2023北京北师大二附中高一（下）期中
数　学

班级：______　姓名：_____　学号：____

一、选择题（共 10 小题；共 40 分）

1. $135°$ 化为弧度等于（　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

2. 已知向量 $\vec{a}=(2,0)$，$\vec{a}-\vec{b}=(3,1)$，则下列结论正确的是（　）

A. $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$　　B. $\vec{a}\parallel\vec{b}$

C. $\vec{b}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$　　D. $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$

3. 已知向量 $\vec{a}=(1,m-1)$，$\vec{b}=(m,2)$，则“$m=2$”是“$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知 $\sin\alpha>\sin\beta$，那么下列命题成立的是（　）

A. 若 α,β 是第一象限角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$

B. 若 α,β 是第二象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

C. 若 α,β 是第三象限角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$

D. 若 α,β 是第四象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

5. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{5}\right)$，若对任意的实数 x，总有 $f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$，则 $|x_1-x_2|$ 的最小值是（　）

A. 2　　B. 4　　C. π　　D. 2π

6. 设函数 $f(x)=|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)|\,(x\in\mathbf{Z})$，则 $f(x)$（　）

A. 在区间 $\left[\frac{2}{3}\pi,\frac{7}{6}\pi\right]$ 上是增函数

B. 在区间 $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ 上是减函数

C. 在区间 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数

D. 在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上是减函数

7. 设 α 是第二象限角，则 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在(　)

A.第一、二、三象限

B.第二、三、四象限

C.第一、三、四象限

D.第一、二、四象限

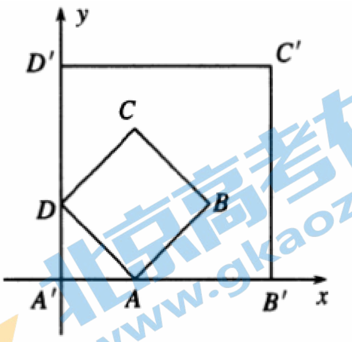
8. 若 $\cos\alpha+2\sin\alpha=\sqrt{5}$，则 $\tan\alpha=$（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. -2

9. 我国古代数学家刘徽在《九章算术注》中提出割圆术：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣”，即通过圆内接正多边形细割圆，并使正多边形的面积无限接近圆的面积，进而来求得较为精确的圆周率．如果用圆的内接正 n 边形逼近圆，算得圆周率的近似值记为 π_n，那么用圆的内接正 $2n$ 边形逼近圆，算得圆周率的近似值 π_{2n} 可表示成（　　）

A. $\dfrac{\pi_n}{\sin\dfrac{360^\circ}{n}}$　　B. $\dfrac{\pi_n}{\cos\dfrac{360^\circ}{n}}$　　C. $\dfrac{\pi_n}{\cos\dfrac{180^\circ}{n}}$　　D. $\dfrac{\pi_n}{\cos\dfrac{90^\circ}{n}}$

10. 如图所示，边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A，D 分别在边长为 2 的正方形 $A'B'C'D'$ 的边 $A'B'$ 和 $A'D'$ 上移动，则 $\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{A'C}$ 的最大值是（　　）



A. 4　　B. $1+\sqrt{2}$　　C. π　　D. 2

二、填空题（共 5 小题；共 25 分）

11. 已知 600° 角的终边上有一点 $P(a,-3)$，则 a 的值为_______.

12. 已知 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-8$，$|\vec{a}||\vec{b}|=16$，则 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 夹角的大小为_______.

13. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{2}{5}$，那么 $\tan(\beta-2\alpha)$ 的值为_______.

14. 若平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|\leqslant 3$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最小值是_______.

15. 已知函数 $f(x)=\sin^2\dfrac{\omega x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\omega x-\dfrac{1}{2}(\omega>0), x\in R$，若 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是________________

三、解答题（共 6 小题；共 85 分）

16. 已知 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=8$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 120°．

（1）求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的值及 $|\vec{a}+\vec{b}|$ 的值；

（2）当 k 为何值时，$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\perp\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)$?

17. 已知函数 $f(x)=\cos x+\sin^2 x$

（1）. 求 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值；

（2）. 求 $f(x)$ 的最大值和最小值，并写出取最值时 x 的值．

18. 已知向量 $\vec{a}=(2\sin x,\cos x)$，$\vec{b}=(\cos x,2\cos x)$.

（1）设 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$ ，求 $f(x)$ 的单调递增区间；

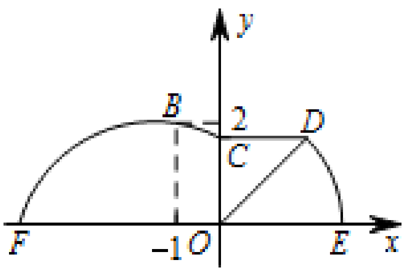
（2）若 $\vec{c}=(2,1)$ ，向量 $\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线，且 x 为第二象限角，求 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ 的值.

19. 若函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x+m$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 6，

（1）求常数 m 的值及 $f(x)$ 的对称中心；

（2）作函数 $f(x)$ 关于 y 轴的对称图象 $f_1(x)$ 得函数的图象，再把 $f_1(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位得 $f_2(x)$ 的图象，求函数 $f_2(x)$ 的单调递减区间.

20. 如图，某市准备在道路 EF 的一侧修建一条运动赛道，赛道的前一部分为曲线段 FBC，该曲线段是函数 $y=A\sin\left(\omega x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ （$A>0$，$\omega>0$），$x\in[-4,0]$ 的图象，且图象的最高点为 $B(-1,2)$ ；赛道的中间部分为直线跑道 CD，且 $CD=\sqrt{3}$ ，$CD\parallel EF$ ；赛道的后一部分是以 O 为圆心的一段圆弧 DE .



（1）求 ω 的值和 $\angle DOE$ 的大小；

（2）若要在圆弧赛道所对应的扇形 ODE 区域内建一个矩形草坪，矩形的一边在道路 OE 上，一个顶点在半径 OD 上，另外一个顶点 P 在圆弧 DE 上，且 $\angle POE=\theta$ ，求当矩形草坪的面积取最大值时 θ 的值.

21. 如果函数$y=f(x)$ 的定义域为$\mathbf{R}$，对于定义域内的任意x，存在实数a使得$f(x+a)=f(-x)$ 成立，则称此函数具有"$P(a)$ 性质".

（1）. 判断函数$y=\sin x$ 是否具有"$P(a)$ 性质"，若具有"$P(a)$ 性质"，求出所有a的值；若不具有"$P(a)$ 性质"，请说明理由；

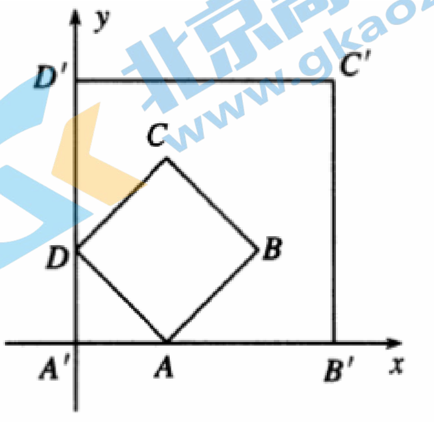
（2）. 设函数$y=g(x)$ 具有"$P(\pm 1)$ 性质"，且当$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$g(x)=|x|$. 若$y=g(x)$ 与$y=mx$ 交点个数为2023 个，求m的值.

参考答案

一 选择题

1. C
2. C
3. A
4. D
5. A
6. A
7 D
8. B
9. C
10. D

【解析】以 $A'B'$，$A'D'$ 为 x，y 轴建系，令 $\angle A'AD=\theta$ ，



由于 $AD=1$ ，故 $A'A=\cos\theta$ ，$A'D=\sin\theta$ ，

如图，$\angle BAB'=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ ，$AB=1$ ，

故 $x_B=\cos\theta+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta+\sin\theta$ ，$y_B=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$，

故 $\overrightarrow{A'B}=(\cos\theta+\sin\theta,\cos\theta)$ ，

同理可得 $C\,(\sin\theta,\cos\theta+\sin\theta)$ ，

即 $\overrightarrow{A'C}=(\sin\theta,\cos\theta+\sin\theta)$ ，

所以 $\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{A'C}=(\cos\theta+\sin\theta,\cos\theta)\cdot(\sin\theta,\cos\theta+\sin\theta)=1+\sin2\theta$ ，

当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，故 $\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{A'C}$ 的最大值为 2.

二 填空题

11. $-\sqrt{3}$
12. $120°$
13. $-\dfrac{1}{12}$
14. $-\dfrac{9}{8}$

【解析】将 $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|\leqslant3$， 平方整理，得 $4\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\leqslant9+4\vec{a}\cdot\vec{b}$，

又由均值不等式，得 $4\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2 \geqslant 4\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right| \geqslant -4\vec{a}\cdot\vec{b}$，

所以 $9+4\vec{a}\cdot\vec{b} \geqslant -4\vec{a}\cdot\vec{b}$，　解得 $\vec{a}\cdot\vec{b} \geqslant -\frac{9}{8}$，

故当且仅当 $\vec{b}=-2\vec{a}$ 时，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 有最小值为 $-\frac{9}{8}$.

15 $\left(0,\frac{1}{8}\right]\cup\left[\frac{1}{4},\frac{5}{8}\right]$

【解析】$f(x)=\frac{1-\cos\omega x}{2}+\frac{\sin\omega x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$.

由 $f(x)=0$，得 $\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)=0$，解得 $x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{4}}{\omega}\ (k\in\mathbf{Z})$.

由 $f(x)$ 在 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，得 $\frac{k\pi+\frac{\pi}{4}}{\omega}\notin(\pi,2\pi)\ (k\in\mathbf{Z})$，

解得 $\omega\notin\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{8},\frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{9}{8},\frac{9}{4}\right)\cup\cdots=\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{8},+\infty\right)$，

因此，$\omega\in\left(0,\frac{1}{8}\right]\cup\left[\frac{1}{4},\frac{5}{8}\right]$.

三 解答题

16.（1） 由向量的数量积的运算公式，

可得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120°=4\times 8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-16$，

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|&=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}\\&=\sqrt{4^2+8^2+2\times(-16)}\\&=4\sqrt{3}.\end{aligned}$$

——————————————————————7 分

（2） 因为 $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\perp\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)$，

所以 $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)=k\vec{a}^2-2\vec{b}^2+(2k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

整理得 $16k-128+(2k-1)\times(-16)=0$，

解得 $k=-7$.

即当 $k=-7$ 时，$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\perp\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)$.　————————————14 分

17

(1)

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2\sqrt{3}+1}{4}$　— — — — — —4 分

(2)

$f(x)=\cos x+1-\cos^2 x=-\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$.　— — — — — —8 分

因为 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$，

所以当$\cos x=\frac{1}{2}$时，

$f(x)_{\max}=\frac{5}{4}$，$x=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in Z)$ 或$x=2k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in Z)$ —————11 分

当 $\cos x=-1$ 时，$f(x)_{\min}=-1$，$x=(2k+1)\pi, k\in Z$ —————14 分

18.（1）

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sin x\cdot\cos x+2\cos^2 x \\ &= \sin 2x+\cos 2x+1 \\ &= \sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1. \end{aligned}$$

——————————3 分

由

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},$$ —————————5 分

得 $f(x)$ 的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. ————————6 分

（2）因为 $\vec{a}-\vec{b}=(2\sin x-\cos x,-\cos x)$，$\vec{c}=(2,1)$，$\vec{a}-\vec{b}$ 与向量 $\vec{c}$ 共线，所以

$$2\sin x-\cos x=-2\cos x,$$ ————————3 分

即 $\tan x=-\frac{1}{2}$. ————————4 分

又因为 x 是第二象限角，所以

$$\sin x=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos x=-\frac{2\sqrt{5}}{5},$$ ————————8 分

$$\begin{aligned} \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} &= 2(2\sin x+\cos x)+3\cos x \\ &= 4\sin x+5\cos x=-\frac{6\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

—————————————14 分

19.（1）

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x+m \\ &= 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1+m. \end{aligned}$$

因为$\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$，

所以$-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$.

所以$m\leqslant f(x)\leqslant 3+m$.

所以$3+m=6$.

所以$m=3$，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4$.

$f(x)$ 的对称中心$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},4\right)$，$k\in\mathbf{Z}$. ——————————7 分

（2）$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4$，

$f_1(x)=2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)+4$,

$f_2(x)=2\sin\left(-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right)+4=-2\sin\left(2x-\frac{2}{3}\pi\right)+4$,

$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{2}{3}\pi\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$.

$f_2(x)$ 的单调递减区间是 $\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7}{12}\pi+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$. ————————14 分

20.（1） 由条件得 $A=2$，$\frac{T}{4}=3$． $\because T=\frac{2\pi}{\omega}$ ，$\therefore \omega=\frac{\pi}{6}$ ，

$\therefore$ 曲线段 FBC 的解析式为 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)(-4\leqslant x\leqslant 0)$.

当 $x=0$ 时，$y=OC=\sqrt{3}$.

又 $CD=\sqrt{3}$ ，$\therefore \angle COD=\frac{\pi}{4}$，$\therefore \angle DOE=\frac{\pi}{4}$.

————————————7 分

（2） 由（1）可知 $OD=\sqrt{6}$． 又点 P 在圆弧 DE 上，$OP=\sqrt{6}$.

又 $\angle POE=\theta$ ，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ ，

$\therefore$ 矩形草坪的面积为

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{6}\sin\theta\left(\sqrt{6}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta\right)\\&=6\left(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\right)\\&=6\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}\right)\\&=3\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)-3.\end{aligned}$$

$\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}$ ，$\therefore \frac{\pi}{4}<2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$ ，

$\therefore$ 当 $2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ ，即 $\theta=\frac{\pi}{8}$ 时，S 取得最大值.

————————————————15 分

21

(1) 由 $\sin(x+a)=\sin(-x)$ 得

$$\sin(x+a)=-\sin x,$$

根据诱导公式得 $a=2k\pi+\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

所以 $y=\sin x$ 具有" $P(a)$ 性质"，其中 $a=2k\pi+\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

————————————4 分

(2)

$\because y=g(x)$ 具有"$P(\pm1)$ 性质"，$\therefore g(1+x)=g(-x)$ ，$g(-1+x)=g(-x)$.

$\therefore g(x+2)=g(1+1+x)=g(-1-x)=g(x)$ ，

从而 $y=g(x)$ 是以2为周期的周期函数.

设$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$，则$-\frac{1}{2}\leqslant 1-x\leqslant\frac{1}{2}$ ，所以

$g(x)=g(x-2)=g(-1+x-1)=g(-x+1)=|-x+1|=|x-1|=g(x-1)$.

再设$n-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant n+\frac{1}{2}\ (n\in\mathbf{Z})$ ，

当$n=2k\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，$2k-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2k+\frac{1}{2}$ ，则$-\frac{1}{2}\leqslant x-2k\leqslant\frac{1}{2}$ ，所以

$$g(x)=g(x-2k)=|x-2k|=|x-n|;$$

当$n=2k+1\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，$2k+1-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2k+1+\frac{1}{2}$ ，则$\frac{1}{2}\leqslant x-2k\leqslant\frac{3}{2}$ ，所以

$$g(x)=g(x-2k)=|x-2k-1|=|x-n|.$$

$\therefore$ 对于$n-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant n+\frac{1}{2}\ (n\in\mathbf{Z})$ ，都有$g(x)=|x-n|$.

而$n+1-\frac{1}{2}\leqslant x+1\leqslant n+1+\frac{1}{2}$ ，所以$g(x+1)=|(x+1)-(n+1)|=|x-n|=g(x)$.

$\therefore y=g(x)$ 是周期为1的函数.

①当$m>0$ 时，要使得$y=mx$ 与$y=g(x)$ 有2023 个交点，只要$y=mx$ 与$y=g(x)$ 在$[0,1011)$ 上有2022 个交点，而在$[1011,1012)$ 有一个交点即可.

$\therefore y=mx$ 过$\left(\frac{2023}{2},\frac{1}{2}\right)$，从而得$m=\frac{1}{2023}$ ；

②当$m<0$ 时，同理可得$m=-\frac{1}{2023}$ ；

③当$m=0$ 时，不合题意.

综上所述，$m=\pm\frac{1}{2023}$.

— — — — — — — — — —14 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〃精益求精、专业严谨〃的建设理念，不断探索“K12教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯