

本试卷共6页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分 (选择题 共40分)

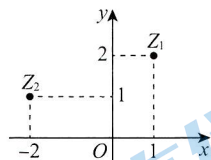
一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 则 $\complement_U(A \cap B) =$

- (A) $\{2, 4, 5, 6\}$ (B) $\{4, 6\}$
 (C) $\{2, 4, 6\}$ (D) $\{2, 5, 6\}$

(2) 如图，在复平面内，复数 z_1, z_2 对应的点分别为 Z_1, Z_2 ，则复数 $z_1 \cdot z_2$ 的虚部为

- (A) $-i$ (B) -1
 (C) $-3i$ (D) -3



(3) 已知直线 $l_1: x + \frac{y}{2} = 1$, 直线 $l_2: 2x - ay + 2 = 0$, 且 $l_1 \parallel l_2$, 则 $a =$

- (A) 1 (B) -1
 (C) 4 (D) -4

(4) 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 点 M 在 C 上, $|MF| = 4$, O 为坐标原点, 则 $|MO| =$

- (A) $4\sqrt{2}$ (B) 4
 (C) 5 (D) $2\sqrt{5}$

(5) 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB = 2$, 二面角 $P-CD-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$, 则该四棱锥的体积为

- (A) 4 (B) 2
 (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

(6) 已知 $\odot C: x^2 + 2x + y^2 - 1 = 0$, 直线 $mx + n(y - 1) = 0$ 与 $\odot C$ 交于 A, B 两点. 若 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 则

- (A) $mn = 0$ (B) $m - n = 0$
 (C) $m + n = 0$ (D) $m^2 - 3n^2 = 0$

(7) 若关于 x 的方程 $\log_a x - a^x = 0$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 有实数解, 则 a 的值可以为

- (A) 10 (B) e
(C) 2 (D) $\frac{5}{4}$

(8) 已知直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 倾斜角分别为 α_1, α_2 , 则 “ $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ ” 是 “ $k_1 k_2 > 0$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(9) 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q ($q \neq 1$) 的等比数列, S_n 为其前 n 项和. 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n < \frac{a_1}{1-q}$ 恒成立, 则

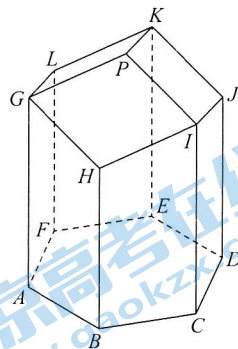
- (A) $\{a_n\}$ 是递增数列 (B) $\{a_n\}$ 是递减数列
(C) $\{S_n\}$ 是递增数列 (D) $\{S_n\}$ 是递减数列

(10) 蜜蜂被誉为 “天才的建筑师”. 蜂巢结构是一种在一定条件下建筑用

材面积最小的结构. 右图是一个蜂房的立体模型, 底面 $ABCDEF$ 是正六边形, 棱 AG, BH, CI, DJ, EK, FL 均垂直于底面 $ABCDEF$, 上顶由三个全等的菱形 $PGHI, PIJK, PKLG$ 构成. 设 $BC = 1$, $\angle GPI = \angle IPK = \angle KPG = \theta \approx 109^\circ 28'$, 则上顶的面积为

(参考数据: $\cos \theta = -\frac{1}{3}$, $\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$)

- (A) $2\sqrt{2}$ (B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
(C) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$



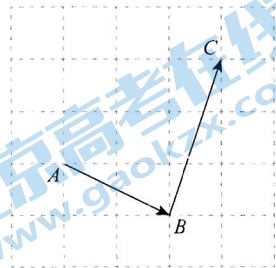
第二部分 (非选择题 共110分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 在 $(\sqrt{x} - \frac{1}{x})^5$ 的展开式中, x 的系数为_____。

(12) 已知双曲线 $x^2 - my^2 = 1$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x - y = 0$, 则该双曲线的离心率为_____。

(13) 已知点 A, B, C 在正方形网格中的位置如图所示. 若网格纸上小正方形的边长为 1, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____; 点 C 到直线 AB 的距离为 _____.



(14) 已知无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 公差为 d , 则能使得 $a_n a_{n+1}$ 为某一个等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 ($n=1, 2, \dots$) 的一组 a_1, d 的值为 $a_1 =$ _____, $d =$ _____.

(15) 已知函数 $f(x) = |\cos x + a|$. 给出下列四个结论:

- ① 任意 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x)$ 的最大值与最小值的差为 2;
- ② 存在 $a \in \mathbf{R}$, 使得对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) + f(\pi - x) = 2a$;
- ③ 当 $a \neq 0$ 时, 对任意非零实数 x , $f(x + \frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2} - x)$;
- ④ 当 $a = 0$ 时, 存在 $T \in (0, \pi)$, $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得对任意 $n \in \mathbf{Z}$, 都有 $f(x_0) = f(x_0 + nT)$.

其中所有正确结论的序号是 _____.

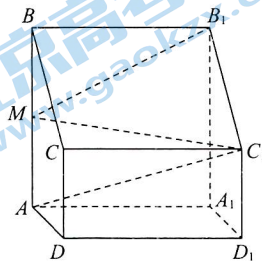
三、解答题共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

如图, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧面 ABB_1A_1 是正方形, 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AD = DC = \frac{1}{2}AB$, M 为线段 AB 的中点, $AD \perp B_1M$.

(I) 求证: $C_1M \parallel$ 平面 ADD_1A_1 ;

(II) 求直线 AC_1 与平面 MB_1C_1 所成角的正弦值.



(17) (本小题 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $2c \cos A = 2b - a$.

(I) 求 $\angle C$ 的大小;

(II) 若 $c = \sqrt{3}$, 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使 $\triangle ABC$ 存在, 求 AC 边上中线的长.

条件①: $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$;

条件②: $\sin B - \sin A = \frac{1}{2}$;

条件③: $b^2 - 2a^2 = 2$.

注: 如果选择的条件不符合要求, 得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

(18) (本小题 13 分)

甲、乙、丙三人进行投篮比赛, 共比赛 10 场, 规定每场比赛分数最高者获胜, 三人得分 (单位: 分) 情况统计如下:

| 场次 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|
| 甲 | 8 | 10 | 10 | 7 | 12 | 8 | 8 | 10 | 10 | 13 |
| 乙 | 9 | 13 | 8 | 12 | 14 | 11 | 7 | 9 | 12 | 10 |
| 丙 | 12 | 11 | 9 | 11 | 11 | 9 | 9 | 8 | 9 | 11 |

(I) 从上述 10 场比赛中随机选择一场, 求甲获胜的概率;

(II) 在上述 10 场比赛中, 从甲得分不低于 10 分的场次中随机选择两场, 设 X 表示乙得分大于丙得分的场数, 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;

(III) 假设每场比赛获胜者唯一, 且各场相互独立, 用上述 10 场比赛中每人获胜的频率估计其获胜的概率. 甲、乙、丙三人接下来又将进行 6 场投篮比赛, 设 Y_1 为甲获胜的场数, Y_2 为乙获胜的场数, Y_3 为丙获胜的场数, 写出方差 $D(Y_1)$, $D(Y_2)$, $D(Y_3)$ 的大小关系.

(19) (本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A(3, 0)$, 焦距为 $2\sqrt{5}$.

(I) 求椭圆 E 的方程, 并求其短轴长;

(II) 过点 $P(1, 0)$ 且不与 x 轴重合的直线 l 交椭圆 E 于两点 C, D , 连接 CO 并延长交椭圆 E 于点 M , 直线 AM 与 l 交于点 N , Q 为 OD 的中点, 其中 O 为原点. 设直线 NQ 的斜率为 k , 求 k 的最大值.

(20) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = ax^2 - x \sin x + b$.

(I) 当 $a = 1$ 时, 求证:

① 当 $x > 0$ 时, $f(x) > b$;

② 函数 $f(x)$ 有唯一极值点;

(II) 若曲线 C_1 与曲线 C_2 在某公共点处的切线重合, 则称该切线为 C_1 和 C_2 的“优切线”. 若曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = -\cos x$ 存在两条互相垂直的“优切线”, 求 a, b 的值.

(21) (本小题 15 分)

对于给定的奇数 m ($m \geq 3$), 设 A 是由 $m \times m$ 个实数组成的 m 行 m 列的数表, 且 A 中所有数不全相同, A 中第 i 行第 j 列的数 $a_{ij} \in \{-1, 1\}$, 记 $r(i)$ 为 A 的第 i 行各数之和, $c(j)$ 为 A 的第 j 列各数之和, 其中 $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$. 记 $f(A) = \frac{m^2 - |r(1) + r(2) + \dots + r(m)|}{2}$. 设集合 $H = \{(i, j) \mid a_{ij} \cdot r(i) < 0 \text{ 或 } a_{ij} \cdot c(j) < 0, i, j \in \{1, 2, \dots, m\}\}$, 记 $H(A)$ 为集合 H 所含元素的个数.

(I) 对以下两个数表 A_1, A_2 , 写出 $f(A_1), H(A_1), f(A_2), H(A_2)$ 的值;

| | | | | |
|---|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |

A_1

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| -1 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| -1 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |

A_2

(II) 若 $r(1), r(2), \dots, r(m)$ 中恰有 s 个正数, $c(1), c(2), \dots, c(m)$ 中恰有 t 个正数.

求证: $H(A) \geq mt + ms - 2ts$;

(III) 当 $m=5$ 时, 求 $\frac{H(A)}{f(A)}$ 的最小值.

海淀区 2023—2024 学年第一学期期末练习

高三数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) A (2) D (3) B (4) D (5) C
(6) A (7) D (8) B (9) B (10) D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

- (11) -5 (12) 2
(13) $-1 - \frac{7\sqrt{5}}{5}$ (14) 1 1（答案不唯一）
(15) ②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16)（共 13 分）

解：（I）连接 AD_1 .

在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，侧面 CDD_1C_1 为平行四边形，

所以 $C_1D_1 \parallel CD$ ， $C_1D_1 = CD$.

因为 $AB \parallel CD$ ， $CD = \frac{1}{2}AB$ ， M 为 AB 中点，

所以 $CD \parallel AM$ ， $CD = AM$.

所以 $C_1D_1 \parallel AM$ ， $C_1D_1 = AM$.

所以四边形 MAD_1C_1 为平行四边形.

所以 $MC_1 \parallel AD_1$.

因为 $C_1M \not\subset$ 平面 ADD_1A_1 ，

所以 $C_1M \parallel$ 平面 ADD_1A_1 .

（II）在正方形 ABB_1A_1 中， $AA_1 \perp AB$.

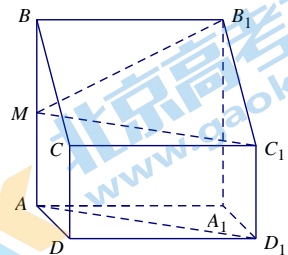
因为平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $AA_1 \perp AD$.

因为 $AD \perp B_1M$ ， $B_1M \subset$ 平面 ABB_1A_1 ， B_1M 与 AA_1 相交，

高三年级（数学）参考答案 第 1 页（共 9 页）



所以 $AD \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

所以 $AD \perp AB$.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

不妨设 $AD=1$, 则

$A(0,0,0)$, $C_1(1,2,1)$, $B_1(0,2,2)$, $M(0,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{AC_1}=(1,2,1)$, $\overrightarrow{C_1B_1}=(-1,0,1)$,

$\overrightarrow{MC_1}=(1,2,0)$.

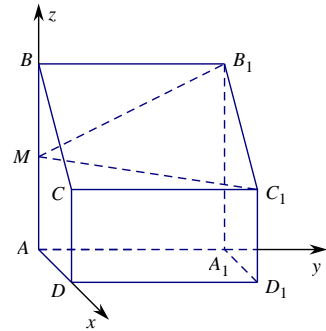
设平面 MB_1C_1 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{C_1B_1} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{MC_1} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -x + z = 0, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

令 $x=2$, 则 $y=-1$, $z=2$. 于是 $\mathbf{n}=(2,-1,2)$.

$$\text{因为 } \cos \langle \overrightarrow{AC_1}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC_1} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{AC_1}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{9},$$

所以直线 AC_1 与平面 MB_1C_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$.



(17) (共 14 分)

解: (I) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 及 $2c \cos A = 2b - a$, 得

$$2 \sin C \cos A = 2 \sin B - \sin A. \quad ①$$

因为 $A + B + C = \pi$,

$$\text{所以 } \sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C. \quad ②$$

由①②得 $2 \sin A \cos C - \sin A = 0$.

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A \neq 0$.

$$\text{所以 } \cos C = \frac{1}{2}.$$

因为 $C \in (0, \pi)$,

$$\text{所以 } C = \frac{\pi}{3}.$$

(II) 选条件②: $\sin B - \sin A = \frac{1}{2}$.

$$\text{由 (I) 知, } \angle B = \pi - \frac{\pi}{3} - \angle A = \frac{2\pi}{3} - \angle A.$$

$$\text{所以 } \sin B - \sin A = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) - \sin A$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A - \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A - \frac{1}{2} \sin A$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3} - A\right).$$

$$\text{所以 } \sin\left(\frac{\pi}{3} - A\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{因为 } A \in (0, \frac{2\pi}{3}), \text{ 所以 } \frac{\pi}{3} - A \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}).$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{3} - A = \frac{\pi}{6}, \text{ 即 } A = \frac{\pi}{6}.$$

所以 $\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的直角三角形.

因为 $c = \sqrt{3}$,

$$\text{所以 } AC = \frac{AB}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2.$$

高三年级 (数学) 参考答案 第 3 页 (共 9 页)

所以 AC 边上的中线的长为1.

选条件③: $b^2 - 2a^2 = 2$.

由余弦定理得 $a^2 + b^2 - ab = 3$.

设AC边上的中线长为 d , 由余弦定理得

$$\begin{aligned}d^2 &= a^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{ab}{2} \cdot 2 \cos C \\&= a^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{ab}{2} \\&= a^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2 + b^2 - 3}{2} \\&= 1.\end{aligned}$$

所以 AC 边上的中线的长为1.

(18) (共 13 分)

解: (I) 根据三人投篮得分统计数据, 在 10 场比赛中, 甲共获胜 3 场, 分别是第 3 场, 第 8 场, 第 10 场.

设 A 表示“从 10 场比赛中随机选择一场, 甲获胜”, 则

$$P(A) = \frac{3}{10}.$$

(II) 根据三人投篮得分统计数据, 在 10 场比赛中, 甲得分不低于 10 分的场次有 6 场, 分别是第 2 场, 第 3 场, 第 5 场, 第 8 场, 第 9 场, 第 10 场, 其中乙得分大于丙得分的场次有 4 场, 分别是第 2 场、第 5 场、第 8 场、第 9 场.

所以 X 的所有可能取值为 0, 1, 2.

$$P(X=0) = \frac{C_2^2 C_4^0}{C_6^2} = \frac{1}{15}, \quad P(X=1) = \frac{C_2^1 \cdot C_4^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, \quad P(X=2) = \frac{C_2^0 C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}.$$

所以 X 的分布列为

| | | | |
|---|----------------|----------------|---------------|
| X | 0 | 1 | 2 |
| P | $\frac{1}{15}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{2}{5}$ |

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{3}.$$

(III) $D(Y_2) > D(Y_1) > D(Y_3)$.

高三年级 (数学) 参考答案 第 4 页 (共 9 页)

(19) (共 15 分)

解: (I) 由题意知 $a=3$, $2c=2\sqrt{5}$.

所以 $c=\sqrt{5}$, $b^2=a^2-c^2=4$.

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, 其短轴长为 4.

(II) 设直线 CD 的方程为 $x=my+1$, $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, 则 $M(-x_1, -y_1)$.

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ x = my + 1 \end{cases} \text{ 得 } (4m^2 + 9)y^2 + 8my - 32 = 0.$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = \frac{-8m}{4m^2 + 9}.$$

由 $A(3,0)$ 得直线 AM 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 3}(x - 3)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{y_1}{x_1 + 3}(x - 3), \\ x = my + 1 \end{cases} \text{ 得 } y = \frac{-2y_1}{3 + x_1 - my_1}.$$

因为 $x_1 = my_1 + 1$,

$$\text{所以 } y = -\frac{y_1}{2}, \quad x = m(-\frac{y_1}{2}) + 1 = \frac{2 - my_1}{2}.$$

$$\text{所以 } N(\frac{2 - my_1}{2}, -\frac{y_1}{2}).$$

因为 Q 为 OD 的中点, 且 $x_2 = my_2 + 1$,

$$\text{所以 } Q(\frac{my_2 + 1}{2}, \frac{y_2}{2}).$$

所以直线 NQ 的斜率

$$k = \frac{\frac{y_2}{2} + \frac{y_1}{2}}{\frac{my_2 + 1}{2} - \frac{2 - my_1}{2}} = \frac{y_2 + y_1}{m(y_2 + y_1) - 1} = \frac{\frac{-8m}{4m^2 + 9}}{\frac{-8m^2}{4m^2 + 9} - 1} = \frac{8m}{12m^2 + 9}.$$

当 $m \leq 0$ 时, $k \leq 0$.

当 $m > 0$ 时,

因为 $12m + \frac{9}{m} \geq 2\sqrt{12 \times 9} = 12\sqrt{3}$, 当且仅当 $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 等号成立.

所以 $k = \frac{8m}{12m^2 + 9} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

所以当 $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, k 取得最大值 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

(20) (共 15 分)

解: (I) ① 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x^2 - x \sin x + b = x(x - \sin x) + b$.

记 $g(x) = x - \sin x$ ($x \geq 0$), 则 $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$.

所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

所以当 $x > 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$.

所以当 $x > 0$ 时, $f(x) = x(x - \sin x) + b > b$.

② 由 $f(x) = x^2 - x \sin x + b$ 得 $f'(x) = 2x - \sin x - x \cos x$, 且 $f'(0) = 0$.

当 $x > 0$ 时, $f'(x) = x(1 - \cos x) + x - \sin x$.

因为 $1 - \cos x \geq 0$, $x - \sin x > 0$,

所以 $f'(x) > 0$.

因为 $f'(-x) = -f'(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

所以当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

(II) 设曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = -\cos x$ 的两条互相垂直的“优切线”的切点的横坐标

分别为 x_1, x_2 , 其斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $k_1 k_2 = -1$.

因为 $(-\cos x)' = \sin x$,

所以 $\sin x_1 \cdot \sin x_2 = k_1 k_2 = -1$.

所以 $\{\sin x_1, \sin x_2\} = \{-1, 1\}$.

不妨设 $\sin x_1 = 1$, 则 $x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

因为 $k_1 = f'(x_1) = 2ax_1 - \sin x_1 - x_1 \cos x_1$,

由“优切线”的定义可知 $2ax_1 - \sin x_1 - x_1 \cos x_1 = \sin x_1$.

所以 $a = \frac{1}{x_1} = \frac{2}{4k\pi + \pi}$, $k \in \mathbf{Z}$.

由“优切线”的定义可知 $\frac{1}{x_1} \cdot x_1^2 - x_1 \sin x_1 + b = -\cos x_1$,

所以 $b = 0$.

当 $a = \frac{2}{4k\pi + \pi}$, $k \in \mathbf{Z}$, $b = 0$ 时, 取 $x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x_2 = -2k\pi - \frac{\pi}{2}$, 则

$f(x_1) = -\cos x_1 = 0$, $f(x_2) = -\cos x_2 = 0$, $f'(x_1) = \sin x_1 = 1$, $f'(x_2) = \sin x_2 = -1$,
符合题意.

所以 $a = \frac{2}{4k\pi + \pi}$, $k \in \mathbf{Z}$, $b = 0$.

(21) (共 15 分)

解:

(I) $f(A_1) = 10$, $H(A_1) = 12$; $f(A_2) = 12$, $H(A_2) = 15$.

由定义可知: 将数表 A 中的每个数变为其相反数, 或交换两行(列), $H(A)$, $f(A)$ 的值不变. 因为 m 为奇数, $a_{ij} \in \{-1, 1\}$, 所以 $r(1), r(2), \dots, r(m)$, $c(1), c(2), \dots, c(m)$ 均不为 0.

(II) 当 $s \in \{0, m\}$ 或 $t \in \{0, m\}$ 时, 不妨设 $s = 0$, 即 $r(i) < 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

若 $t = 0$, 结论显然成立;

若 $t \neq 0$, 不妨设 $c(j) > 0$, $j = 1, 2, \dots, t$, 则 $(i, j) \in H$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, t$.

所以 $H(A) \geq mt$, 结论成立.

当 $s \notin \{0, m\}$ 且 $t \notin \{0, m\}$ 时, 不妨设 $r(i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, s$, $c(j) > 0$, $j = 1, 2, \dots, t$,

则当 $s+1 \leq i \leq m$ 时, $r(i) < 0$; 当 $t+1 \leq j \leq m$ 时, $c(j) < 0$.

因为当 $i = 1, 2, \dots, s$, $j = t+1, t+2, \dots, m$ 时, $r(i) > 0$, $c(j) < 0$,

所以 $(a_{ij} \cdot r(i)) \cdot (a_{ij} \cdot c(j)) = a_{ij}^2 \cdot r(i) \cdot c(j) < 0$.

高三年级(数学)参考答案 第 7 页(共 9 页)

所以 $(i, j) \in H$.

同理可得： $(i, j) \in H$ ， $i = s+1, s+2, \dots, m$ ，

$j = 1, 2, \dots, t$.

所以 $H(A) \geq s(m-t) + (m-s)t = mt + ms - 2st$.

(III) 当 $m = 5$ 时， $\frac{H(A)}{f(A)}$ 的最小值为 $\frac{8}{9}$. 对于如下的数表

| | | | | |
|---|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |

$$A, \quad \frac{H(A)}{f(A)} = \frac{8}{9}.$$

下面证明： $\frac{H(A)}{f(A)} \geq \frac{8}{9}$.

设 $r(1), r(2), \dots, r(m)$ 中恰有 s 个正数， $c(1), c(2), \dots, c(m)$ 中恰有 t 个数， $s, t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

①若 $s \in \{0, 5\}$ 或 $t \in \{0, 5\}$ ，不妨设 $s = 0$ ，即 $r(i) < 0$ ， $i = 1, 2, \dots, 5$.

所以当 $a_{ij} = 1$ 时， $(i, j) \in H$.

由 A 中所有数不全相同，记数表 A 中 1 的个数为 a ，则 $a \geq 1$ ，且

$$f(A) = \frac{5^2 + r(1) + r(2) + \dots + r(5)}{2} = \frac{25 + a - (25 - a)}{2} = a, \quad H(A) \geq a.$$

$$\text{所以 } \frac{H(A)}{f(A)} \geq 1 > \frac{8}{9}.$$

②由①设 $s \notin \{0, 5\}$ 且 $t \notin \{0, 5\}$. 若 $s \in \{2, 3\}$ 或 $t \in \{2, 3\}$ ，不妨设 $s = 2$ ，则由 (II) 中结论知： $H(A) \geq 5t + 10 - 4t = 10 + t \geq 11$.

$$\text{因为 } 0 < f(A) = \frac{5^2 - |r(1) + r(2) + \dots + r(5)|}{2} \leq 12,$$

$$\text{所以 } \frac{H(A)}{f(A)} \geq \frac{11}{12} > \frac{8}{9}.$$

③由①②设 $s \notin \{0, 2, 3, 5\}$ 且 $t \notin \{0, 2, 3, 5\}$.

若 $\{s, t\} = \{1, 4\}$ ，则由 (II) 中结论知： $H(A) \geq 25 - 8 = 17$.

因为 $0 < f(A) \leq 12$ ，

$$\text{所以 } \frac{H(A)}{f(A)} \geq \frac{17}{12} > \frac{8}{9}.$$

若 $s=t$, $s \in \{1,4\}$, 不妨设 $s=t=1$, $r(1)>0$, $c(1)>0$, 且 $\frac{H(A)}{f(A)} < 1$, 由 (II)

中结论知: $H(A) \geq 8$. 所以 $f(A) > H(A) \geq 8$.

若数表 A 中存在 a_{ij} ($i, j \in \{2,3,4,5\}$) 为 1, 将其替换为 -1 后得到数表 A' .

因为 $H(A') = H(A) - 1$, $f(A') \geq f(A) - 1$,

所以 $\frac{H(A')}{f(A')} \leq \frac{H(A)-1}{f(A)-1} < \frac{H(A)}{f(A)}$.

所以将数表 A 中第 i 行第 j 列 ($i, j = 2,3,4,5$) 为 1 的数替换为 -1 后 $\frac{H(A)}{f(A)}$ 值变小.

所以不妨设 $a_{ij} = -1$ ($i, j = 2,3,4,5$).

因为 $H(A) \geq 5+5-2=8$, $f(A) \leq 9$,

所以 $\frac{H(A)}{f(A)} \geq \frac{8}{9}$.

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2024年1月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！



微信搜一搜

京考一点通

