2024 届高三 11 月一轮总复习调研测试

数学参考答案

1.【答案】A

【解析】由 $B=\{x|x^2-2x-3\geqslant 0\}=\{x|x\leqslant -1$,或 $x\geqslant 3\}$,所以 $A\cup B=(-\infty,-1]\cup(2,+\infty)$. 故选 A.

2.【答案】C

【解析】因为命题“对于任意正数 x,都有 $x+2>0$”是全称量词命题,所以其否定为“存在正数 x,使得 $x+2\leqslant 0$”. 故选 C.

3.【答案】B

【解析】设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$,结合已知,得 $|x+(y-1)\mathrm{i}|=|x+y\mathrm{i}|$,即 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$,化简整理,得 $y=\frac{1}{2}$,所以 $z=x+\frac{1}{2}\mathrm{i}$. $|z|=\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}$,所以 $|z|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$. 故选 B.

4.【答案】C

【解析】$a=\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}}<\mathrm{e}^{-1}<\frac{1}{2}$,$b=\ln 3>\ln \mathrm{e}=1$,$c=3^{-1+\log_3 2}=\frac{2}{3}$,所以 $a<c<b$. 故选 C.

5.【答案】D

【解析】因为 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$,所以 $\angle BAC$ 的角平分线与 BC 垂直,所以 $AB=AC$,因为 $\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\angle BAC=30°$,则 $\angle ABC=(180°-\angle BAC)\cdot\frac{1}{2}=75°$. 故选 D.

6.【答案】D

【解析】由题可知,函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq\pm 1\}$,且 $f(-x)=\frac{x^2}{2-2^{|x|}}=f(x)$,故函数 $f(x)$ 为偶函数,排除 A,C;又 $f(2)=\frac{4}{2-4}=-2<0$,排除 B. 故选 D.

7.【答案】B

【解析】由题意得 $\cos\beta=\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$,因为 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\pi$,$0<\beta<\pi$,所以 $\beta=\alpha-\frac{\pi}{6}$,即 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$,故 $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3^k-3^{-k}}{1+3^k\cdot 3^{-k}}$,即 $\frac{3^k-3^{-k}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,解得 $k=\frac{1}{2}$. 故选 B.

8.【答案】A

【解析】因为 $f(x)=x\mathrm{e}^x+1$,所以 $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$. 由题意知,$g(x)$ 的最小值等价于 $f(x)=x\mathrm{e}^x+1$ 图象上的点到直线 $y=x$ 的最小距离. 设直线 l 与直线 $y=x$ 平行,且与曲线 $y=f(x)$ 切于点 $P(x_0,y_0)$,则直线 l 的斜率为 $f'(x_0)=(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}=1$,解得 $x_0=0$,从而 $P(0,1)$,因此 $f(x)=x\mathrm{e}^x+1$ 图象上的点到直线 $y=x$ 的最小距离为点 $(0,1)$ 到直线 $y=x$ 的距离,即为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,因此 $m\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.

9.【答案】BC

【解析】当 M 为 B_1D_1 的中点时,$CC_1/\!/OM$,故 A 错误;又 $OM\subset$ 平面 BDD_1B_1,$DB_1\subset$ 平面 BDD_1B_1,故 D 错误;由 $A\notin$ 平面 BDD_1B_1,$A_1\notin$ 平面 BDD_1B_1,知 B,C 正确. 故选 BC.

10.【答案】AB

【解析】由 $T=\pi$，得 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，故选项 A 正确；令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi, k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$，当 $k=1$ 时，$x=\frac{\pi}{3}$，所以 $x=\frac{\pi}{3}$是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，故选项 B 正确；当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$上不单调，故选项 C 错误；将 $y=2\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到的图象对应的函数解析式为 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，故选项 D 错误. 故选 AB.

11.【答案】ABD

【解析】由$\frac{4}{m}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{m}+\frac{1}{2n}\right)(m+2n)=\frac{1}{3}\left(5+\frac{8n}{m}+\frac{m}{2n}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(5+2\sqrt{\frac{8n}{m}\cdot\frac{m}{2n}}\right)=3$，当且仅当 $m=4n=2$ 时等号成立，故 A 正确；由 $m+2n=3$ 得，$mn\leqslant\frac{9}{8}$，当且仅当 $m=2n=\frac{3}{2}$时取等号，所以$\frac{4}{m^2}+\frac{1}{n^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{m^2n^2}}=\frac{4}{mn}\geqslant\frac{32}{9}$，当且仅当$m=2n=\frac{3}{2}$时取等号，故 B 正确；因为$\frac{m^2}{m+1}+\frac{4n^2}{2n+1}=\frac{[(m+1)-1]^2}{m+1}+\frac{[(2n+1)-1]^2}{2n+1}=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2n+1}+1=\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2n+1}\right)(m+1+2n+1)+1=\frac{1}{5}\left(2+\frac{2n+1}{m+1}+\frac{m+1}{2n+1}\right)+1\geqslant\frac{9}{5}$，当且仅当 $m=2n=\frac{3}{2}$时取等号，故 C 错误；由 $\sqrt{m+1}+\sqrt{2n+1}\leqslant\sqrt{2[(\sqrt{m+1})^2+(\sqrt{2n+1})^2]}=\sqrt{2(2n+m+2)}=\sqrt{10}$，当且仅当 $\sqrt{m+1}=\sqrt{2n+1}$，即 $m=2n=\frac{3}{2}$时等号成立，故 D 正确. 故选 ABD.

12.【答案】ACD

【解析】若 $y=e^xf(x)+g(x)=ax^2-2x+1+g(x)$ 为奇函数，显然可取$g(x)=-ax^2-1$，故选项 A 正确；由 $f(x)=0$，得 $ax^2-2x+1=0$. 当 $a=0$ 时，解得 $x=\frac{1}{2}$；当 $a\neq 0$ 时，$\Delta_1=4-4a=0$，解得 $a=1$，所以若 $f(x)$ 只有一个零点，则 $a=0$ 或 $a=1$，故选项 B 错误；当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{e^x}$，则 $f'(x)=\frac{-x^2+4x-3}{e^x}$. 由$f'(x)=0$，解得 $x=1$ 或 $x=3$. 当 $x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x\in(1,3)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当 $x\in(3,+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，所以$f(x)$的极小值为 $f(1)=0$，极大值为 $f(3)=\frac{4}{e^3}$. 又当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$；当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，所以关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有 3 个不同的实数根的充要条件为 $0<m<\frac{4}{e^3}$，故选项 C 正确；$f'(x)=\frac{-ax^2+(2a+2)x-3}{e^x}$，若 $a=0$，则 $f'(x)$ 只有一个变号零点 $x=\frac{3}{2}$，此时函数 $f(x)$ 存在极小值；若 $a\neq 0$，因为 $-ax^2+(2a+2)x-3=0$ 的判别式 $\Delta_2=(2a+2)^2-12a=4(a^2-a+1)>0$，所以 $f'(x)$ 有两个变号零点，此时函数 $f(x)$ 既存在极大值又存在极小值，故选项 D 正确. 故选 ACD.

13.【答案】$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】$\tan 420°+\cos 390°=\tan(60°+2\times 180°)+\cos(30°+360°)=\tan 60°+\cos 30°=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

14.【答案】$(2,2)$

【解析】$\because\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,3)$，则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(2,2)$.

15.【答案】127

【解析】由题意知9^8首次出现时是该数列的第$2+3+4+\cdots+15+8=\frac{14\times(2+15)}{2}+8=127$项.

16.【答案】$\left(\frac{3}{2\ 023},\frac{5}{2\ 022}\right]$

【解析】设$f(1)=a$,则$f(x+1)=f(x)+f(1)+2=f(x)+a+2$,所以当$x$为正整数时,由等差数列的通项公式,得$f(x)=a+(a+2)(x-1)=(a+2)x-2$. 由题意知$\begin{cases}f(2\ 023)=2\ 023(a+2)-2>4\ 047,\\f(2\ 022)=2\ 022(a+2)-2\leqslant 4\ 047,\end{cases}$解得$\frac{3}{2\ 023}<a\leqslant\frac{5}{2\ 022}$.

17. 解:(1)在$\triangle ABC$中,由正弦定理及$c\cos B+b\cos C=a\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$,

可得,$\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin A\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$,(2分)

即$\sin(B+C)=\sin A\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$,(3分)

因为$\triangle ABC$中,$\sin(B+C)=\sin A$且$\sin A\neq 0$,故$\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=1$,(4分)

因为$0<B<\pi$,所以$B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即$B=\frac{\pi}{3}$. (5分)

(2)在$\triangle ABC$中,由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,可得$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$,(6分)

因为$a<b$,所以$A<B$,故$A=\frac{\pi}{4}$,$\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \cos(2B-A)=\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. (10分)

18. 解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,

因为$a_3+a_6+a_9=33$,$S_7=49$,

所以$\begin{cases}3a_1+15d=33,\\7a_1+21d=49,\end{cases}$所以$a_1=1$,$d=2$,(3分)

所以$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$. (5分)

(2)由题意可知$b_n=(2n-1)\cdot 2^n$,

所以$T_n=1\times 2+3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n$,①

$2T_n=1\times 2^2+3\times 2^3+5\times 2^4+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n+1}$,②(8分)

①$-$②得,$-T_n=1\times 2+2\times 2^2+2\times 2^3+2\times 2^4+\cdots+2\cdot 2^n-(2n-1)\cdot 2^{n+1}$

$=2+2\times\frac{2^2\cdot(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\cdot 2^{n+1}$

$=2+2^{n+2}-8-(2n-1)\cdot 2^{n+1}$

$=(3-2n)\cdot 2^{n+1}-6$. (10分)

故$T_n=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$. (12分)

19. 解：(1) 因为$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2)=\frac{1}{2}(c^2-b^2)$.

由$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{a(a-b)}{2}$，得$\frac{1}{2}(c^2-b^2)=\frac{a(a-b)}{2}$，

整理，得 $a^2+b^2-c^2=ab$，(3 分)

由余弦定理，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$.

又 $C\in(0,\pi)$，故 $C=\frac{\pi}{3}$. (6 分)

(2) 由$\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$，得$\frac{1}{2}ab\sin C=4\sqrt{3}$，即 $ab=16$. (9 分)

因为 $a+b+c=a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab}\geqslant 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab-ab}=12$，

所以当且仅当 $a=b=c=4$ 时，$\triangle ABC$ 的周长最小，且最小值为 12. (12 分)

20. (1) 解：由题意得，函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，则$f'(x)=2x-1+\frac{2}{x}$，(1 分)

故$f'(2)=2\times2-1+1=4$，

又$f(2)=4-2+2\ln 2=2+2\ln 2$，(3 分)

$\therefore$ 在 $x=2$ 处的切线方程为 $y=4(x-2)+2+2\ln 2$，

即 $4x-y-6+2\ln 2=0$. (5 分)

(2) 证明：设 $g(x)=x^3-f(x)=x^3-x^2+x-2\ln x\ (x>0)$，

则 $g'(x)=3x^2-2x+1-\frac{2}{x}=\frac{3x^3-2x^2+x-2}{x}$. (7 分)

设 $h(x)=3x^3-2x^2+x-2$，则 $h'(x)=9x^2-4x+1=9\left(x-\frac{2}{9}\right)^2+\frac{5}{9}>0$，

$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

$\because h(1)=3-2+1-2=0$，即 $g'(1)=0$，(8 分)

$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，(9 分)

$\therefore g(x)$在 $x=1$ 处取得极小值 $g(1)=1-1+1-2\ln 1=1$，(10 分)

$\therefore g(x)\geqslant 1$，(11 分)

又 $-1\leqslant\sin 2x\leqslant 1$，当 $x=1$ 时，$\sin 2x<1$，

$\therefore g(x)>\sin 2x$，即 $x^3-f(x)>\sin 2x$. (12 分)

21. 解：(1) 当 $n=1$ 时，$a_1b_1=3b_1=1$，

所以 $b_1=\frac{1}{3}$. (1 分)

由题意知 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\frac{n^2+n}{2}$，

则当 $n\geqslant 2$ 时，$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}=\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}$，

两式相减，得 $a_nb_n=\frac{n^2+n}{2}-\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}=n$，

所以 $b_n=\frac{n}{4n^2-1}(n\geqslant 2)$.（5 分）

当 $n=1$ 时，$b_1=\frac{1}{3}$满足上式，

故 $b_n=\frac{n}{4n^2-1}$.（6 分）

（2）若选①，

因为 $c_n=(-1)^nb_n=\frac{(-1)^nn}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\times(-1)^n\times\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以 $S_{2n}=\frac{1}{4}\left[-\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{4}\left(-1+\frac{1}{4n+1}\right)=-\frac{n}{4n+1}$，（9 分）

假设存在正整数 $k,m,n(k<m<n)$使得 k,m,n 成等比数列，且 S_{2k},S_{2m},S_{2n}成等比数列，

则 $kn=m^2$，且 $S_{2k}S_{2n}=S_{2m}^2$，即$\left(-\frac{k}{4k+1}\right)\left(-\frac{n}{4n+1}\right)=\left(-\frac{m}{4m+1}\right)^2$，（10 分）

整理得$\frac{kn}{16kn+4k+4n+1}=\frac{m^2}{16m^2+8m+1}$，

因为 $kn=m^2$，

所以 $4k+4n=8m$，即 $k+n=2m$，

因为 $k\neq n$，所以 $k+n>2\sqrt{kn}=2m$，与 $k+n=2m$ 矛盾，

所以不存在正整数 $k,m,n(k<m<n)$，使得 k,m,n 成等比数列且 S_{2k},S_{2m},S_{2n}成等比数列.（12 分）

若选②，

因为 $c_n=(-1)^nb_n=\frac{(-1)^nn}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\times(-1)^n\times\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以 $S_{2n-1}=\frac{1}{4}\left[-\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-5}+\frac{1}{4n-3}\right)-\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}\right)\right]$

$=\frac{1}{4}\left(-1-\frac{1}{4n-1}\right)=-\frac{n}{4n-1}$，（9 分）

假设存在正整数 $k,m,n(k<m<n)$使得 k,m,n 成等差数列，且 $S_{2k-1},S_{2m-1},S_{2n-1}$成等差数列，

则 $k+n=2m$，且 $S_{2k-1}+S_{2n-1}=2S_{2m-1}$，即 $-\frac{k}{4k-1}-\frac{n}{4n-1}=-\frac{2m}{4m-1}$，（10 分）

去分母整理得，$4m(k+n)-8kn+k+n-2m=0$，

因为 $k+n=2m$，所以有 $4m^2-4kn=0$，

即$(k+n)^2-4kn=(k-n)^2=0$，

因为 $n>k$，$(k-n)^2\neq 0$，矛盾，

所以不存在正整数 $k,m,n(k<m<n)$使得 k,m,n 成等差数列，且 $S_{2k-1},S_{2m-1},S_{2n-1}$成等差数列.（12 分）

22.（1）解：由题意，得 $f'(x)=1-\frac{m}{e^x}=\frac{e^x-m}{e^x}$，$x\in\mathbf{R}$，（1 分）

当 $m\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；（2 分）

当 $m>0$，且当 $x\in(-\infty,\ln m)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\ln m,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.（4 分）

综上，当 $m\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；当 $m>0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln m)$ 上单调递减，在区间 $(\ln m,+\infty)$ 上单调递增.（5 分）

（2）证明：由 $f(x_1)=f(x_2)=2$，得 x_1,x_2 是方程 $x+\dfrac{m}{e^x}=2$ 的两个实数根，

即 x_1,x_2 是方程 $m=e^x(2-x)$ 的两个实数根.

令 $g(x)=e^x(2-x)$，则 $g'(x)=e^x(1-x)$，

所以当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=e$.（7 分）

因为当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to 0$；当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，$g(2)=0$，所以 $0<m<e$.

不妨设 $x_1<x_2$，因为 x_1,x_2 是方程 $m=e^x(2-x)$ 的两个实数根，则 $x_1<1<x_2<2$.（8 分）

要证 $x_1+x_2<2$，只需证 $x_1<2-x_2$.

因为 $x_1<1$，$2-x_2<1$，

所以只需证 $g(x_1)<g(2-x_2)$.

因为 $g(x_1)=g(x_2)$，

所以只需证 $g(x_2)<g(2-x_2)$.（9 分）

令 $h(x)=g(x)-g(2-x)$，$1<x<2$，

则 $h'(x)=g'(x)+g'(2-x)=e^x(1-x)+e^{2-x}(x-1)=(1-x)(e^x-e^{2-x})=(1-x)\cdot\dfrac{e^{2x}-e^2}{e^x}<0$ 恒成立，

所以 $h(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递减，

所以 $h(x)<h(1)=0$，

即当 $1<x<2$ 时，$g(x)<g(2-x)$，

所以 $g(x_2)<g(2-x_2)$，

即 $x_1+x_2<2$ 成立.（12 分）