八省联盟·湖北新高考适应性测试卷（一）

高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知$(3+ai)(1-i)=b-2i$（$a,b\in\mathbf{R}$，i为虚数单位），则复数$|a+bi|=$

A. $\sqrt{15}$　　B. 4　　C. $\sqrt{17}$　　D. 5

2. 已知集合$A=\{x|x^2-5x+4\leqslant 0\}$，$B=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，则$A\cap B=$

A. $\{2,4\}$　　B. $\{1,3\}$

C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

3. 现把5名扶贫干部分到3个村庄，每个村庄至少分一人，其中甲、乙二人必需分在一起，则不同的分配方案共有

A. 24种　　B. 30种　　C. 36种　　D. 48种

4. 已知平面上三个不同的点M,F,P，若$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{MP}=|\overrightarrow{MP}|^2$，则

A. $PM\perp PF$　　B. $PM\perp MF$　　C. $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF}<0$　　D. $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF}>0$

5. 如果3个正整数按照自身顺序或者经过调整顺序可以组成一个等比数列，则称这3个数为一组“等比数”（如：(1,2,4)与(4,2,1)视为一组“等比数”）. 从1,2,3,4,5,6,7,8,9中任取3个不同的数，则这3个数构成一组“等比数”的概率为

A. $\frac{1}{42}$　　B. $\frac{1}{28}$　　C. $\frac{1}{21}$　　D. $\frac{5}{84}$

6. 直线$l:mx+y-m-1=0$被圆$C:x^2+y^2-4x+2y-4=0$所截得的弦的长度的最小值为

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 3

7. 将函数$y=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，再向上平移1个单位，所得图象的函数解析式是$y=2\cos^2x$，若$y=\sin(\omega x+\varphi)$图象与$y=a$图象在$x\in[0,\pi)$上有两个不同交点(x_1,a)，(x_2,a)，则x_1+x_2的值为

A. $\frac{\pi}{3}$或π　　B. $\frac{4\pi}{3}$或π　　C. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{4\pi}{3}$或π　　D. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{4\pi}{3}$

8. “$a<b$”是“$\log_3 a+\log_{\frac{1}{3}} b<\frac{1}{3^a}-\frac{1}{3^b}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9. 下列说法正确的是

A. 函数 $f(x)=\lg(x^2+ax-1)$ 一定有最小值

B. 函数 $y=\tan\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

C. 已知函数 $f(x)=-x^2+2x+1$，则函数 $f(|x|)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$

D. 在同一坐标系中函数 $y=2^x$ 与 $y=2^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称

10. 下列结论正确的有

A. 若随机变量 $\xi\sim N(1,\sigma^2)$，$P(\xi\leqslant 4)=0.77$，则 $P(\xi\leqslant -2)=0.23$

B. 若随机变量 $X\sim B\left(10,\frac{1}{3}\right)$，则 $D(3X-1)=19$

C. 已知回归直线方程为 $y=\hat{b}x+10.8$，且 $\bar{x}=4$，$\bar{y}=50$，则 $\hat{b}=9.8$

D. 已知一组数据丢失了其中一个，剩下的六个数据分别是 3，3，5，3，6，11. 若这组数据的平均数、中位数、众数依次成等差数列，则丢失数据的所有可能值的和为 22

11. 设 $0<a<b$，$a+b=1$，则下列结论正确的是

A. $0<b-a<\frac{1}{2}$　　B. $a<a^2+b^2$

C. ab 最大值为 $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}<a^2+b^2<1$

12. 已知曲线 C：$x|x|-y|y|=1$，则下列结论正确的是

A. 曲线 C 的渐近线为 $y=x$

B. 曲线 C 与 x 轴的交点为 $(1,0)$，$(-1,0)$

C. $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是曲线 C 上任意两点，若 $x_1<x_2$，则 $y_1<y_2$

D. 若 $P(s,t)$ 是曲线 C 上任意一点，则 $|s-t|\leqslant\sqrt{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AC\perp BC$，若 $PA=\sqrt{2}$，$AC=2$，$BC=\sqrt{6}$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为__________.

14. 二项式 $(x+2y)^5$ 的展开式中，所有项均可写成 kx^ay^b（$k\in\mathbf{R}$，$a,b\in\mathbf{N}$）的形式，则当 ab 取最大值时，x^ay^b 的项的系数 k 的值为__________.（用数字作答）

15. 在我国东南沿海地区，几乎每年夏秋两季都会或多或少的受到台风的侵袭. 所谓的台风，是指一种热带气旋，在气象学上，按世界气象组织定义指气旋中心持续风力在 12 级到 13 级（风速在 32.7 m/s 至 41.4 m/s）的热带气旋称为台风. 因为台风风力大，并且还会带来暴雨，往往会给经过地区带来较大损失. 在某海滨城市 A 附近海面有一台风正以 20 km/h 的速度向西北方向移动，据监测台风中心 B 在该城市正东 40 km 处，台风半径为 30 km，台风侵袭的范围为距台风中心 30 km 圆形区域，则城市 A 受该台风侵袭的持续时间为__________小时.

16.《孙子算经》是我国南北朝时期（公元 5 世纪）的数学著作. 在《孙子算经》中有“物不知数”问题，原文如下：有物不知数，三三数之剩二，五五数之剩三，问物几何？即一个整数除以三余二，除以五余三，求这个整数. 设这个整数为 a，当 $a\in[1,500]$ 时，则符合条件的所有 a 的和为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$(2b-c)\cos A=a\cos C$.

(1)求角A的大小；

(2)若$a=2\sqrt{6}$，$c=4$，求$\triangle ABC$的面积.

18.（本小题满分 12 分）

在①点(n,S_n)在函数$y=2^{x+1}+p(p\in\mathbf{R})$的图象上；②$a_{n+1}=\dfrac{2a_n^2}{a_{n+1}-a_n}(a_n>0)$；③$a_n=\dfrac{1}{2}S_n+t(t\in\mathbf{R})$这三个条件中任选一个，补充到下面问题中，并解答.

在数列$\{a_n\}$中，S_n为其前n项和，$a_1=2$，________，其中$n\in\mathbf{N}^*$.

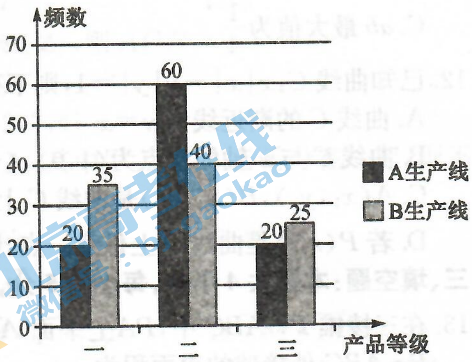
(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令$b_n=\dfrac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

19.（本小题满分 12 分）

产品质量是企业的生命线，为提高产品质量，企业非常重视产品生产线的质量，某企业引进了生产同一种产品的A,B两条生产线，为比较两条生产线的质量，从A,B生产线生产的产品中各自随机抽取了100件产品进行检测，把产品等级结果和频数制成了如右的统计图.



(1)有多大的把握认为一级品与生产线有关？

(2)生产一件一级品可盈利 100 元，生产一件二级品可盈利 50 元，生产一件三级品则亏损20 元，以频率估计概率.

①分别估计A,B生产线生产一件产品的平均利润；

②你认为哪条生产线的利润较为稳定？并说明理由.

附：①$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

②临界值表：

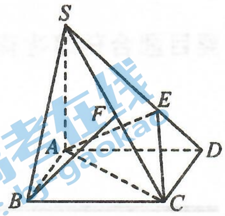
$P(K^2\geqslant k)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是平行四边形,$SA\perp$平面 $ABCD$,$BC=2AB=2$,$\angle ABC=60°$,$\overrightarrow{SE}=2\overrightarrow{ED}$,$F$ 为 SC 的中点.

(1)求证:$BF//$平面 ACE;

(2)当 SA 长为何值时,二面角 $S\text{-}AC\text{-}E$ 的大小为 $45°$.



21.(本小题满分 12 分)

已知点 E 到直线 $l:y=-2$ 的距离与点 E 到点 $F(0,1)$ 的距离之差为 1. 设点 E 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的方程;

(2)若 $P(x_0,y_0)$ 为直线 l 上任意一点,过点 P 作曲线 C 的两条切线 PM,PN,切点分别为 M,N,求点 F 到直线 MN 的最大距离.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x|x+a|-\frac{1}{2}\ln x$.

(1)若 $a=0$,讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)求函数 $f(x)$ 的极值点.

八省联盟·湖北新高考适应性测试卷(一)·高三数学

参考答案、提示及评分细则

1.C　$(3+ai)(1-i)=b-2i$,即 $3+a+(a-3)i=b-2i$,根据复数相等的充要条件,得 $3+a=b$ 且 $a-3=-2$,解得 $a=1,b=4$,所以 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$. 故选 C.

2.B　易知 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$,又 B 为全体奇数集,所以 $A\cap B=\{1,3\}$. 故选 B.

3.C　把甲、乙二人当作一人看待,相当于把 4 人分到三个村庄,分组方法数为 C_4^2,分配方法数为 A_3^3,根据分步乘法计数原理,共有 $C_4^2A_3^3=36$ 种分配方案. 故选 C.

4.A　因为 $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PF}$,所以 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{MP}=(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PF})\cdot\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MP}^2+\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MP}^2$,所以 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MP}=0$,所以 $PM\perp PF$. 故选 A.

5.C　从 9 个数中任取 3 个不同的数,有 $C_9^3=84$ 种情况;其中,构成一组等比数的有 $(1,2,4),(1,3,9),(2,4,8),(4,6,9)$ 共 4 种情况,故这 3 个数构成一组等比数的概率 $P=\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$. 故选 C.

6.A　l 的方程可化为 $m(x-1)+y-1=0$,所以 l 过定点 $A(1,1)$,圆 C 的方程化为标准方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$,显然点 $(1,1)$ 在圆内,当 l 与 AC 垂直时被圆 C 截得的弦的长度最小. 因为 $|AC|=\sqrt{(1-2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$,所以弦的长度的最小值为 $2\sqrt{9-(\sqrt{5})^2}=4$. 故选 A.

7.D　反向思考:$y=2\cos^2x=\cos 2x+1=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+1$,将其图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位,再向下平移 1 个单位,所得图象的函数解析式是 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]+1-1=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,又 $\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6}$. 根据图象可知,两交点关于 $x=\frac{\pi}{6}$ 或 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称,$\therefore x_1+x_2=\frac{\pi}{3}$ 或 $x_1+x_2=\frac{4\pi}{3}$. 故选 D.

8.B　由 $\log_3a+\log_{\frac{1}{3}}b<\frac{1}{3^a}-\frac{1}{3^b}$,得 $\log_3a-\log_3b<\frac{1}{3^a}-\frac{1}{3^b}$,所以 $\log_3a-\frac{1}{3^a}<\log_3b-\frac{1}{3^b}$,令 $f(x)=\log_3x-\frac{1}{3^x}$,则 $f(a)<f(b)$,因为函数 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的单调递增函数,所以 $0<a<b$;反之则不然. 故选 B.

9.CD　对于 A,当 $a=0$ 时,$f(x)=\lg(x^2-1)$,此时 $x^2-1\in(0,+\infty)$,$f(x)=\lg(x^2-1)$ 值域为 $\mathbf{R}$,故 A 错误;

对于 B,该函数最小正周期为 $\frac{\pi}{4}$,故 B 错误;

对于 C,$f(|x|)=-x^2+2|x|+1=\begin{cases}-x^2+2x+1,x\geqslant 0,\\-x^2-2x+1,x<0,\end{cases}$ 所以由二次函数的图象可知,函数 $f(|x|)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$,故 C 正确;

对于 D,在同一坐标系中,函数 $y=2^x$ 与 $y=2^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称,命题正确. 故选 CD.

10.AC　对于 A,$P(\xi\leqslant -2)=P(\xi\geqslant 4)=1-0.77=0.23$,故 A 正确;

对于 B,$D(X)=10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{9}$,所以 $D(3X-1)=\frac{20}{9}\times 3^2=20$,故 B 不正确;

对于 C,回归直线方程经过点 $(\bar{x},\bar{y})$,将 $\bar{x}=4,\bar{y}=50$ 代入求得 $\hat{b}=9.8$,故 C 正确;

对于 D,设丢失的数据为 x,则这组数据的平均数为 $\frac{31+x}{7}$,众数为 3,当 $x\leqslant 3$ 时,中位数为 3,此时 $\frac{31+x}{7}+3$

$=6$，解得 $x=-10$；当 $3<x<5$ 时，中位数为 x，此时$\frac{31+x}{7}+3=2x$，解得 $x=4$；当 $x\geqslant5$ 时，中位数为 5，此时$\frac{31+x}{7}+3=10$，解得 $x=18$. 所以所有可能 x 的值和为 $-10+4+18=12$，故 D 不正确. 故选 AC.

11. BD　由 $0<a<b,a+b=1$，则 $0<a<\frac{1}{2}<b<1$.

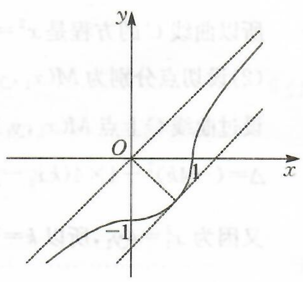
对 A，由于$-\frac{1}{2}<-a<0,\frac{1}{2}<b<1$，所以 $0<b-a<1$，所以 A 错误；

对 B，$\frac{1}{2}<b\Rightarrow1<2b\Rightarrow a<2ab<a^2+b^2$，所以 B 正确；

对 C，$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$（当且仅当 $a=b$ 时取"="），由于 $a<b$，所以"="不可取，所以 C 错误；

对 D，因为 $a^2+b^2>\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{1}{2}$，又 $a^2<a,b^2<b\Rightarrow a^2+b^2<a+b=1$，所以 D 正确. 故选 BD.

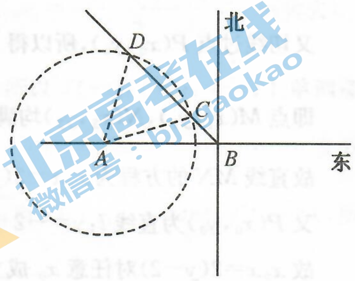
12. ACD　由 $x|x|-y|y|=1$，知曲线 C 由 $x^2-y^2=1(x\geqslant0,y\geqslant0),x^2+y^2=1$ $(x>0,y<0),y^2-x^2=1(x<0,y<0)$三部分组成（两边为双曲线的一部分，中间为圆的一部分，如图所示），两边部分为双曲线，其渐近线为 $y=x$，故 A 正确；曲线 C 与 x 轴的交点为 $(1,0)$，故 B 错误；由图可知 C 正确；由图可知点 P 到 $y=x$ 的距离 $d\leqslant1$，所以$\frac{|s-t|}{\sqrt{2}}\leqslant1$，所以 $|s-t|\leqslant\sqrt{2}$，故 D 正确. 故选 ACD.



13. 12π　设球的半径为 R，由题意知 $2R=\sqrt{PA^2+AC^2+BC^2}=\sqrt{12}$，所以球的表面积为 12π.

14. 40 或 80　由题意知，$a+b=5$，且 $a,b\in\mathbf{N}$，则 $a=0,b=5$ 或 $a=1,b=4$ 或 $a=2,b=3$ 或 $a=3,b=2$ 或 $a=4$，$b=1$或$a=5,b=0$. 只有当 $a=2,b=3$ 或 $a=3,b=2$ 时，ab 取得最大值，故此时含 x^2y^3 的项的系数是 $2^3C_5^3=80$ 或含 x^3y^2 的项的系数是 $2^2C_5^2=40$.

15. 1　设台风中心 B 的东北方向上存在点 P 到城市 A 的距离为 30 km，在$\triangle ABP$ 中，设 $PB=x$，则 $PA^2=PB^2+AB^2-2PB\cdot AB\cos45°$，即 $30^2=x^2+40^2-2\times40x\cos45°$，化简得 $x^2-40\sqrt{2}x+700=0$，其两根 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2=40\sqrt{2},x_1x_2=700$，所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=20$，即 $CD=20$ km，所以时间 $t=\frac{CD}{20}=1$（小时），即城市 A 受台风侵袭的持续时间为 1 小时.



16. 8 184　由题设 $a=3m+2=5n+3,m,n\in\mathbf{N}^*$，则 $3m=5n+1$. 当 $m=5k$，n 不存在；当 $m=5k+1$，n 不存在；当 $m=5k+2$，$n=3k+1$，满足题意；当 $m=5k+3$，n 不存在；当 $m=5k+4$，n 不存在；故 $a=15k+8\in[1,500]$，所以$-\frac{7}{15}\leqslant k\leqslant\frac{492}{15}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=0,1,2,\cdots,32$，共 33 个数. 且这些数组成以 8 为首项，15 为公差的等差数列，所以这 33 个数的和为 $33\times8+\frac{33\times32}{2}\times15=8\ 184$.

17. 解：(1)由题意可得 $(2\sin B-\sin C)\cos A=\sin A\cos C$，…………………… 2 分

$\therefore2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin(A+C)=\sin B$. …………………… 4 分

$\because\sin B\neq0,\therefore\cos A=\frac{1}{2}$，$\because A\in(0,\pi),\therefore A=\frac{\pi}{3}$. …………………… 5 分

(2)由正弦定理得 $\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $C\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $C=\frac{\pi}{4}$， ………………………………………… 7 分

所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times4\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=6+2\sqrt{3}$. ………………… 10 分

18. 解：(1)选择①：由题意知 $S_n=2^{n+1}+p$，

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n$. ………………………………………… 3 分

因为 $a_1=2$，所以 $n=1$ 时也满足上式，所以 $a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………… 5 分

选择②：由 $a_{n+1}=\frac{2a_n^2}{a_{n+1}-a_n}$，得 $a_{n+1}^2-a_na_{n+1}-2a_n^2=0$， ………………………… 1 分

所以 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-2a_n)=0$，因为 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}+a_n>0$，所以 $a_{n+1}=2a_n$， ……… 4 分

又 $a_1=2$，

所以 $\{a_n\}$ 成以 2 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………… 5 分

选择③：$a_n=\frac{1}{2}S_n+t(t\in\mathbf{R})$，

当 $n\geqslant2$ 时，$a_{n-1}=\frac{1}{2}S_{n-1}+t$，与 $a_n=\frac{1}{2}S_n+t(t\in\mathbf{R})$ 相减得 $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2}a_n$，

所以 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant2)$. ………………………………………………………… 3 分

因为 $a_1=2$，所以 $\{a_n\}$ 成以 2 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$. ……… 5 分

(2)由(1)知 $a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $b_n=\frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$， ………………………………… 8 分

所以 $T_n=\left(\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^3+1}\right)+\left(\frac{1}{2^3+1}-\frac{1}{2^4+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$

$=\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{2^3+1}-\frac{1}{2^4+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$. ………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)根据已知数据可建立列联表如下：

	一级品	非一级品	合计
A 生产线	20	80	100
B 生产线	35	65	100
合计	55	145	200

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200\times(20\times65-35\times80)^2}{55\times145\times100\times100}\approx5.643>5.024$，

所以有 97.5%的把握认为一级品与生产线有关. ………………………………………… 3 分

(2)A 生产线生产一件产品为一、二、三级品的概率分别为 $\frac{1}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{1}{5}$.

记 A 生产线生产一件产品的利润为 X，则 X 的取值为 $100,50,-20$，

其分布列为

X	100	50	-20
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

………………………………………………………………………………………… 5 分

B 生产线生产一件产品为一、二、三级品的概率分别为 $\frac{7}{20},\frac{2}{5},\frac{1}{4}$.

记 B 生产线生产一件产品的利润为 Y，则 Y 的取值为 $100,50,-20$，

其分布列为

Y	100	50	-20
P	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$

………………………………………………………………………………………… 7 分

①$E(X)=100\times\frac{1}{5}+50\times\frac{3}{5}+(-20)\times\frac{1}{5}=46$；$E(Y)=100\times\frac{7}{20}+50\times\frac{2}{5}+(-20)\times\frac{1}{4}=50$.

故 A,B 生产线生产一件产品的平均利润分别为 46 元、50 元. ………………………… 9 分

②$D(X)=(100-46)^2\times\frac{1}{5}+(50-46)^2\times\frac{3}{5}+(-20-46)^2\times\frac{1}{5}=1\ 464$；

$D(Y)=(100-50)^2\times\frac{7}{20}+(50-50)^2\times\frac{2}{5}+(-20-50)^2\times\frac{1}{4}=2\ 100$.

因为 $D(X)<D(Y)$，所以 A 生产线的利润更为稳定. ………………………………… 12 分

20.(1)证明：取 SE 的中点 G，连接 FG. 连接 BD 交 AC 于点 N，连接 FD 交 CE 于点 M，连接 MN.

因为 F 为 SC 的中点，G 是 SE 的中点，

所以 $FG/\!/CE$. …………………………………………………………………… 2 分

又 $\overrightarrow{SE}=2\overrightarrow{ED}$，所以 E 为 GD 的中点，所以 M 为 FD 的中点，

易得 N 为 BD 的中点，所以 $BF/\!/MN$.

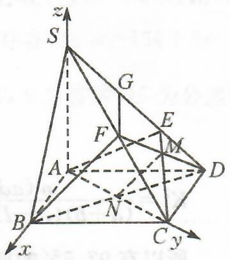
因为 $MN\subset$ 平面 AEC，$BF\not\subset$ 平面 AEC，所以 $BF/\!/$ 平面 ACE. ………………… 4 分

(2)解：因为 $BC=2AB=2$，$\angle ABC=60^\circ$，由余弦定理得

$AC^2=BC^2+AB^2-2BC\cdot AB\cos 60^\circ=4+1-2\times2\times1\times\frac{1}{2}=3$，

所以 $AC=\sqrt{3}$. 所以 $AB\perp AC$. ……………………………………………… 6 分

分别以 AB,AC,AS 所在直线为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



设 $SA=t(t>0)$，则 $A(0,0,0)$，$S(0,0,t)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$D(-1,\sqrt{3},0)$，所以 $\overrightarrow{AC}=(0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DS}=(-1,\sqrt{3},0)+\frac{1}{3}(1,-\sqrt{3},t)=\left(-\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{t}{3}\right)$. ……………………………… 8 分

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}\sqrt{3}y=0,\\-\frac{2}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}y+\frac{t}{3}z=0,\end{cases}$ 令 $z=2$ 得 $x=t$,所以 $\boldsymbol{m}=(t,0,2)$.

因为平面 SAC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}$ ………………………… 10 分

由于二面角 S-AC-E 大小为 45°,所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,即 $\frac{t^2}{t^2+4}=\frac{1}{2}$,解得 $t=2$ 或 $t=-2$(舍).

故当 $SA=2$ 时,二面角 S-AC-E 的大小为 45°. ………………………… 12 分

21. 解:(1)依题意,点 E 到直线 l':$y=-1$ 的距离等于点 E 到点 $F(0,1)$的距离, ………… 1 分

则点 E 的轨迹是以 F 为焦点以直线 l'为准线的抛物线. 设其方程为 $x^2=2py(p>0)$. ………… 2 分

由题意,$\frac{p}{2}=1$,解得 $p=2$.

所以曲线 C 的方程是 $x^2=4y$. ………………………… 4 分

(2)设切点分别为 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$.

设过曲线 C 上点 $M(x_1,y_1)$的切线方程为 $y-y_1=k(x-x_1)$,代入 $x^2=4y$,整理得 $x^2-4kx+4(kx_1-y_1)=0$,

$\Delta=(-4k)^2-4\times4(kx_1-y_1)=0$,

又因为 $x_1^2=4y_1$,所以 $k=\frac{x_1}{2}$. ………………………… 5 分

从而过曲线 C 上点 $M(x_1,y_1)$的切线方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$,即 $y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}$.

又切线过点 $P(x_0,y_0)$,所以得 $y_0=\frac{x_1}{2}x_0-\frac{x_1^2}{4}$,即 $y_0=\frac{x_1}{2}x_0-y_1$. ………………………… 7 分

同理可得过点 $N(x_2,y_2)$的切线为 $y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4}$,

又切线过点 $P(x_0,y_0)$,所以得 $y_0=\frac{x_2}{2}x_0-\frac{x_2^2}{4}$,即 $y_0=\frac{x_2}{2}x_0-y_2$. ………………………… 8 分

即点 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$均满足 $y_0=\frac{x}{2}x_0-y$,即 $x_0x=2(y_0+y)$.

故直线 MN 的方程为 $x_0x=2(y_0+y)$. ………………………… 9 分

又 $P(x_0,y_0)$为直线 l:$y=-2$ 上任意一点,

故 $x_0x=2(y-2)$对任意 x_0 成立,所以令 $x=0$,得 $y=2$.

从而直线 MN 恒过定点$(0,2)$. ………………………… 10 分

又曲线 C 的焦点 F 的坐标为$(0,1)$,

所以点 F 到直线 MN 的最大距离为 1. ………………………… 12 分

22. 解:(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$. ………………………… 1 分

若 $a=0$,则 $f(x)=x^2-\frac{1}{2}\ln x$,$f'(x)=2x-\frac{1}{2x}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{2x}$.

令 $f'(x)>0$,得 $x>\frac{1}{2}$;令 $f'(x)<0$,得 $0<x<\frac{1}{2}$,

故函数 $f(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增. ………………………… 3 分

(2)由于 $f(x)=x|x+a|-\frac{1}{2}\ln x, x\in(0,+\infty)$.

(ⅰ)当 $a\geqslant 0$ 时, $f(x)=x^2+ax-\frac{1}{2}\ln x, f'(x)=2x+a-\frac{1}{2x}=\frac{4x^2+2ax-1}{2x}$,

令 $f'(x)=0$,得 $x_1=\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{4}>0, x_2=\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{4}<0$(舍去),

所以当 $x\in(0,x_1)$ 时, $f'(x)<0$;当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减,在 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 的极小值点为 $\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{4}$. …… 5 分

(ⅱ)当 $a<0$ 时, $f(x)=\begin{cases}-x^2-ax-\frac{1}{2}\ln x, 0<x<-a,\\ x^2+ax-\frac{1}{2}\ln x, x\geqslant -a.\end{cases}$

①当 $0<x<-a$ 时, $f'(x)=-2x-a-\frac{1}{2x}=\frac{-4x^2-2ax-1}{2x}$.

令 $f'(x)=0$,得 $-4x^2-2ax-1=0$,记 $\Delta=4a^2-16$, …… 6 分

若 $\Delta\leqslant 0$,即 $-2\leqslant a<0$ 时, $f'(x)\leqslant 0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上单调递减; $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上无极值点;

若 $\Delta>0$,即 $a<-2$ 时,则由 $f'(x)=0$ 得 $x_3=\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{4}, x_4=\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{4}$.

因为 $\sqrt{a^2-4}<\sqrt{a^2}=-a$,所以 $0<x_3<x_4<-a$, …… 7 分

所以当 $x\in(0,x_3)$ 时, $f'(x)<0$;当 $x\in(x_3,x_4)$ 时, $f'(x)>0$;当 $x\in(x_4,-a)$ 时, $f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_3)$ 上单调递减,在 (x_3,x_4) 上单调递增;在 $(x_4,-a)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上的极小值点为 $\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{4}$,极大值点为 $\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{4}$. …… 8 分

②当 $x\geqslant -a$ 时, $f'(x)=\frac{4x^2+2ax-1}{2x}$,令 $f'(x)=0$,得 $x_1=\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{4}, x_2=\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{4}<-a$(舍去).

若 $\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{4}\leqslant -a$,即 $a\leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$,则当 $x\in[-a,+\infty)$ 时, $f'(x)\geqslant 0$,所以 $f(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增; $f(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上无极值点; …… 9 分

若 $\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{4}>-a$,即 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<0$,则当 $x\in(-a,x_1)$ 时, $f'(x)<0$;当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(-a,x_1)$ 上单调递减,在 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上有极小值点 $\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{4}$. …… 10 分

综上所述,当 $a<-2$ 时, $f(x)$ 的极小值点为 $x=\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{4}$ 和 $x=-a$,极大值点为 $x=\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{4}$;

当 $-2\leqslant a\leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $f(x)$ 的极小值点为 $x=-a$;

当 $a>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $f(x)$ 的极小值点为 $x=\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{4}$. …… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。