清华附中朝阳学校 2019-2020 学年度第一学期第 2 次质量检测试卷

高三数学

一、 选择题

1. 已知集合 $A=\{x|x(x+1)\le 0\}$，集合 $B=\{x|\lg x<0\}$，则 $A\cup B=$ (　　)

A. $\{x|x<1\}$　　B. $\{x|-1<x\le 0\}$　　C. $\{x|-1\le x<1\}$　　D. $\{x|0<x<1\}$

2. 下列函数中，在定义域内是减函数的是 (　　)

A. $f(x)=\frac{1}{x}$　　B. $f(x)=\frac{1}{2^x}$　　C. $f(x)=\sqrt{x}$　　D. $f(x)=\lg|x|$

3. 若 $0<m<1$，则 (　　)

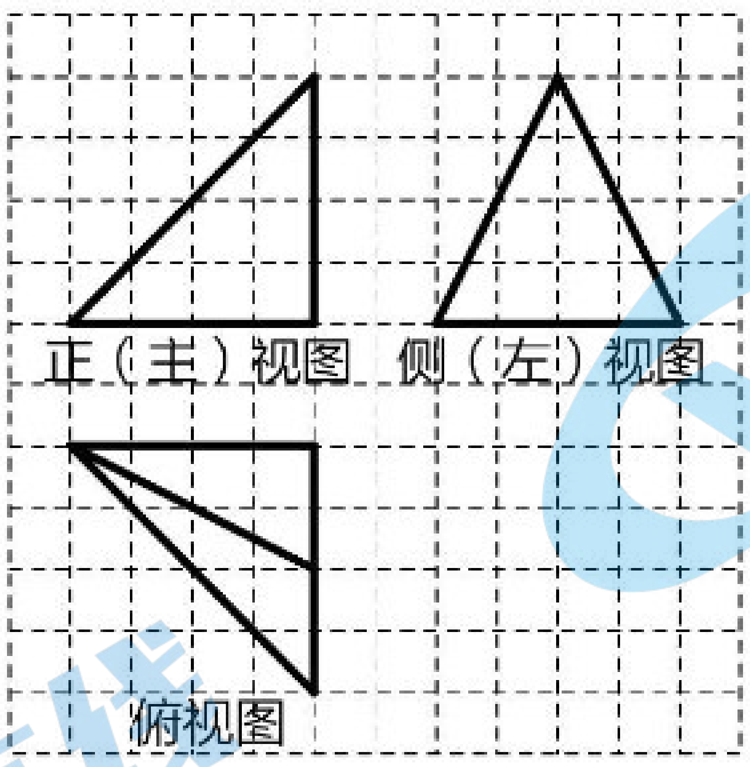
A. $\log_m(1+m)>\log_m(1-m)$　　B. $\log_m(1+m)>0$

C. $1-m>(1+m)^2$　　D. $(1-m)^{\frac{1}{3}}>(1-m)^{\frac{1}{2}}$

4. 将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后，得到一个偶函数的图象，则 φ 的一个可能取值为 (　　)

A. $\frac{3\pi}{4}$　　B. 0　　C. $-\frac{\pi}{4}$　　D. $-\frac{3\pi}{4}$

5. 在正方形网格中，某四面体的三视图如图所示，如果小正方形网格的边长为 1，那么该四面体最长棱的棱长为 (　　)



A. $2\sqrt{5}$　　B. $4\sqrt{2}$　　C. 6　　D. $4\sqrt{3}$

6. 设 a，b 是非零向量，则“$a=2b$”（晓观数学）是“$|a+b|\ge|a|+|b|$”的 (　　)

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 在$\triangle ABC$中，M是BC的中点，$AM=1$，点P在AM上且满足$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)=($　　$)$

A. $-\frac{4}{9}$　　　　B. $-\frac{4}{3}$　　　　C. $\frac{4}{3}$　　　　D. $\frac{4}{9}$

8. 过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个焦点$F$作一条与其渐近线垂直的直线，垂足为$A$. O为坐标原点，若$|OA|=\frac{1}{2}|OF|$. 则此双曲线的离心率为(　　)

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. 2　　　　D. $\sqrt{5}$

9. 若函数$f(x)=|x^2-k|-x+3$至多有一个零点，则实数k的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,3]$　　　　B. $[9,+\infty)$　　　　C. $(0,9]$　　　　D. $(-\infty,9]$

10. 在交通工程学中，常作如下定义：交通流量Q（辆/小时）：单位时间内通过道路上某一横断面的车辆数；车流速度V（千米/小时）：单位时间内车流平均行驶过的距离；车流密度K（辆/千米）：单位长度道路上某一瞬间所存在的车辆数. 一般的，V和K满足一个线性关系，如$V=v_0\left(1-\frac{K}{k_0}\right)$（其中$v_0$、$k_0$是正数），则以下说法正确的是(　　)

A. 随着车流密度增大，车流速度增大
B. 随着车流密度增大，交通流量增大
C. 随着车流密度增大，交通流量先减小，后增大
D. 随着车流密度增大，交通流量先增大，后减小

二、　填空题

11. 已知平面向量$\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(-1,3)$，若向量$\vec{a}\perp\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)$，则实数$\lambda$的值为______.

12. 圆C：$x^2+y^2+2x-2y-2=0$的圆心到直线$3x+4y+14=0$的距离是__________.

13. 已知函数$f(x)=\cos 2x$，若x_1,x_2满足$|f(x_1)-f(x_2)|=2$，则$|x_1-x_2|$的最小值是______.

14. 若函数$f(x)$满足下面（晓观数学）三个条件：

(1) $f(x)$在定义域上图象不间断；

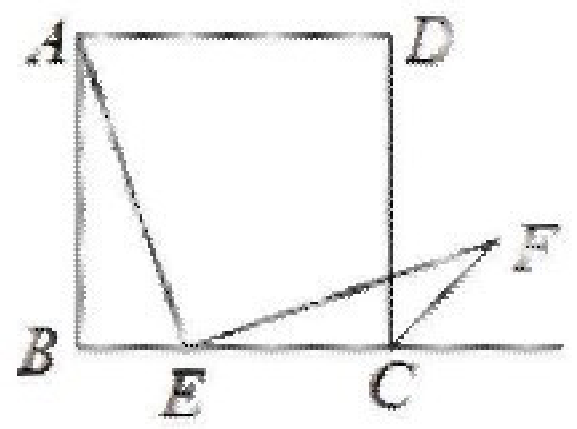
(2) $f(x)$在$(0,1)$上单调递增；

(3) $\forall x\in(0,1)$，都有$f(x)>x$，且$f(0)=0$，$f(1)=1$.

则称函数$f(x)$为"UP函数"，请写出一个UP函数$f(x)=$________________.

15. 若函数 $f(x)=\dfrac{a-\sin x}{\cos x}$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是____________.

16. 如图，已知边长为 4 的正方形 $ABCD$，E 是 BC 上一动点(与 B、C 不重合)，连接 AE. 作 $EF\perp AE$ 交 $\angle BCD$ 的外角平分线于 F. 设 $BE=x$. 记 $f(x)=\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{CF}$，则函数 $f(x)$ 的值域是____________. 当 $\triangle ECF$ 面积最大时，$\left|\overrightarrow{EF}\right|=$____________.



三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\cos x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-\sqrt{3}\sin x\cos x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调增区是；

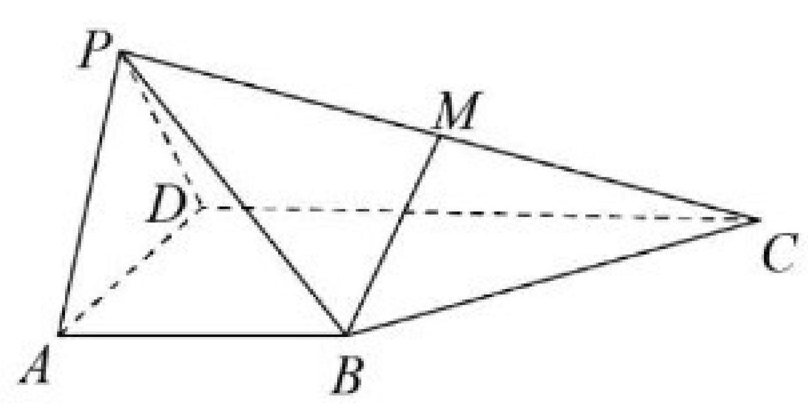
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上的最小值.

18. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，（晓观数学）平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$\triangle PAD$ 为等边三角形，$AB=AD=\dfrac{1}{2}CD$. $AB\perp AD$，$AB\,/\!/\,CD$，点 M 是 PC 的中点.

(1) 求证：$MB\,/\!/$ 平面 PAD.

(2) 求二面角 $P-BC-D$ 的余弦值.

(3) 在线段 PB 上是否存在点 N，使得 $DN\perp$ 平面 PBC？若存在，请求出 $\dfrac{PN}{PB}$ 的值；若不存在，请说明理由.



19. 已知函数 $f(x)=(x-1)e^x+ax^2$，$a\in R$.

(1)若函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 内单调递增，求实数 a 的取值范围.

(2)求函数 $f(x)$ 的极值.

20. 设 l 为曲线 $C:y=(x-2)\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线.（晓观数学）

(1)求 l 的方程；

(2)证明：曲线 C 与直线 l 只有一个公共点.

21. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点$A(2,1)$，且长轴长为$4\sqrt{2}$.

(1)求椭圆方程及离心率；

(2)设P、D、E为椭圆C上三个不同的点，且D、E关于y轴对称，直线PD、PE分别与y轴交于两个不同的点M、N，比较$|OP|^2$与$|OM|\cdot|ON|$的大小，并说明理由.

22. 数学$1,2,3,\cdots,n(n\geq 2)$的任意一个排列记作$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，设S_n为所有这样的排列构成的集合.

集合$A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S_n \mid 任意整数i,j,1\leq i<j\leq n,都有a_i-i\leq a_j-j\}$，集合

$B_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S_n \mid 任意整数i,j,1\leq i<j\leq n,都有a_i+i\leq a_j+j\}$

（1）用列举法表示集合A_3，B_3；

（2）求集合$A_n\cap B_n$的元素个数；

（3）记集合B_n的元素个数为b_n，证明：数列$\{b_n\}$是等比数列.（晓观数学）