海淀区高三年级第一学期期末练习

数　学（文科）

2017.1

学校__________班级__________姓名__________成绩__________

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 复数 $i(2-i)$ 在复平面内对应的点的坐标为

A. $(-2,1)$　　B. $(2,-1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(-1,2)$

2. 抛物线 $y^2=2x$ 的焦点到准线的距离为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A. $y=(\frac{1}{2})^x$　　B. $y=-x^2$　　C. $y=\log_2 x$　　D. $y=|x|+1$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $|\boldsymbol{b}|=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

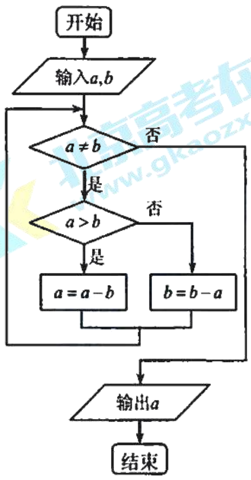
5. 右侧程序框图所示的算法来自于《九章算术》. 若输入 a 的值为16，b 的值为24，则执行该程序框图输出的结果为

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9



6. 在 $\triangle ABC$ 中，“$A<30°$”是“$\sin A<\frac{1}{2}$”的

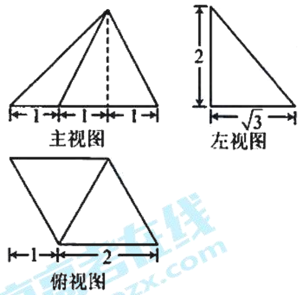
A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 已知某四棱锥的三视图如右图所示，则该几何体的体积为



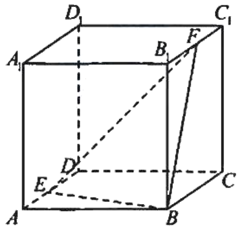
A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

C. 2

D. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

8. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E，F 分别是棱 AD，B_1C_1 上的动点，设 $AE=x$，$B_1F=y$。若棱 DD_1 与平面 BEF 有公共点，则 $x+y$ 的取值范围是



A. $[0,1]$　　B. $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$

C. $[1,2]$　　D. $[\frac{3}{2},2]$

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{4}=1$，则双曲线 C 的一条渐近线的方程为____.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}-a_n=2, n\in \mathbf{N}^*$，且 $a_3=3$，则 $a_1=$ ____，其前 n 项和 $S_n=$ ____.

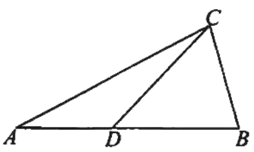
11. 已知圆 $C:x^2+y^2-2x=0$，则圆心 C 的坐标为____，圆 C 截直线 $y=x$ 所得的弦长为____.

12. 已知 x,y 满足 $\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 4, \\ 0\leqslant y\leqslant 3, \\ x+2y\leqslant 8, \end{cases}$ 则目标函数 $z=2x+y$ 的最大值为_____.

13. 如图所示，点 D 在线段 AB 上，$\angle CAD=30^\circ$，$\angle CDB=50^\circ$。给出下列三组条件（线段的长度）：

① AD,DB；② AC,DB；③ CD,DB.

其中，能使 $\triangle ABC$ 唯一确定的条件的序号为_____.（写出所有符合要求的条件的序号）



14. 已知A、B两所大学的专业设置都相同(专业数不小于2)，数据显示，A大学的各专业的男女生比例均高于B大学的相应专业的男女生比例(男女生比例是指男生人数与女生人数的比)．据此，

甲同学说："A大学的男女生比例一定高于B大学的男女生比例"；

乙同学说："A大学的男女生比例不一定高于B大学的男女生比例"；

丙同学说："两所大学全体学生的男女生比例一定高于B大学的男女生比例"．

其中，说法正确的同学是_____．

三、解答题共6小题，共80分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15.（本小题满分13分）

已知数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，且$a_2=1$，$a_3+a_4=6$.

(Ⅰ) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ) 设数列$\{a_n-n\}$的前n项和为S_n，比较S_4和S_5的大小，并说明理由．

16.（本小题满分13分）

已知函数$f(x)=\dfrac{\sin 2x+2\cos^2 x}{\cos x}$.

(Ⅰ) 求$f(x)$的定义域及$f(\frac{\pi}{4})$的值；

(Ⅱ) 求$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上的单调递增区间．

17.（本小题满分13分）

诚信是立身之本，道德之基．某校学生会创设了"诚信水站"，既便于学生用水，又推进诚信教育，并用"$\dfrac{\text{周实际回收水费}}{\text{周投入成本}}$"表示每周"水站诚信度"．为了便于数据分析，以四周为一周期，下表为该水站连续八周(共两个周期)的诚信度数据统计，如表1：

表1

	第一周	第二周	第三周	第四周
第一个周期	95%	98%	92%	88%
第二个周期	94%	94%	83%	80%

（Ⅰ）计算表1中八周水站诚信度的平均数 $\bar{x}$；

（Ⅱ）从表1水站诚信度超过91%的数据中，随机抽取2个，求至少有1个数据出现在第二个周期的概率；

（Ⅲ）学生会认为水站诚信度在第二个周期中的后两周出现了滑落，为此学生会举行了"以诚信为本"主题教育活动，并得到活动之后一个周期的水站诚信度数据，如表2：

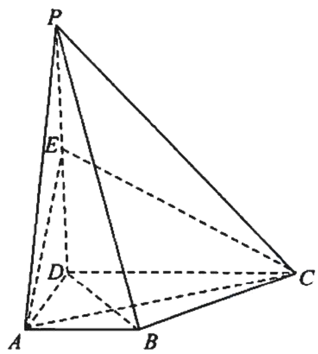
表2

	第一周	第二周	第三周	第四周
第三个周期	85%	92%	95%	96%

请根据提供的数据，判断该主题教育活动是否有效，并根据已有数据说明理由．

18.（本小题满分14分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$AB//DC$，$DC=2AB$，$AD\perp DC$，E 为棱 PD 的中点．



（Ⅰ）求证：$CD\perp AE$；

（Ⅱ）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD；

（Ⅲ）试判断 PB 与平面 AEC 是否平行？并说明理由．

19.（本小题满分13分）

已知椭圆 $G:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，直线 l 过椭圆 G 的右顶点 $A(2,0)$，且交椭圆 G 于另一点 C．

（Ⅰ）求椭圆 G 的标准方程；

（Ⅱ）若以 AC 为直径的圆经过椭圆 G 的上顶点 B，求直线 l 的方程．

20.（本小题满分14分）

已知函数 $f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在函数 $f(x)$ 零点处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $y=f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若关于 x 的方程 $f(x)=a$ 恰有两个不同的实数根 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，

求证：$x_2-x_1>\frac{1}{a}-1$.

海淀区高三年级第一学期期末练习

数学（文科）答案及评分标准　　2017.1

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. C　2. B　3. D　4. C　5. C　6. A　7. B　8. C

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分

9. $y=2x$ 或 $y=-2x$（写出之一即可）　10. -1，n^2-2n　11. $(1,0)$，$\sqrt{2}$

12. 10　13. ①②③　14. 乙

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

由 $a_3+a_4=6$ 可得 $a_2q+a_2q^2=6$

又 $a_2=1$，所以 $q+q^2=6$，

解得 $q=2$ 或 $q=-3$，

因为 $a_n>0\ (n=1,2,3,\cdots)$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q>0$.

所以 $q=2$，

所以 $a_1=\dfrac{1}{2}$，

所以 $a_n=2^{n-2},(n=1,2,3,\cdots)$.

（Ⅱ）法 1：由数列 $\{a_n-n\}$ 的前 n 项和 S_n 的意义可得

$S_5-S_4=a_5-5$，

所以 $S_5-S_4=2^{5-2}-5=3>0$，

所以 $S_5>S_4$.

法 2：$S_n=\dfrac{\frac{1}{2}(1-2^n)}{1-2}-\dfrac{n(n+1)}{2}$，

所以 $S_4=-\dfrac{5}{2}$，

所以 $S_5=\dfrac{1}{2}$，

所以 $S_5>S_4$.

16. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $\cos x\neq 0$ 可得 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\left|x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right.\right\}$.

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+1}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$.

（Ⅱ）$f(x)=\dfrac{\sin 2x+2\cos^2 x}{\cos x}$

$=\dfrac{2\sin x\cos x+2\cos^2 x}{\cos x}$

$=2\sin x+2\cos x$

$=2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

法 1：函数 $y=\sin x$ 的增区间为 $\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$.

由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x+\dfrac{\pi}{4}<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，

得 $2k\pi-\dfrac{3\pi}{4}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，

因为 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$，

所以，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上的单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

法 2：因为 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $x+\dfrac{\pi}{4}\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4})$.

因为函数 $y=\sin x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

所以 $x+\dfrac{\pi}{4}\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$ 时，$f(x)=2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 单调递增

此时 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，

所以，函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的单调递增区间为 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

17. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）八周诚信水站诚信度的平均数为 $\bar{x}=\dfrac{95+98+92+88+94+94+83+80}{8\times100}=90.5\%$.

（Ⅱ）表 1 中超过 91% 的数据共有 5 个，其中第一个周期有 3 个，分别记为 a_1、a_2、a_3，第二个周期有 2 个，分别记为 b_1、b_2，

从这 5 个数据中任取 2 个共有 10 种情况：

$a_1a_2,a_1a_3,a_1b_1,a_1b_2,$

$a_2a_3,a_2b_1,a_2b_2,$

$a_3b_1,a_3b_2,$

$b_1b_2.$

其中至少有 1 个数据出现在第二个周期有 7 种情况.

设至少有 1 个数据出现在第二个周期为事件 A.

则 $P(A)=\dfrac{7}{10}$.

（Ⅲ）有效

阐述理由

理由陈述的可能情况：

①第三个周期水站诚信度的平均数 92% 高于第二个周期的诚信度平均数 87.75%；

②第三个周期的四周的水站诚信度呈逐步上升趋势；

③第三个周期水站诚信度的平均数 92% 高于第一、二个周期的诚信度平均数 90.5%；

④12 周的整体诚信度平均数为 91%，高于前两个周期的诚信度的平均数 90.5%；

18. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$DC\subset$ 底面 $ABCD$，

所以 $PD\perp DC$.

又 $AD\perp DC$，$AD\cap PD=D$，

故 $CD\perp$ 平面 PAD.

又 $AE\subset$ 平面 PAD，

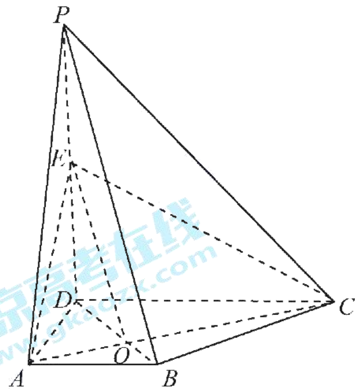
所以 $CD\perp AE$.

（Ⅱ）因为 $AB//DC$, $CD\perp$ 平面 PAD，

所以 $AB\perp$ 平面 PAD.

又因为 $AB\subset$ 平面 PAB，

所以平面 $PAB\perp$ 平面 PAD.



（Ⅲ）PB 与平面 AEC 不平行.

假设 PB //平面 AEC，

设 $BD \cap AC=O$，连结 OE，则平面 $EAC \cap$ 平面

$PDB=OE$，又 $PB \subset$ 平面 PDB

所以 $PB // OE$.

所以，在 ΔPDB 中有 $\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{PE}{ED}$，

由 E 是 PD 中点可得 $\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{PE}{ED}=1$，即 $OB=OD$.

因为 $AB//DC$，

所以 $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{1}{2}$，这与 $OB=OD$ 矛盾，

所以假设错误，PB 与平面 AEC 不平行.

19.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由题设可得 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, a=2$，

所以 $c=\sqrt{3}$.

因为 $a^2=b^2+c^2$，

所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

所以椭圆 G 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）法 1：以 AC 为直径的圆经过点 B 等价于 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$.

由题设可得 $B(0,1)$，所以 $\overrightarrow{BA}=(2,-1)$，

$\overrightarrow{BC}=(x_C, y_C-1)$，

所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=2x_C-y_C+1=0$.

又 $C(x_C,y_C)$ 在椭圆 G 上，所以 $\dfrac{{x_C}^2}{4}+{y_C}^2=1$，

由 $\begin{cases} y_C=2x_C+1, \\ {x_C}^2+4{y_C}^2=4 \end{cases}$ 可得 $17{x_C}^2+16x_C=0$，

解得 $x_C=0$ 或 $x_C=-\frac{16}{17}$，

所以 $C(0,1)$ 或 $C(-\frac{16}{17},-\frac{15}{17})$，

所以，直线 l 方程为 $x+2y-2=0$ 或 $3x-10y-6=0$.

法 2：由题意，直线 l 的斜率一定存在，故设直线 l 为 $y=k(x-2)$，

由 $\begin{cases} y=k(x-2), \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 可得 $(1+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$.

所以 $\Delta>0$, $x_Cx_A=\frac{16k^2-4}{1+4k^2}$，

又 $x_A=2$，

所以 $x_C=\frac{8k^2-2}{1+4k^2}$.

由题设可得以 AC 为直径的圆经过点 $B(0,1)$ 等价于 $\vec{BC}\cdot\vec{BA}=0$.

所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=2x_C-y_C+1=2x_C-k(x_C-2)+1=0$，

即 $\frac{20k^2+4k-3}{1+4k^2}=0$.

解得 $k=-\frac{1}{2}$ 或 $k=\frac{3}{10}$.

所以，直线 l 方程为 $x+2y-2=0$ 或 $3x-10y-6=0$.

20. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）令 $f(x)=0$，得 $x=\frac{1}{e}$.

所以，函数 $f(x)$ 零点为 $\frac{1}{e}$.

由 $f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$ 得 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x+1)}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$，

所以 $f'\left(\frac{1}{e}\right)=e^2$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在函数 $f(x)$ 零点处的切线方程为 $y-0=e^2\left(x-\frac{1}{e}\right)$，

即 $y=e^2x-e$.

（Ⅱ）由函数 $f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$ 得定义域为 $(0,+\infty)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$.

所以，在区间 $(0,1)$ 上，$f'(x)>0$；在区间 $(1,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$.

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,1)$，单调递减区间是 $(1,+\infty)$.

（III）由（I）可知 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}^{-1})$ 上 $f(x)<0$，在 $(\mathrm{e}^{-1},+\infty)$ 上 $f(x)>0$.

由（II）结论可知，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=1$，

所以，方程 $f(x)=a$ 有两个不同的实根 x_1,x_2 时，必有 $0<a<1$，且 $\mathrm{e}^{-1}<x_1<1<x_2$，

法 1：所以 $f(\frac{1}{a})=a(1-\ln a)>a=\ln x_2$，

由 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减可知 $x_2>\frac{1}{a}$，

所以 $x_2-x_1>\frac{1}{a}-1$.

法 2：由 $f(x)=a$ 可得 $\ln x+1=ax$，两个方程同解.

设 $g(x)=\ln x+1-ax$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，

当 $0<a<1$ 时，由 $g'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{a}$，

所以 $g(x),g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$(0,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	极小	↘

所以 $x_1<\frac{1}{a}$，$x_2>\frac{1}{a}$，

所以 $x_2-x_1>\frac{1}{a}-1$.

解得 $x_C=0$ 或 $x_C=-\frac{16}{17}$，

所以 $C(0,1)$ 或 $C(-\frac{16}{17},-\frac{15}{17})$，

所以，直线 l 方程为 $x+2y-2=0$ 或 $3x-10y-6=0$.

法 2：由题意，直线 l 的斜率一定存在，故设直线 l 为 $y=k(x-2)$，

由 $\begin{cases} y=k(x-2), \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 可得 $(1+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$.

所以 $\Delta>0$，$x_Cx_A=\frac{16k^2-4}{1+4k^2}$，

又 $x_A=2$，

所以 $x_C=\frac{8k^2-2}{1+4k^2}$.

由题设可得以 AC 为直径的圆经过点 $B(0,1)$ 等价于 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$.

所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=2x_C-y_C+1=2x_C-k(x_C-2)+1=0$，

即 $\frac{20k^2+4k-3}{1+4k^2}=0$.

解得 $k=-\frac{1}{2}$ 或 $k=\frac{3}{10}$.

所以，直线 l 方程为 $x+2y-2=0$ 或 $3x-10y-6=0$.

20. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）令 $f(x)=0$，得 $x=\frac{1}{e}$.

所以，函数 $f(x)$ 零点为 $\frac{1}{e}$.

由 $f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$ 得 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x+1)}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$，

所以 $f'\left(\frac{1}{e}\right)=e^2$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在函数 $f(x)$ 零点处的切线方程为 $y-0=e^2\left(x-\frac{1}{e}\right)$，

即 $y=e^2x-e$.

（Ⅱ）由函数 $f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$ 得定义域为 $(0,+\infty)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$.

所以，在区间 $(0,1)$ 上，$f'(x)>0$；在区间 $(1,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$.