东莞中学、广州二中、惠州一中、深圳实验、珠海一中、中山纪念中学

2024 届高三第二次六校联考试题

数学

命题人：广州二中 张和发　　　审题人：陈景文　孙晓荣

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合 $A=\{x\in Z\mid \log_2 x<1\}$, $B=\{x\mid x^2-x-2\le 0\}$, 则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 已知 $\sin(\alpha+\pi)=\frac{1}{2}$，则 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. “$x>1$ 且 $y>1$” 是 “$xy>1$ 且 $x+y>2$” 的（　　）

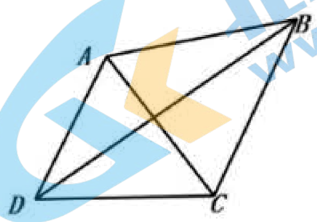
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 如图，A、B 两点在河的同侧，且 A、B 两点均不可到达．现需测 A、B 两点间的距离，测量者在河对岸选定两点 C、D，测得 $CD=\frac{\sqrt{3}}{2}km$，同时在 C、D 两点分别测得 $\angle ADB=\angle CDB=30°$，$\angle ACD=60°$，$\angle ACB=45°$，则 A、B 两点间的距离为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$



5. 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，则 $\beta=$（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{5\pi}{12}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

6. 已知函数 $f(x)=4\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})\sin\omega x+\cos(\pi-2\omega x)$，其中 $\omega>0$．若函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上为增函数，则 ω 的最大值为（　　）

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

7. 若曲线 $y=\ln(x+a)$ 的一条切线为 $y=ex-b$（e 为自然对数的底数），其中 a,b 为正实数，

则 $\frac{1}{ea}+\frac{1}{b}$ 的取值范围是（　　）

A. $[2,e)$　　B. $(e,4]$　　C. $[2,+\infty)$　　D. $[e,+\infty)$

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的函数，且满足 $f(3x-2)$ 为偶函数，$f(2x-1)$ 为奇函数，

则下列说法正确的是（　　）

A. 2 是函数 $f(x)$ 的一个周期　　B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 中心对称　　D. $f(2023)=1$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 ΔABC 中角 A,B 的对边分别为 a,b，则可作为“$a>b$”的充要条件的是（　　）

A. $\sin A>\sin B$　　B. $\cos A<\cos B$

C. $\tan A>\tan B$　　D. $\sin 2A>\sin 2B$

10. 将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，则（　　）

A. 函数 $f(x)+g(x)$ 的图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{8},0\right)$

B. 函数 $f(x)\cdot g(x)$ 是奇函数

C. 函数 $f(x)+g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调递减区间是 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right]$

D. 函数 $f(x)\cdot g(x)$ 的图象的一个对称轴方程为 $x=-\frac{\pi}{8}$

11. 已知函数 $f(x)=|\lg x|-kx-2$，给出下列四个结论中正确结论为（　　）

A. 若 $k=0$，则 $f(x)$ 有两个零点　　B. $\exists k<0$，使得 $f(x)$ 有一个零点

C. $\exists k<0$，使得 $f(x)$ 有三个零点　　D. $\exists k>0$，使得 $f(x)$ 有三个零点

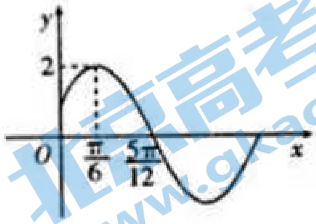
12. 已知函数 $f(x)=e^x+x-2$ 的零点为 x_1，函数 $g(x)=\ln x+x-2$ 的零点为 x_2，则（　　）

A. $x_1+x_2=2$　　B. $2x_1>x_2$　　C. $e^{x_1}+e^{x_2}>2e$　　D. $x_1x_2<\frac{\sqrt{e}}{2}$

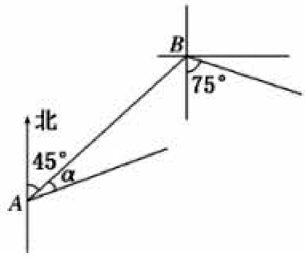
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $f(x)$ 定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,1]$，且 $f(-x)-f(x)=0$，写出一个满足条件的 $f(x)$ 的解析式是________

14. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则函数 $f(x)$ 的解析式为______



15. 在一次海上联合作战演习中，红方一艘侦察艇发现在北偏东 $45°$ 方向，相距 12 公里的水面上，有蓝方一艘小艇正以每小时 10 公里的速度沿南偏东 $75°$ 方向前进，若侦察艇以每小时 14 公里的速度，沿北偏东 $45°+\alpha$ 方向拦截蓝方的小艇．若要在最短的时间内拦截住，则红方侦察艇所需的时间为______小时，角 α 的正弦值为______．（对一个得 3 分，全对得 5 分）



16. 若存在两个正实数 x,y 使等式 $2x+m(y-2ex)(\ln y-\ln x)=0$ 成立，（其中 $e=2.71828\ldots$）则实数 m 的取值范围是________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. （本小题 10 分）

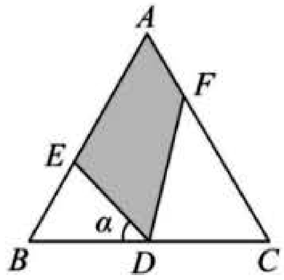
已知 ΔABC 中角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，满足 $\dfrac{c}{a}\cos B+\dfrac{b}{a}\cos C=3\cos C$．

（1）求 $\sin C$ 的值；

（2）若 $a=b+\sqrt{2},c=3\sqrt{2}$，求 ΔABC 的面积．

18. （本小题 12 分）

如图为一块边长为 $2km$ 的等边三角形地块 ABC，现对这块地进行改造，计划从 BC 的中点 D 出发引出两条成 $60°$ 角的线段 DE 和 DF（$\angle EDF=60°$，E,F 分别在边 AB,AC 上），与 AB 和 AC 围成四边形区域 $AEDF$，在该区域内种上花草进行绿化改造，设 $\angle BDE=\alpha$．



（1）当 $\alpha=60°$ 时，求花草绿化区域 $AEDF$ 的面积；

（2）求花草绿化区域 $AEDF$ 的面积 $S(\alpha)$ 的取值范围．

19.（本小题 12 分）

已知 A 为 ΔABC 的内角，函数 $f(x)=\cos(\frac{3\pi}{2}+x)\cdot\sin(A-x)$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

（1）求 $\angle A$；

（2）设 $g(x)=2(f(x)+\frac{1}{4})$，且 $m<0$，若方程 $4[g(x)]^2-m[g(x)]+1=0$ 在 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ 内有两个不同的解，求实数 m 取值范围.

20.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的零点的个数；

（2）证明：当 $a>0$ 时 $f(x)\geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

21.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x\ln(1+x)$

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）设 $g(x)=f'(x)$，讨论函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性；

（3）证明：对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$，有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$.

22.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=xe^{ax}$.

（1）求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值；

（2）已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行，若存在 $x_1,x_2\in R$，$x_1<x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，证明：$x_1e^{x_2}>e$.