

2023届高三年级 11月份大联考

数学试题

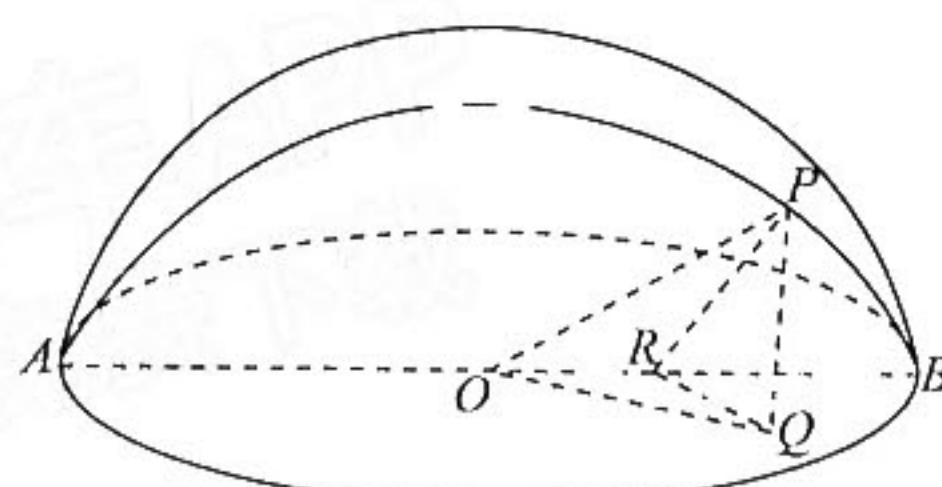
本试卷共4页，22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

- 答题前，先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
- 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
- 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
- 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

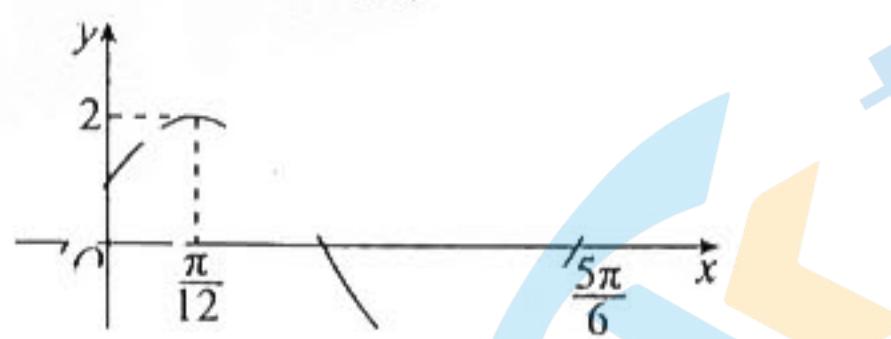
- 已知复数 z 满足 $z(2-i)=i$ ，则 $|5z-i| =$
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{2}$
- 已知全集 $U=\mathbb{R}$ ，集合 $A=\{x|\lg(x+2)\leq 0\}$ ， $B=\{y|y=\sqrt{x}-\sqrt{2}\}$ ， $a \in A \cap B$ ，则 a 的值可以是
A. -2 B. -1 C. 0 D. 1
- 命题“ $\forall x \in [-2, -1], x^2 - a > 2$ ”为假命题的一个充分不必要条件是
A. $a \leq 1$ B. $a < 2$ C. $a \geq 1$ D. $a \leq 2$
- “太空教师”的神舟十三号航天员翟志刚、王亚平、叶光富出现在画面中，“天宫课堂”第一课在中国空间站正式开讲。此次太空授课通过为同学们呈现多种精彩的实验和现象，激发了同学们的好奇心，促使他们去观察这些现象，进而去思考、去探索，把科学思维的种子种进心里。某校为了解同学们对“天宫课堂”这种授课模式的兴趣，决定利用分层抽样的方法从高二、高三学生中选取90人进行调查，已知该校高二年级学生有1800人，高三年级学生有1500人，则抽取的学生中，高三年级有
A. 20人 B. 30人 C. 40人 D. 50人
- 函数 $f(x)=x\ln(x+2)$ 的图象在点(-1, 0)处的切线与直线 $(a-2)x+y-2=0$ 垂直，则实数 a 的值为
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
- 某海外实验室在研究某种人类细菌的过程中发现，细菌数量 N (单位)与该人类细菌被植入培养的时间 t (单位：小时)近似满足函数关系 $Y(t)=N_0 e^{-\frac{t}{24}}$ ，其中 N_0 为初始细菌含量。当时间 $t=12$ (单位：小时)，该细菌数量为 $\frac{24\sqrt{e}}{e}$ (单位)，则 $Y(72)=$
A. $12e^{-3}$ B. $24e^{-3}$ C. $36e^{-3}$ D. $38e^{-3}$
- 若正实数 a, b, c 满足 $a=e^{\sqrt{0.1}}$ ， $\log_{0.5}b=\frac{1}{5}$ ， $c^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$ ，则
A. $c^a > b^a$ B. $\log_a a < \log_b b$ C. $\log_a b > \log_b c$ D. $c^{a-1} < b^{c-1}$
- 如图， AB 是半球的直径， O 为球心， $AB=2$ ， P 为此半球大圆弧上的任意一点(异于 A, B)， P 在水平大圆面 AOB 内的射影为 Q ，过 Q 作 $QR \perp AB$ 于 R ，连接 PR, OP ，若二面角 $P-AB-Q$ 为 $\frac{\pi}{3}$ ，则三棱锥 $P-OQR$ 体积的最大值为



- A. $\frac{\sqrt{3}}{64}$ B. $\frac{1}{64}$ C. $\frac{1}{36}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{96}$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象如图所示, 则



- A. 函数解析式 $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
 B. 将函数 $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度可得函数 $f(x)$ 的图象
 C. 直线 $x = -\frac{11}{12}\pi$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴
 D. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 上的最大值为 2

10. 给出下列命题, 其中正确的命题是

- A. 已知 $P(B|A) = \frac{1}{4}, P(AB) = \frac{1}{8}$, 则 $P(A) = \frac{1}{4}$
 B. 随机变量 $X \sim N(2, 3^2)$, 若 $X = \frac{1}{3}Y - 2$, 则 $E(Y) = 12, D(Y) = 81$
 C. 以模型 $y = (c-1)e^{2kx}$ 拟合一组数据时, 为了求出回归方程, 设 $z = \ln y$, 将其变换后得到线性方程 $z = \frac{1}{2}x + 2$, 则 c, k 的值分别是 $e^2 - 1$ 和 0.2
 D. 直线 $l_1: (2-a)x + 3y + 2a = 0, l_2: x - ay - 6 = 0$, 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $a = -1$

11. 若函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 为偶函数, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, 则

- A. $f(0) = 0$
 B. $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减
 C. $f(2\pi + x)$ 为奇函数
 D. $f\left(\frac{101\pi}{2}\right) = 1$

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 短轴长为 $2\sqrt{3}$, P 为 C 上任意一点, F_1, F_2 分别为 C 的左、右焦点, 过点 F_1 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 则下列说法正确的是

- A. 存在点 P , 使得 PF_1 的长度为 $\frac{1}{2}$
 B. $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$
 C. C 上存在 4 个不同的点 P , 使得 $\triangle PF_1F_2$ 是直角三角形
 D. $\triangle PF_1F_2$ 内切圆半径的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $b \neq 0, |a| = 2, (2a - b) \perp b$, 则 $|a - b| =$ _____.

14. $(x - 2y)(2x - y)^6$ 的展开式中, 含 $x^4 y^3$ 项的系数为 _____.

15. 某石油勘探队在某海湾发现两口大型油气井, 海岸线近似于双曲线 $C: \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ 的右支,

- 现测得两口油气井的坐标位置分别为 $F(10, 0), Q(30, 9)$, 为了运输方便, 计划在海岸线上建设一个港口, 则港口到两油气井距离之和的最小值为 _____.

16. 在 $\text{Rt } \triangle ABC$ 中, 斜边为 AB , 点 D 在边 BC 上, 设 $\angle ADC = \alpha, \angle BAD = \beta$, 若 $\sin B = \frac{\sin(\alpha - B)}{\sin \alpha}$, 则 $\frac{AB^2 + AD^2}{AD \cdot AB}$ 用 β 表示为 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。
17.（本小题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意正整数 n ，有 $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} = n$.

- 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18.（本小题满分 12 分）

请从下面三个条件中任选一个，补充在下面的横线上，并解答。

① $(a+c)(\sin A - \sin C) + (b-a)\sin B = 0$; ② $2\sqrt{3}\sin C \cos C = 1 + 2\cos^2 C$;

若 ③ $2\sin B - \sin A = 2\sin C \cos A$. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c

（1）求角 C ；

（2）若 $c=4$ ，求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围。

19.（本小题满分 12 分）

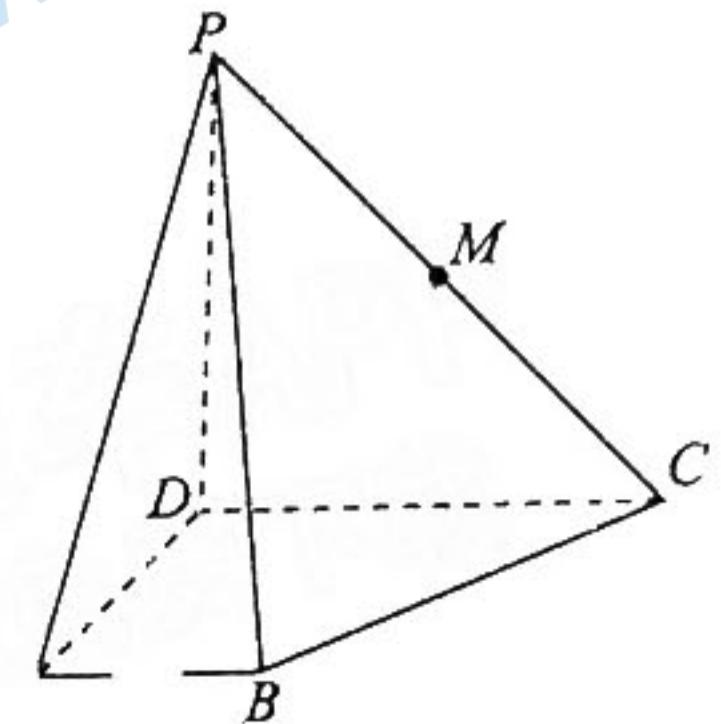
某市宣传部门开展了线上新冠肺炎疫情防控现状及防控知识竞赛，现从全市的参与者中随机抽取了 1 000 名幸运者的成绩进行分析，把他们的得分（满分 100 分）分成以下 7 组： $[30, 40), [40, 50), [50, 60), [60, 70), [70, 80), [80, 90), [90, 100]$ ，统计得各组的频率之比为 $1:6:8:10:9:4:2$. 同一组数据用该区间中点值代替。

（1）求这 1 000 名幸运者成绩的第 75 百分位数和平均值 μ （结果保留整数）；

方案：得分不超过 79 分的可获得 1 次抽奖机会，得分超过 79 分不超过 93 分的可获得 2 次抽奖机会，超过 93 分的有 3 次抽奖机会，试估计任意一名幸运者获得抽奖次数的数学期望。

参考数据： $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

20. (本小题满分 12 分)
 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD=CD=2$, $AD=AB=1$, $AB \perp DA$, $AB \perp BC$.
 (1)求证:平面 $PAD \perp$ 平面 PCD ;
 (2)设 M 是棱 PC 上的点,若二面角 $M-BD-A$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$,试求直线 BC 与平面 BDM 所成角的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)
 已知 O 为坐标原点, $Q(m, 2)$ 位于抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上,且到抛物线的准线的距离为 2.
 (1)求抛物线 C 的方程;
 (2)已知点 $A(-2, 4)$,过抛物线焦点的直线 l 交 C 于 M, N 两点,当 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 取最小值时,求 $\triangle AMN$ 的面积.

22. (本小题满分 12 分)
 已知函数 $f(x) = x^2 - a \ln x$, $g(x) = x^2 - \frac{e^x}{x}$.
 (1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
 (2)证明:当 $a \in \left(0, \frac{e^2}{2}\right]$ 时, $g(x) < f(x)$ 恒成立.

2023 届高三年级 11 月份大联考

数学参考答案及评分细则

一、单选题

1. A 【解析】根据已知条件可知: $z(2-i)=i$, 故有: $z=\frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{-1+2i}{5}$, 所以 $|5z-i|=|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$. 故选 A.

2. B 【解析】 $\because \lg(x+2) \leqslant 0$, $\therefore 0 < x+2 \leqslant 1$, $\therefore -2 < x \leqslant -1$. $\therefore A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant -1\}$, $B = \{y \mid y = \sqrt{x} - \sqrt{2}\} = \{y \mid y \geqslant -\sqrt{2}\}$, 所以 $A \cap B = \{x \mid -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant -1\}$, 因为 $a \in A \cap B$, 结合选项可得: $-1 \in A \cap B$. 故选 B.

3. C 【解析】由命题“ $\forall x \in [-2, -1], x^2 - a > 2$ ”为假命题, 得该命题的否定: “ $\exists x \in [-2, -1], x^2 - a \leqslant 2$ ”为真命题, 得 $a + 2 \geqslant (x^2)_{\min} = 1$, 所以 $a \geqslant -1$, 所以 $a \geqslant 1$ 为该命题的一个充分不必要条件. 故选 C.

4. D 【解析】由题意可知该校高二年级学生有 1 200 人, 高三年级学生有 1 500 人, 则高二年级与高三年级的学生人数比为 4:5, 根据分层抽样的特征可知, 抽取的学生中, 高三年级有 $90 \times \frac{5}{4+5} = 50$ 人. 故选 D.

5. C 【解析】对函数 $f(x) = x \ln(x+2)$ 求导, 得: $f'(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$, 所以 $f'(-1) = \ln 1 + \frac{-1}{1} = -1$, 即函数 $f(x) = x \ln(x+2)$ 的图象在点 $(-1, 0)$ 处的切线斜率为 -1 , 因为切线与直线 $(a-2)x+y-2=0$ 垂直, 所以 $(2-a) \times (-1) = -1$, $\therefore a = 1$. 故选 C.

6. B 【解析】因为 $Y(t) = N_0 e^{-\frac{t}{24}}$, $t=12$ 时, 该细菌数

量为 $\frac{24\sqrt{e}}{e}$, 故有: $Y(12) = e^{-\frac{12}{24}} \cdot N_0 = \frac{24\sqrt{e}}{e} = 24e^{-\frac{1}{2}}$,

所以 $N_0 = 24$, 故 $Y(72) = 24 \times e^{-\frac{72}{24}} = 24e^{-3}$. 故选 B.

7. D 【解析】 $\because a = e^{\sqrt{0.1}} > e^0 = 1$, $\therefore a > 1$, $\therefore \log_{0.5} 1 = 0$

$< \log_{0.5} b = \frac{1}{5} < 1 = \log_{0.5} 0.5$, $\therefore 0.5 < b < 1$, $\therefore c^{\frac{2}{3}} =$

$\frac{1}{4}$, $\therefore c = \frac{1}{8}$, $\therefore 0 < c < 0.4 < b < 1 < a$, $\therefore c^a < b^a$, $\log_c a$

$> \log_b a$, $\log_a b < 0 < \log_c c$, $\therefore A, B, C$ 项错误; $\because a-1 >$

0 , $c-1 < 0$, $\therefore 0 < c^{a-1} < 1 < b^{c-1}$, D 项正确. 故选 D.

8. C 【解析】 $\because PQ \perp$ 平面 ABQ , $\therefore PQ \perp AB$, $\because QR \perp$

AB , $PQ \cap QR = Q$, $\therefore AB \perp$ 平面 PQR , $\therefore AB \perp PR$,

$\therefore \angle PRQ$ 为二面角 $P-AB-Q$ 的平面角, 即 $\angle PRQ$

$= \frac{\pi}{3}$, 设 $PR = 2a$, $PQ = \sqrt{3}a$, $QR = a$, 在 $\text{Rt}\triangle OPQ$

中, $OP = 1$, $OQ = \sqrt{1-3a^2}$. 在 $\text{Rt}\triangle ORQ$ 中, $OR =$

$\sqrt{1-4a^2}$, $V_{P-OQR} = \frac{1}{3} \times \sqrt{3}a \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{1-4a^2} \times a \right)$

$= \frac{\sqrt{3}a^2}{6} \sqrt{1-4a^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{a^2 \cdot a^2 \cdot (1-4a^2)} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times$

$\frac{1}{2} \sqrt{2a^2 \cdot 2a^2 \cdot (1-4a^2)} = \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{2a^2 \cdot 2a^2 \cdot (1-4a^2)}$.

而 $2a^2 \cdot 2a^2 \cdot (1-4a^2) \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, 当且仅当 $2a^2$

$= 1-4a^2$, 即 $a = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 即 $PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 取得最大值. 此

时三棱锥 $P-OQR$ 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{36}$.

故选 C.

二、多选题

9. ABC 【解析】由题图知: 函数 $f(x)$ 的最小正周期 T

$=\frac{4}{3} \times \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right) = \pi$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. $A=2$, 所以函

数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$. 将点 $(\frac{\pi}{12}, 2)$ 代入解析式中

可得: $2=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)$, 则: $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,

因此 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, 故 A 正确. 选项 B,

将函数 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

长度可得函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 故 B 正

确; 选项 C, $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, 当 $x=-\frac{11\pi}{12}$ 时,

$f(x)=2$, 故 C 正确; 选项 D, 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 时, $2x$

$+ \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, 所以 $f(x) \in [-2, \sqrt{3}]$, 即最大

值为 $\sqrt{3}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

10. BD 【解析】选项 A: 因为 $P(B|A)=\frac{1}{4}$, $P(AB)=$

$\frac{1}{8}$, 所以 $P(A)=\frac{P(AB)}{P(B|A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$, 故不正确; 选

项 B: 随机变量 $X \sim N(2, 3^2)$, 则 $E(X)=2, D(X)=$

9, 若 $X=\frac{1}{3}Y-2$, 则 $Y=3X+6$, 所以 $E(Y)=$

$3E(X)+6=12, D(Y)=9D(X)=9\times 9=81$, 故正

确; 选项 C: 因为 $y=(c-1)e^{2kx}$, 两边取对数, 可得:

$\ln y=\ln[(c-1)e^{2kx}]=\ln(c-1)+\ln e^{2kx}=\ln(c-1)+2kx$, 令 $z=\ln y$, 可得: $z=\ln(c-1)+2kx$, 又因为

$z=\frac{1}{2}x+2$, 故有: $\ln(c-1)=2, 2k=\frac{1}{2}$, 所以 $c=e^2$

$+1, k=\frac{1}{4}$, 故不正确; 选项 D: 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $a(a-2)$

$-1\times 3=0$, 解得 $a=-1$ 或 $a=3$, 当 $a=3$ 时, l_1 与 l_2 重合; 当 $a=-1$ 时, $l_1 \parallel l_2$, 故 $a=-1$, 故正确. 故选 BD.

11. ACD 【解析】因为函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函

数, 所以 $f(0)=0$, 故 A 正确; $f(x)=\sin x$ 满足定义

在 \mathbf{R} 上的奇函数, $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ 为偶函数, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$,

但在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 故 B 不正确; 因为

$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ 为偶函数, 所以 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$

$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, 所以 $f(x)=f(\pi-x)$, 又 $f(x)=$

$-f(-x)$, 所以 $f(\pi-x)=-f(-x)$, 即 $f(\pi+x)=$

$-f(x)$, 所以 $f(x+2\pi)=f(x)$, 所以 C 正确, 由上

面得周期 $T=2\pi$, 所以 $f\left(\frac{101\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, 所以

D 正确. 故选 ACD.

12. BCD 【解析】由题意得 $\begin{cases} \frac{c}{a}=\frac{1}{2} \\ 2b=2\sqrt{3} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \\ c=1 \end{cases}$.

椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. 选项 A: P 为 C 上任意

一点, 则 $1 \leqslant |PF_1| \leqslant 3$, 故不正确. 选项 B: $\triangle PF_1F_2$

面积为 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2c|y|=c|y|$, 当点 P 落在短

轴端点时, $\triangle PF_1F_2$ 面积最大为 $\sqrt{3}$, 故正确; 选项 C:

点 P 在椭圆上, 则 $|PF_1|+|PF_2|=4, |F_1F_2|=2$,

所以 $\cos \angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2-|F_1F_2|^2-2|PF_1||PF_2|}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{16-4-2|PF_1||PF_2|}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{6}{|PF_1||PF_2|}-1$, 因为

$\frac{6}{|PF_1||PF_2|}-1 > 0$, 故正确.

$|PF_1| |PF_2| \leq \left(\frac{|PF_1| + |PF_2|}{2}\right)^2 = 4$, 当且仅当

$|PF_1| = |PF_2|$ 时等号成立, 所以 $\cos \angle F_1 PF_2 =$

$\frac{6}{|PF_1| |PF_2|} - 1 \geq \frac{1}{2}$, 所以 $\angle F_1 PF_2$ 最大为 $\frac{\pi}{3}$. 故

不存在点 P , 使 $\angle F_1 PF_2 = \frac{\pi}{2}$. 当 PF_2 或 PF_1 垂直

于 x 轴时, 有四个不同的直角三角形, 故正确; 选项

D: 设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 r , $\triangle PF_1F_2$ 的面积

$= \frac{1}{2}(|F_1F_2| + |PF_1| + |PF_2|) \times r = (a+c) \times r =$

$3r$, 若 r 最大, 需 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大, 选项 B 可知,

当点 P 落在短轴端点时, $\triangle PF_1F_2$ 面积最大, 为 $\sqrt{3}$,

解得此时 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故正确. 故选 BCD.

三、填空题

13. 2 【解析】由题可得 $2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - |\mathbf{b}|^2 = 0$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 = 4$, 即 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 2$. 故答案为 2.

14. -640 【解析】 $(x-2y)(2x-y)^6$ 的展开式中, 含 x^4y^3 项的系数为 $C_6^3 2^3 \times (-1)^3 - 2 \times C_6^2 2^4 \times (-1)^2 = -640$. 故答案为 -640.

15. 25 【解析】由双曲线 $C: \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; 可知 $c^2 = 64 + 36 = 100$, 故该双曲线的两个焦点分别为 $(10, 0)$ 和 $(-10, 0)$, 则 $F(10, 0)$ 恰好为双曲线 C 的右焦点, 设 $E(-10, 0)$ 为双曲线 C 的左焦点, 连接 EQ 与双曲线 C 右支交于点 P , 则点 P 即为港口所在位置. 由双曲线的定义可得, $|PE| - |PF| = 2a = 16$, 即 $|PF| = |PE| - 16$, 则 $|PQ| + |PF| = |PQ| + |PE| - 16 \geq |EQ| - 16$. 当且仅当 Q, P, E 三点共线时, 等号成立, 此时港口到两油气井的距离之和最小. 因为

$E(-10, 0), Q(30, 9)$, 所以 $|EQ| = \sqrt{40^2 + 9^2} = \sqrt{1681} = 41$, 此时 $|PQ| + |PF| = 41 - 16 = 25$. 故答案为 25.

16. $\sin \beta + 2\cos \beta$ 【解析】因为 $\alpha - B = \beta$, $\sin B = \frac{\sin(\alpha - B)}{\sin \alpha}$, 所以 $\sin B = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$. 在 $\triangle ABD$ 中, $\frac{BD}{\sin \beta} = \frac{AD}{\sin B}$, 所以 $AD \sin \beta = BD \sin B$, 所以 $AD \sin \alpha = BD$. 在 $\triangle ACD$ 中, $AC = AD \sin \alpha$, 所以 $AC = BD$, 因为 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AC, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD \sin \beta$, 所以 $\frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2}AB \cdot AD \sin \beta$, 即 $BD \cdot AC = AB \cdot AD \sin \beta$, 所以 $BD^2 = AB \cdot AD \sin \beta$, 即 $\sin \beta = \frac{BD^2}{AB \cdot AD}$, 在 $\triangle ABD$ 中, $\cos \beta = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{1}{2} \left(\frac{AB^2 + AD^2}{AB \cdot AD} - \frac{BD^2}{AB \cdot AD} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{AB^2 + AD^2}{AB \cdot AD} - \sin \beta \right)$, 所以 $\frac{AB^2 + AD^2}{AB \cdot AD} = \sin \beta + 2\cos \beta$. 故答案为 $\sin \beta + 2\cos \beta$.

四、解答题

17. 解:(1)当 $n=1$ 时,求得 $a_1=1$,

当 $n \geq 2$ 时, $\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}}\right) - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right) = \frac{a_n}{2^{n-1}} = n - (n-1) = 1$.

得 $\frac{a_n}{2^{n-1}} = 1$, 即 $a_n = 2^{n-1}$, (3 分)

经验证可知: $a_1=1$ 也满足上式, (4 分)

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1}$. (5 分)

(2)根据第(1)问有: $a_n = 2^{n-1}$, 因为数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 则有:

$T_n = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \cdots + n \times 2^{n-1}$, (6 分)

两边同乘以 2 可得：

$2T_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$, 两式相减得：

$$-T_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n = \frac{1-2^n}{1-2}$$

$$-n \cdot 2^n = (1-n)2^n - 1, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{从而有: } T_n = 1 + (n-1) \cdot 2^n. \quad (10 \text{ 分})$$

18. 解：(1) 选①, 由 $(a+c)(\sin A - \sin C) + (b-a)\sin B = 0$ 得：

$$(a+c)(a-c) + b(b-a) = 0, \\ \text{即 } a^2 + b^2 - c^2 = ab, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}, \quad (4 \text{ 分})$$

因为 $0 < C < \pi$, 故角 $C = \frac{\pi}{3}$; $\quad (5 \text{ 分})$

选②, 由 $2\sqrt{3}\sin C \cos C = 1 + 2\cos^2 C$ 得：

$$2\sqrt{3}\sin C \cos C = 2 + \cos 2C, \\ -\cos 2C + \sqrt{3}\sin 2C = 2\sin\left(2C - \frac{\pi}{6}\right) = 2, \\ \text{所以 } \sin\left(2C - \frac{\pi}{6}\right) = 1. \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } 0 < C < \pi, -\frac{\pi}{6} < 2C - \frac{\pi}{6} < \frac{11\pi}{6}.$$

$$\text{所以 } 2C - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{解得: } C = \frac{\pi}{3}; \quad (5 \text{ 分})$$

选③, 因为 $2\sin B - \sin A = 2\sin C \cos A$,

又因为 $\sin B = \sin[\pi - (A+C)] = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \sin C \cos A$,

所以 $2(\sin C \cos A + \cos C \sin A) - \sin A = 2\sin C \cos A$,

$$\therefore 2\cos C \sin A - \sin A = 0, \quad (3 \text{ 分})$$

$\because 0 < A < \pi, \therefore \sin A \neq 0$, $\quad (4 \text{ 分})$

$$\therefore \cos C = \frac{1}{2},$$

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$. $\quad (5 \text{ 分})$

(2) 根据(1)可知: $C = \frac{\pi}{3}$, 又因为 $c = 4$,

由余弦定理得: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a+b)^2 - 3ab = 16$, $\quad (6 \text{ 分})$

$$\text{所以 } 3ab = (a+b)^2 - 16 \leqslant 3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2. \quad (9 \text{ 分})$$

即 $a+b \leqslant 8$, 当且仅当 $a=b=4$ 时取得等号. $\quad (10 \text{ 分})$

又因为根据三角形的三边关系有: $a+b > c = 4$.

所以 $8 < a+b \leqslant 12$. $\quad (11 \text{ 分})$

所以 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(8, 12]$. $\quad (12 \text{ 分})$

19. 解: (1) 这 1 000 名幸运者成绩的第 75 百分位数为 x , 则

$$\text{所以 } \frac{1+6+8+10}{40} + (x-70) \times \frac{9}{40} = 0.75, \text{ 解得 } x \approx 71 \text{ (分)}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\mu = \frac{35 \times 25 + 45 \times 150 + 55 \times 200 + 65 \times 250 + 75 \times 225 + 85 \times 100 + 95 \times 50}{1000} \\ = 65 \text{ (分)},$$

所以这 1 000 名幸运者成绩的第 75 百分位数约为 71 分, 平均值为 65 分. $\quad (5 \text{ 分})$

(2) 设随机变量 Y 表示任意一名幸运者的抽奖次数, 则 Y 的可能取值为 1, 2, 3.

由已知及(1)得, $X \sim N(65, 14^2)$, $\quad (6 \text{ 分})$

$$P(Y=1) = P(X \leqslant 79) = P(X \leqslant \mu + \sigma) \approx \frac{1}{2} + \frac{0.6827}{2} = 0.84135,$$

$$P(Y=2)=P(79 < X \leq 93)=P(\mu + \sigma < X \leq \mu + 2\sigma)$$

$$\approx \frac{0.9545 - 0.6827}{2} = 0.1359.$$

$$P(Y=3)=P(X>93)=P(X>\mu+2\sigma)\approx 1-0.84135-0.1359=0.02275. \quad (9 \text{ 分})$$

其分布列为

Y	1	2	3
P	0.84135	0.1359	0.02275

(10 分)

$$\text{所以 } E(Y)=1 \times 0.84135 + 2 \times 0.1359 + 3 \times 0.02275 = 1.1814,$$

所以可以估计任意一名幸运者获得抽奖次数的数学期望为 1.1814 次. \quad (12 分)

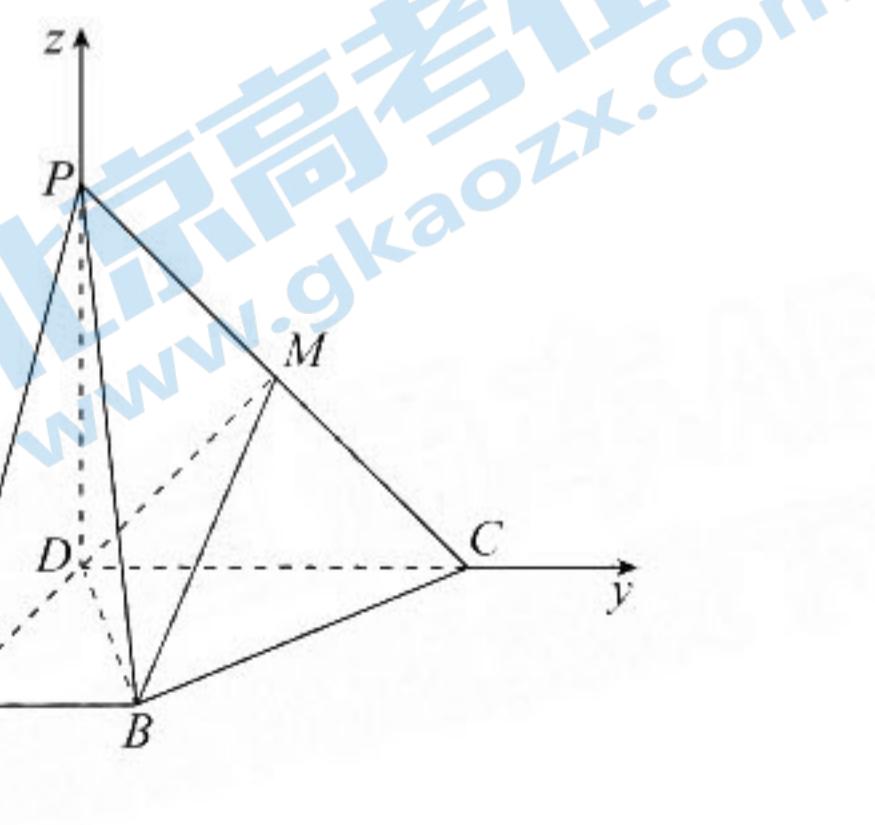
20. 证明: (1) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\because PD \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore PD \perp AD$. \quad (1 \text{ 分})

$\because AB \perp DA, AB \parallel CD \therefore CD \perp DA$; \quad (2 分)

又 $\because CD \cap PD=D$; $\therefore AD \perp$ 面 PCD ; \quad (3 分)

又 $\because AD \subset$ 面 PAD ; \therefore 面 $PAD \perp$ 面 PCD . \quad (5 分)

(2) 由(1)得 DA, DP, DC 两两垂直, 所以以 D 为原点, 以 DA, DC, DP 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示空间直角坐标系 $Dxyz$,



则依题意有: $D(0,0,0), A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,2,0), P(0,0,2)$, $\overrightarrow{PC}=(0,2,-2)$

由 $\overrightarrow{PM}=\lambda \overrightarrow{PC}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 得点 $M(0,2\lambda,2-2\lambda)$, \quad (6 分)

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 故平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{DP}=(0,0,2)$. \quad (7 分)

设 $n=(x,y,z)$ 为平面 BDM 的法向量, 又因为 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0), \overrightarrow{DM}=(0,2\lambda,2-2\lambda)$.

$$\text{所以} \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{DB}=0 \\ n \cdot \overrightarrow{DM}=0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x+y=0 \\ 2\lambda y+(2-2\lambda)z=0 \end{cases}, \text{令 } x=1,$$

$$\text{则 } y=-1, z=\frac{\lambda}{1-\lambda}, \therefore n=\left(1, -1, \frac{\lambda}{1-\lambda}\right), \quad (8 \text{ 分})$$

\therefore 二面角 $M-BD-A$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore \left| -\frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \left| \frac{n \cdot \overrightarrow{DP}}{|n| |\overrightarrow{DP}|} \right| = \left| \frac{\frac{\lambda}{1-\lambda}}{\sqrt{2+\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2}} \right|, \text{解得 } \lambda=\frac{1}{2}, \quad (10 \text{ 分})$$

故有 $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$, 此时点 M 为线段 PC 的中点.

设直线 BC 与平面 BDM 所成的角为 θ , 平面 BDM 的一个法向量为 $n=(1, -1, 1)$; 又因为 $\overrightarrow{BC}=(-1, 1, 0)$, 所以

$$\sin \theta = \frac{|n \cdot \overrightarrow{BC}|}{|n| |\overrightarrow{BC}|} = \left| \frac{-2}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

即直线 BC 与平面 BDM 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(12 分)

21. 解:(1) 根据题意可得 $m+\frac{p}{2}=2$, 又 $2^2=2pm$,

(1 分)

解得 $m=1, p=2$,

故所求抛物线 C 方程 $y^2=4x$. (4 分)

(2) 设点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为 $(1, 0)$.

当直线 l 的斜率等于 0 时, 不符合题意; 当直线 l 的斜率不等于 0 时, 设过抛物线焦点的直线 l 的方程为: $x=ty+1$.

$$\text{由 } \begin{cases} y^2=4x \\ x=ty+1 \end{cases}, \text{消去 } x \text{ 得: } y^2-4ty-4=0, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\Delta=16t^2+16>0, \text{得 } t \in \mathbb{R},$$

$$\text{由韦达定理得 } y_1+y_2=4t, y_1y_2=-4, \quad (6 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} &= (x_1+2)(x_2+2)+(y_1-4)(y_2-4) \\ &= x_1x_2+2(x_1+x_2)+4+y_1y_2-4(y_1+y_2)+16 \\ &= \frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} + 2\left(\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4}\right) + 4 + y_1y_2 - 4(y_1+y_2) \\ &\quad + 16 \\ &= \frac{(y_1y_2)^2}{16} + \frac{1}{2}[(y_1+y_2)^2 - 2y_1y_2] + 4 + y_1y_2 - 4(y_1+y_2) \\ &\quad + 16 \\ &= 1 + \frac{1}{2}[(4t)^2 + 8] + 4 - 4 - 16t + 16 = 8t^2 - 16t + 21 = 8(t-1)^2 + 13. \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

所以当 $t=1$ 时, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 取得最小值为 13,

此时直线 l 的方程为 $x-y-1=0$. (9 分)

根据弦长公式有:

$$|MN|=\sqrt{1+t^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{16+16}=8; \quad (10 \text{ 分})$$

点 $A(-2, 4)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|-2-4-1|}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}$

$$\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}; \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{故 } \triangle AMN \text{ 面积为 } S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}|MN|d=\frac{1}{2}\times 8\times$$

$$\frac{7\sqrt{2}}{2}=14\sqrt{2}. \quad (12 \text{ 分})$$

22. 解:(1) 根据已知条件有: $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$,

$$f'(x)=2x-\frac{a}{x}=\frac{2\left(x^2-\frac{a}{2}\right)}{x}, \quad (1 \text{ 分})$$

① $a \leqslant 0$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$$\text{② } a>0 \text{ 时, } f'(x)=\frac{2\left(x+\sqrt{\frac{a}{2}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)}{x},$$

令 $f'(x)>0$, 解得 $x>\sqrt{\frac{a}{2}}$; 令 $f'(x)<0$, 解得 $0<$

$$x<\sqrt{\frac{a}{2}},$$

故 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$ 递减, 在 $(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 递增,

综上: $a \leqslant 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{2a}}{2})$ 递减, 在 $(\frac{\sqrt{2a}}{2}, +\infty)$ 递增; (5 分)

(2) 要证 $f(x)>g(x)$,

即证 $e^x>ax\ln x, a \in (0, \frac{e^2}{2}], x \in (0, +\infty)$,

① 当 $0 < x \leqslant 1$ 时, $e^x > 1, ax\ln x \leqslant 0$, 该不等式恒成立;

② 当 $x > 1$ 时, $x\ln x > 0$, 结合 $a \in (0, \frac{e^2}{2}]$, 得 $0 <$

$$ax\ln x \leqslant \frac{1}{2}e^2x\ln x. \quad (6 \text{ 分})$$

只需证明: $e^x > \frac{1}{2}e^2x\ln x (x > 1)$,

证法一: 即证 $\frac{2e^{x-2}}{x}-\ln x > 0 (x > 1)$, (7 分)

$$\text{令 } F(x)=\frac{2e^{x-2}}{x}-\ln x, F'(x)=\frac{2e^{x-2}(x-1)-x}{x^2},$$

$$\text{令 } h(x)=2e^{x-2}(x-1)-x, \text{ 则 } h'(x)=2xe^{x-2}-1,$$

令 $m(x) = 2xe^{x-2} - 1$, 则 $m'(x) = (2x+2)e^{x-2} > 0$

在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $h'(x) = 2xe^{x-2} - 1$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. (8 分)

又 $h'(1) = \frac{2}{e} - 1 < 0, h'(2) = 3 > 0$, 所以存在 $x_0 \in$

使得 $h'(x_0) = 0$,

$h(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单
调递增, (9 分)

$h(1) = -1 < 0, h(x_0) = 2e^{x_0-2}(x_0-1) - x_0 = 1 - \frac{1}{x_0} - x_0 < 0, h(2) = 0, h(3) = 4e - 3 > 0$,

所以当 $x \in (1, 2)$ 时, $F'(x) < 0$; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时,
 $F'(x) > 0$,

即函数 $F(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单
调递增. (11 分)

所以 $F(x) \geq F(2) = 1 - \ln 2 > 0$, 问题得证.

即当 $a \in \left(0, \frac{e^2}{2}\right]$ 时, $f(x) > g(x)$ 恒成立. (12 分)

证法二: 即证 $\frac{e^x}{x^2} > \frac{e^2}{2} \cdot \frac{\ln x}{x}$ ($x > 1$), 令 $u(x) = \frac{e^2}{2} \cdot$

$\frac{\ln x}{x}$ ($x > 1$), (7 分)

$$\text{则 } u'(x) = \frac{e^2}{2} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^2}{2} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

则有 $u(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调
递减, 可知 $u(x)_{\max} = \frac{\ln e}{e} \cdot \frac{e^2}{2} = \frac{e}{2}$, (9 分)

$$\text{设 } m(x) = \frac{e^x}{x^2}, \therefore m(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} =$$

$$\frac{e^x(x-2)}{x^3}, \therefore m(x) \text{ 在 } (1, 2) \text{ 上单调递减, 在 } (2, +\infty)$$

上单调递增, \therefore 可知 $m(x) \geq m(2) = \frac{e^2}{4} = \frac{e}{2} \cdot \frac{e}{2} >$

$$\frac{e}{2} = u(x)_{\max}, \text{ 即 } m(x)_{\min} > u(x)_{\max}, \quad (11 \text{ 分})$$

有 $m(x) > u(x)$ 对 $\forall x > 1$ 成立, 即当 $x > 1$ 时, $\frac{e^x}{x^2} >$

$$\frac{e^2}{2} \cdot \frac{\ln x}{x} \text{ 恒成立. 综上所述, 当 } a \in \left(0, \frac{e^2}{2}\right] \text{ 时, } f(x)$$

$> g(x)$ 恒成立. (12 分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的设计理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力。

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微博账号: bjgkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018