不等式专题练习解析

练习（一）

1. 设正实数a，b，c满足$a^2+4b^2+9c^2=4b+12c-2$，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$的最小值是______.

来源：2020·全国高中数学联赛B卷

解析：由已知条件，可知

$$a^2+(2b-1)^2+(3c-2)^2=3$$

由柯西不等式有

$$9=(1+1+1)[a^2+(2b-1)^2+(3c-2)^2]\ge(a+2b-1+3c-2)^2$$

所以可知

$$a+2b+3c\le 6$$

由权方和不等式有

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{2b}+\frac{3^2}{3c}\ge\frac{(1+2+3)^2}{a+2b+3c}\ge 6$$

当且仅当$a=b=c=1$取等，故$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$的最小值为$6$.

2. 已知α，β，$\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则$\cos\alpha+2\cos\beta+\cos\gamma-\cos(\alpha+\gamma)-2\cos(\beta+\gamma)$的最大值为______.

来源：2020·浙江省数学夏令营测试卷

解析：记原式$=T$，易知$\sin\frac{\gamma}{2}\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，则有

$$\begin{aligned}T&=2\sin\frac{\gamma}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)+4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)+\cos\gamma\\&\le 6\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\gamma=-2\sin^2\frac{\gamma}{2}+6\sin\frac{\gamma}{2}+1\\&=-2\left(\frac{3}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2+\frac{11}{2}\le-2\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{11}{2}=3\sqrt{2}\end{aligned}$$

当且仅当$\gamma=2\alpha=2\beta=\frac{\pi}{2}$取等，故原式最大值为$3\sqrt{2}$.

一、待定系数法

（1）前言： 想直接通过均值不等式或者柯西不等式求解最值，但是不知道系数如何配凑的时候，就可以考虑使用待定系数法，利用取等条件和已知条件建立起系数之间的方程，然后解方程即可求解出系数

（2）经典例题分析与讲解

1. 设正实数a,b满足$a+b=1$，则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{27}{b^3}$的最小值为（　　）

A. $\dfrac{47+13\sqrt{13}}{2}$　　**B.** $\dfrac{55+55\sqrt{13}}{2}$　　**C.**218　　**D.前三个答案都不对**

题目出处： 2018年北京大学自主招生5

分析：条件分式求最值，一般有两种最直接的方式：

一是直接利用等式消元统一变量，而后求导

二是先齐次化，然后统一变量，最后再构造函数求导

方法一：齐次化＋求导操作

基于上述分析，有如下过程，由题意可知

$$\frac{1}{a}+\frac{27}{b^3}=\frac{a+b}{a}+\frac{27(a+b)^3}{b^3}$$

令$t=\dfrac{a}{b}$，则

$$f(t)=\frac{a+b}{a}+\frac{27(a+b)^3}{b^3}=28+27(t^3+3t^2+3t)+\frac{1}{t}$$

则

$$f'(t)=\frac{81t^2(t+1)^2-1}{t^2}$$

此时

$$t\in\left(0,\frac{\sqrt{13}-3}{6}\right),\ f'(t)<0,\ f(t)\text{单调递减}$$

$$t\in\left(\frac{\sqrt{13}-3}{6},+\infty\right),\ f'(t)>0,\ f(t)\text{单调递增}$$

所以

$$f(t)_{\min}=f\left(\frac{\sqrt{13}-3}{6}\right)$$

此时绝对不是将$t_0=\dfrac{\sqrt{13}-3}{6}$直接代入$f(t)$计算，应该利用导数等于零的关系，先降次，

一、待定系数法

（1）前言： 想直接通过均值不等式或者柯西不等式求解最值，但是不知道系数如何配凑的时候，就可以考虑使用待定系数法，利用取等条件和已知条件建立起系数之间的方程，然后解方程即可求解出系数

（2）经典例题分析与讲解

1. 设正实数a,b满足$a+b=1$，则$\frac{1}{a}+\frac{27}{b^3}$的最小值为（　　）

A. $\frac{47+13\sqrt{13}}{2}$　　**B.** $\frac{55+55\sqrt{13}}{2}$　　**C.**218　　**D.前三个答案都不对**

题目出处： 2018年北京大学自主招生5

分析：条件分式求最值，一般有两种最直接的方式：

一是直接利用等式消元统一变量，而后求导

二是先齐次化，然后统一变量，最后再构造函数求导

方法一：齐次化＋求导操作

基于上述分析，有如下过程，由题意可知

$$\frac{1}{a}+\frac{27}{b^3}=\frac{a+b}{a}+\frac{27(a+b)^3}{b^3}$$

令$t=\frac{a}{b}$，则

$$f(t)=\frac{a+b}{a}+\frac{27(a+b)^3}{b^3}=28+27(t^3+3t^2+3t)+\frac{1}{t}$$

则

$$f'(t)=\frac{81t^2(t+1)^2-1}{t^2}$$

此时

$$t\in\left(0,\frac{\sqrt{13}-3}{6}\right)，f'(t)<0，f(t)\text{单调递减}$$

$$t\in\left(\frac{\sqrt{13}-3}{6},+\infty\right)，f'(t)>0，f(t)\text{单调递增}$$

所以

$$f(t)_{\min}=f\left(\frac{\sqrt{13}-3}{6}\right)$$

此时绝对不是将$t_0=\frac{\sqrt{13}-3}{6}$直接代入$f(t)$计算，应该利用导数等于零的关系，先降次，

最后再代入t，这样可以减少一些计算量，因为

$$f'(t_0)=0 \Rightarrow t_0^2=\frac{1}{9}-t_0 \Rightarrow t_0^3=\frac{t_0}{9}-t_0^2=\frac{t_0}{9}-\left(\frac{1}{9}-t_0\right)=\frac{10t_0}{9}-\frac{1}{9}$$

则

$$f(t_0)=28+27\left(\frac{10t}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{t}=34+30t+\frac{1}{t}=\frac{47+13\sqrt{13}}{2}$$

三角函数

一、三角求值

①题型特点：求解一个关于三角函数式子的值

②题型解法：一般是综合运用和差，降幂，二倍角，辅助角，和差化积，积化和差等公式进行一些代数变形，求出最终结果

③经典例题分析：

1. 求值： $\sin\left(\arctan 1+\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=$（ ）

A. 0　　**B.** $\frac{1}{2}$　　**C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　**D.** 1

题目出处： 2020 年清华大学强基计划15

答案：D

分析： 看到反三角函数，一般的操作是设角反解，找到角度之间的关系，于是令

$$\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}=\alpha\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}，\ \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}=\beta\Leftrightarrow\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

则

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}，\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

根据题意需要知道“$\alpha+\beta$”的大小关系，所以就需要求解“$\alpha+\beta$”的一个三角函数值，根据条件我们知道$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，此时借助余弦去实现比较好（因为余弦函数在$(0,\pi)$上是单调的），则

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

又因为$0<\alpha+\beta<\pi$，所以

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$$

而$\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，则

$$\sin\left(\arctan 1+\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

故正确答案选 D

一、恒成立问题

一、分离参数

①题型特点：分离参数的过程会很流畅，没有遇到太大的阻碍

②题型解法：分离完参数以后，直接构造函数求解最值即可

③经典例题分析：

1. 已知$0<x\leqslant 2e$时，$|x-a|\ln x\leqslant e$恒成立，则实数a的取值范围是________

答案： $\left[2\mathrm{e}-\dfrac{\mathrm{e}}{\ln 2+1},2\mathrm{e}\right]$

分析： 一看题目，直接构造函数，分类讨论会比较复杂，所以采取一个分离参数，但是在分离参数的过程中，我们遇到了一点阻碍，就是$\ln x$的正负我们不清楚，不过这点阻碍很容易清除，分类讨论一下就可以了，基于上述分析有如下过程

情形一：当$0<x\leqslant 1$时，此时

$$|x-a|\geqslant 0,\ \ln x\leqslant 0,\ \mathrm{e}>0$$

所以

$$a\in R$$

情形二：当$1<x\leqslant 2\mathrm{e}$时，此时

$$-\frac{\mathrm{e}}{\ln x}\leqslant x-a\leqslant \frac{\mathrm{e}}{\ln x}$$

则

$$x-\frac{\mathrm{e}}{\ln x}\leqslant a\leqslant x+\frac{\mathrm{e}}{\ln x}$$

易知函数$y=x-\dfrac{\mathrm{e}}{\ln x}$单调递增，则

$$y_{\max}=2\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{\ln 2+1}$$

令$f(x)=x+\dfrac{\mathrm{e}}{\ln x}$，则

$$f'(x)=\frac{x(\ln x)^2-\mathrm{e}}{x(\ln x)^2}$$

易知此时

$$f(x)_{\min}=f(\mathrm{e})=2\mathrm{e}$$

所以$a\in\left[2\mathrm{e}-\dfrac{\mathrm{e}}{\ln 2+1},2\mathrm{e}\right]$

三、爪形模型

①题型特点：在$\triangle ABC$中，过A点作一条线段AD与BC交于点D，此时形成的图形，我一般把它称之为爪形模型，题目会给这样的一个图形给我们，然后会让我们去求解一些量

②题型解法：一般是采取三种操作：

（Ⅰ）如果已知A，$\dfrac{BD}{CD}=\lambda$，AD这三个量，那我们一般是采取向量基底的策略，将$\overrightarrow{AD}$用一组基底$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$表示：$\overrightarrow{AD}=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$，然后两边平方，直接得到$AB$，$AC$，$AD$三边之间的等式关系，为后面的问题中的消元提供方便

（Ⅱ）如果已知AD，$\dfrac{BD}{CD}=\lambda$，那这个时候，我们一般采取余弦定理的策略，在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中分别对$\angle ADB$和$\angle ADC$使用余弦定理，因为$\angle ADB+\angle ADC=\pi$，所以$\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$，于是$AD,AB,AC,BC$四条边的等式关系就建立起来了，为后面问题中的消元做准备，当然我们也可以对角B（或者角C）在$\triangle ABD$和$\triangle ABC$中使用余弦定理建立等式关系

（Ⅲ）如果已知$\angle BAD$，$\angle DAC$，AD，那这个时候我们一般采取等面积法的操作，即

$$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$$

则

$$\frac{1}{2}|AB|\,|AD|\sin\angle BAD+\frac{1}{2}|AC|\,|AD|\sin\angle DAC=\frac{1}{2}|AB|\,|AC|\sin\angle BAC$$

通过上式，即可建立AB和AC的等式关系，为问题中的消元做准备

19. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=2$，$\triangle ACD$ 为正三角形，则 $\triangle BCD$ 面积的最大值为________

答案：$\sqrt{3}+1$

分析：要刻画 $\triangle BCD$ 的面积，尽量把角和边往已知条件上去靠，所以选择 $\angle DCB$，因为边 $DC=AC$，通过这一个转化，条件又回到 $\triangle ABC$ 中，这样就为建立变量之间的等式关系创造了条件，基于上述分析，有如下过程

设 $CD=x$，$\angle ACB=\alpha$，此时

$$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times 2\times x\times\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=x\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}x\cos\alpha+\frac{1}{2}x\sin\alpha ①$$

那接下来就是建立x和α等式关系来消元，在$\triangle ABC$中，由余弦定理可知

$$\cos\alpha=\frac{x^2+3}{4x}$$

但是看着上面的等式关系，不管是将$\triangle BCD$的面积统一成α或者x，都将是一个比较复杂的结构，那这个时候我们可以考虑引入第三个变量，将α和x都用第三个变量刻画，想到建立等式关系形式的简洁，而且引入的变量要在$\triangle ABC$中，所以考虑引入角度来实现，再引入一个角度，就相当于$\triangle ABC$中有两个角度已知，这个时候通过正弦定理去建立等式关系（比较简洁，为消元做准备），而AB和BC都是已知的，所以引入$\angle ABC$将是一个很不错的选择，不管是用余弦定理表示x（虽然这个题目不需要这样消元，但是在做类似题目，需要消掉x^2时，那余弦定理将是一个非常不错的选择），还是用正弦定理表示α，都是比较舒服的形式，基于上述想法，有如下过程

设$\angle ABC=\beta$，在$\triangle ABC$中，由正弦定理可知

$$\frac{x}{\sin\beta}=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin(\alpha+\beta)}$$

此时

$$x\sin\alpha=\sin\beta ②$$

又

$$x\sin\alpha\cos\beta+x\cos\alpha\sin\beta=2\sin\beta ③$$

将②代入③可得

$$x\cos\alpha=2-\cos\beta ④$$

现在消元的准备工作全部完成了，将②④代入①可得

$$S_{\triangle BCD}=\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sin\beta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta=\sqrt{3}+\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)\leq\sqrt{3}+1$$

当$\beta=\frac{5\pi}{6}$时，等号成立

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。