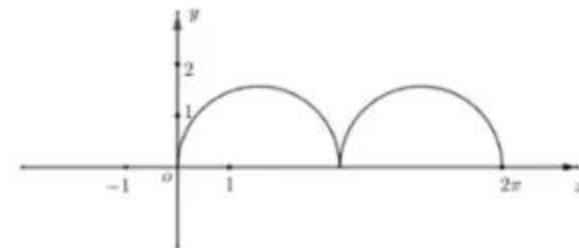
(A)



(B)



(C)



(D)

- (10) 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$, 给出下列结论:

- ① $\forall a \in \mathbf{R}, f(x)$ 是奇函数; ② $\exists a \in \mathbf{R}, f(x)$ 不是奇函数;
 ③ $\forall a \in \mathbf{R}$, 方程 $f(x) = -x$ 有实根; ④ $\exists a \in \mathbf{R}$, 方程 $f(x) = -x$ 有实根.

其中, 所有正确结论的序号是

- (A) ① ③ (B) ① ④ (C) ① ② ④ (D) ② ③ ④

第二部分 (非选择题 共 60 分)

二、填空题: 共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。公众号: 北京初高中数学

- (11) 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x}$ 的定义域为_____.

- (12) 已知函数 $f(x)$ 是指数函数, 若 $\frac{f(1)}{f(3)} = 4$, 则 $f(-2)$ _____ $f(-3)$. (用 “ $>$ ” “ $<$ ” “ $=$ ” 填空)

- (13) 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 以 Ox 为始边, 它的终边与单位圆交于第一象限内的点 $P(m, \frac{12}{13})$, 则

- $\tan \alpha =$ _____. 保持角 α 始边位置不变, 将其终边逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到角 β , 则 $\cos \beta =$ _____.

(14) 已知偶函数 $f(x) = x^2 + bx + c$, 写出一组使得 $f(x) \geq 2$ 恒成立的 b, c 的取值: $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

(15) 某地原有一座外形近似为长方体且底面面积为 150 平方米的蓄水池, 受地形所限, 底面长和宽都不超过 18 米. 现将该蓄水池在原有占地面积和高度不变的条件下, 重建为两个相连的小蓄水池, 其底面由两个长方形组成(如图所示). 若池壁的重建价格为每平方米 300 元, 池底重建价格每平方米 80 元, 那么要使重建价最低, 蓄水池的长和宽分别为 $\underline{\hspace{2cm}}$, $\underline{\hspace{2cm}}$.



三、解答题: 共 5 小题, 共 40 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 7 分)

设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 2x^2 - x < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | ax - 1 > 0\}$.

(I) 当 $a = 1$ 时, 求 $A \cup B$, $C_U A$;

(II) 若 $B \subseteq C_U A$, 求 a 的取值范围.

(17) (本小题 7 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} + 1, & x < 2, \\ \log_2(x-1), & x \geq 2. \end{cases}$

(I) 求 $f(f(3))$ 的值并直接写出 $f(x)$ 的零点;

(II) 用定义证明 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2)$ 上为减函数.

(18) (本小题 9 分)

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $\omega > 0, \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知条件, 求:

(I) $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 的最大值和最小值.

条件①: 函数 $f(x)$ 最小正周期为 π ;

条件②: 函数 $f(x)$ 图象关于点 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称;

条件③: 函数 $f(x)$ 图象关于 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称.

注: 如果选择不同条件组合分别解答, 按第一个解答计分.

(19) (本小题 9 分) 公众号: 北京初高中数学

已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{2^x + 1}$ 是奇函数.

(I) 求 a 的值;

(II) 判断 $f(x)$ 的单调性; (只需写出结论)

(III) 若不等式 $f(x - x^2) + f(x + m) < 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

(20) (本小题 8 分)

中国茶文化博大精深. 小明在茶艺选修课中了解到, 不同类型的茶叶由于在水中溶解性的差别, 达到最佳口感的水温不同. 为了方便控制水温, 小明联想到牛顿提出的物体在常温环境下温度变化的冷却模型: 如果物体的初始温度是 θ_1 , 环境温度是 θ_0 , 则经过时间 t (单位: 分) 后物体温度 θ 将满足: $\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0) \cdot e^{-kt}$, 其中 k 为正的常数. 公众号: 北京初高中数学小明与同学一起通过多次测量求平均值的方法得到 200ml 初始温度为 98°C 的水在 19°C 室温中温度下降到相应温度所需时间如下表所示:

从 98°C 下降到 90°C 所用时间	1 分 58 秒
从 98°C 下降到 85°C 所用时间	3 分 24 秒
从 98°C 下降到 80°C 所用时间	4 分 57 秒

(I) 请依照牛顿冷却模型写出冷却时间 t (单位: 分) 关于冷却后水温 θ (单位: °C) 的函数关系, 并选取一组数据求出相应的 k 值. (精确到 0.01)

(II) “碧螺春”用 75°C 左右的水冲泡可使茶汤清澈明亮, 口感最佳. 在 (I) 的条件下, 200ml 水煮沸后在 19°C 室温下为获得最佳口感大约冷却 ____ 分钟左右冲泡, 请在下列选项中选择一个最接近的时间填在横线上, 并说明理由.

- (A) 5 (B) 7 (C) 10

(参考数据: $\ln 79 = 4.369$, $\ln 71 = 4.263$, $\ln 66 = 4.190$, $\ln 61 = 4.111$, $\ln 56 = 4.025$)

东城区 2020-2021 学年度第一学期期末统一检测

高一数学参考答案及评分标准

2021.1

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）公众号：北京初高中数学

- (1) A (2) C (3) C (4) D (5) B
(6) D (7) C (8) B (9) A (10) B

二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

- (11) $(-\infty, 0) \cup (0, 2]$ (12) $<$
(13) $\frac{12}{5} - \frac{12}{13}$ (14) $b=0, c=2$ (答案不唯一)

- (15) 15 10

三、解答题（共 5 小题，共 40 分）公众号：北京初高中数学

(16) (共 7 分)

解：(I) $A \cup B = \left\{ x \middle| 0 < x < \frac{1}{2}, \text{ 或 } x > 1 \right\}$, $C_U A = \left\{ x \middle| x \leq 0, \text{ 或 } x \geq \frac{1}{2} \right\}$ 4 分

(II) 当 $a > 0$ 时, $B = \left\{ x \middle| x > \frac{1}{a} \right\}$, 若 $B \subseteq C_U A$, 则有 $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{2}$, 解得 $a \leq 2$, 此时 $0 < a \leq 2$;

当 $a = 0$ 时, $B = \emptyset$, 满足 $B \subseteq C_U A$;

当 $a < 0$ 时, $B = \left\{ x \middle| x < \frac{1}{a} \right\}$, 满足 $B \subseteq C_U A$;

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$ 7 分

(17) (共 7 分)

解：(I) $f(f(3)) = f(1) = 0$.
 $f(x)$ 的零点为 1 和 2.

.... 3 分

(II) $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1 - 2} + 1 - \left(\frac{1}{x_2 - 2} + 1 \right) = \frac{x_2 - x_1}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)},$$

由 $x_1 < x_2 < 2$, 得 $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 - 2 < 0$, $x_2 - 2 < 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$,

所以 $y = f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2)$ 上为减函数. 7 分

(18) (共 9 分)

解：(I) 选择条件①, ②解答如下：

由函数 $f(x)$ 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi$, 得 $\omega = 2$.

又 $f(x)$ 图象关于点 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称，有 $\sin[2 \times (-\frac{\pi}{6}) + \varphi] = 0$ ，

又已知 $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，故 $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

因此 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$.

由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，解得 $-\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 5 分

(II) 因为 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$.

当 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $x = \frac{\pi}{12}$ 时， $f(x)$ 取得最大值 1；

当 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ ，即 $x = \frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)$ 取得最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 9 分

如果选择条件①，③解答如下：

由函数 $f(x)$ 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi$ ，得 $\omega = 2$.

又函数 $f(x)$ 图象关于 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称，有 $\sin(2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi) = \pm 1$ ，

又已知 $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，故 $\varphi = \frac{\pi}{3}$. 下同.

注：选择②③不能确定函数最小正周期，无法确定函数.

(19) (共 9 分)

解：(I) 因为 $f(x)$ 为奇函数，定义域为 \mathbf{R} ，

所以 $f(0) = 0$ ，即 $a - \frac{1}{2} = 0$ ，解得 $a = \frac{1}{2}$ 2 分

(II) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^x + 1}$ 为增函数. 4 分

(III) 由奇函数 $f(x)$ 在定义域 \mathbf{R} 上单调递增，

不等式 $f(x - x^2) + f(x + m) < 0$ 恒成立，

得 $f(x^2 - x) > f(x + m)$ 恒成立，

即 $x^2 - x > x + m$ 恒成立.

由 $x^2 - 2x - m > 0$ 恒成立，有 $\Delta = 4 + 4m < 0$ ，得 $m < -1$.

所以， m 的取值范围是 $(-\infty, -1)$ 9 分

(20) (共 8 分)

解：(I) 由 $\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0) \cdot e^{-kt}$, 得 $e^{-kt} = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}$,

$$\text{即 } -kt = \ln \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0},$$

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta - \theta_0}.$$

北京高考在线
www.gkaozx.com

在环境温度为 $\theta_0 = 19^\circ\text{C}$, 选取从 $\theta_1 = 98^\circ\text{C}$ 下降到 $\theta = 90^\circ\text{C}$ 所用时间约为 2 分钟这组数据有

$$2 = \frac{1}{k} \ln \frac{79}{71}, \text{ 即 } k = \frac{\ln 79 - \ln 71}{2} \approx 0.05;$$

选取从 $\theta_1 = 98^\circ\text{C}$ 下降到 $\theta = 85^\circ\text{C}$ 所用时间约为 3.4 分钟这组数据有 $3.4 = \frac{1}{k} \ln \frac{79}{66}$,

$$\text{即 } k = \frac{\ln 79 - \ln 66}{3.4} \approx 0.05;$$

选取从 $\theta_1 = 98^\circ\text{C}$ 下降到 $\theta = 80^\circ\text{C}$ 所用时间约为 5 分钟这组数据有 $5 = \frac{1}{k} \ln \frac{79}{61}$,

$$\text{即 } k = \frac{\ln 79 - \ln 61}{5} \approx 0.05;$$

$$\text{故 } k \approx 0.05.$$

.....5 分

(II) 200ml 水煮沸后在 19°C 室温下大约冷却 7 分钟左右冲泡口感最佳, 故选择 B.6 分

理由如下:

$$\text{由 (I) 得 } t = 20 \ln \frac{79}{\theta - 19},$$

当 $\theta = 75^\circ\text{C}$ 时, 有 $t = 20 \times (\ln 79 - \ln 56) \approx 6.88$.

所以 200ml 水煮沸后在 19°C 室温下大约冷却 7 分钟冲泡“碧螺春”口感最佳.8 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的设计理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

Q 北京高考资讯