大兴区 2023~2024 学年度第一学期高二期末检测

数　学

2024．1

1. 本试卷共 4 页，共两部分，21 道小题．满分 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 在试卷和答题卡上准确填写学校名称、班级、姓名和准考证号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他题用黑色字迹签字笔作答。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的长轴长为

（A）4　　（B）5

（C）6　　（D）9

（2）双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的渐近线方程为

（A）$y=\pm x$　　（B）$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

（C）$y=\pm\sqrt{2}x$　　（D）$y=\pm\dfrac{1}{2}x$

（3）若直线 l 的方向向量为 $(2,1,m)$，平面 α 的法向量为 $(1,\dfrac{1}{2},2)$，且 $l\perp\alpha$，则 $m=$

（A）1　　（B）2

（C）3　　（D）4

（4）两条平行直线 $x-y=0$ 与 $x-y-1=0$ 间的距离等于

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）1

（C）$\sqrt{2}$　　（D）2

（5）过点 (1，0) 且被圆 $x^2+(y+2)^2=1$ 截得的弦长最大的直线方程为

（A）$2x+y-2=0$　　（B）$2x-y-2=0$

（C）$x+2y-1=0$　　（D）$x-2y-1=0$

（6）圆 $C_1:x^2+y^2=2$ 与圆 $C_2:(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 的位置关系是

（A）相交　　（B）相离

（C）内切　　（D）外切

（7）采取随机模拟的方法估计气步枪学员击中目标的概率. 先由计算器算出 0 到 9 之间取整数值的随机数，规定 1，2，3，4 表示命中，5，6，7，8，9，0 表示不命中，以三个随机数为一组，代表三次射击击中的结果，经随机数模拟产生了 20 组随机数：

907 966 181 925 271 932 812 458 569 683

431 257 393 027 556 488 730 113 537 989

根据以上数据估计，该学员三次射击至少击中两次的概率为

（A）$\frac{3}{10}$　　（B）$\frac{7}{20}$

（C）$\frac{2}{5}$　　（D）$\frac{9}{20}$

（8）若方程 $\frac{x^2}{m-3}+\frac{y^2}{4-3m}=1$ 表示双曲线，则实数 m 的取值范围是

（A）$(-\infty,\frac{4}{3})\cup(3,+\infty)$　　（B）$(\frac{4}{3},3)$

（C）$(-\infty,-\frac{4}{3})\cup(3,+\infty)$　　（D）$(-\frac{4}{3},3)$

（9）已知 F_1, F_2 是双曲线 $C_1: x^2-\frac{y^2}{8}=1$ 与椭圆 C_2 的左、右公共焦点，A 是 C_1, C_2 在第一象限内的公共点，若 $|F_1F_2|=|F_1A|$，则 C_2 的离心率是

（A）$\frac{3}{5}$　　（B）$\frac{2}{5}$

（C）$\frac{1}{3}$　　（D）$\frac{2}{3}$

（10）平面内与定点 $F_1(-a,0), F_2(a,0)$ 距离之积等于 $a^2\,(a>0)$ 的动点的轨迹称为双纽线. 曲线 C 是当 $a=2\sqrt{2}$ 时的双纽线，P 是曲线 C 上的一个动点，则下列结论不正确的是

（A）曲线 C 关于原点对称

（B）满足 $|PF_1|=|PF_2|$ 的点 P 有且只有一个

（C）$|OP|\leqslant 4$

（D）若直线 $y=kx$ 与曲线 C 只有一个交点，则实数 k 的取值范围为 $(-1,1)$

第二部分（非选择题　共 110 分）

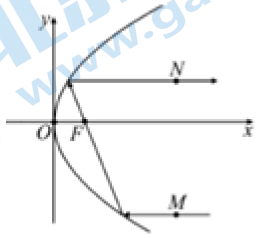
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）若 A, B 为互斥事件，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.3$，则 $P(A\cup B)=$________.

（12）经过原点 $(0,0)$ 且与直线 $3x+4y+5=0$ 垂直的直线方程为________.

（13）已知双曲线 $C: x^2-\dfrac{y^2}{m^2}=1(m>0)$ 是等轴双曲线，则 C 的右焦点坐标为______；C 的焦点到其渐近线的距离是_______.

（14）探照灯、汽车灯等很多灯具的反光镜是抛物面（其纵断面是抛物线的一部分），正是利用了抛物线的光学性质：由其焦点射出的光线经抛物线反射之后沿对称轴方向射出．如图，根据光路可逆性，在平面直角坐标系中，一条光线经过 $M(8,-6)$ 与 x 轴平行射到抛物线 $C: y^2=8x$ 上，经过两次反射后经过 $N(8, y_0)$ 射出，则光线从点 M 到 N 经过的总路程为_______；$y_0=$_______.



（15）画法几何的创始人法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆，我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆．已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，F_1，F_2 分别为椭圆的左、右焦点，A, B 为椭圆上两个动点．直线 l 的方程为 $bx+ay-a^2-b^2=0$. 给出下列四个结论：

①C 的蒙日圆的方程为 $x^2+y^2=3b^2$；

②在直线 l 上存在点 P，椭圆 C 上存在 A, B，使得 $PA \perp PB$；

③记点 A 到直线 l 的距离为 d，则 $d-|AF_2|$ 的最小值为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}b$；

④若矩形 $MNGH$ 的四条边均与 C 相切，则矩形 $MNGH$ 面积的最大值为 $6b^2$.

其中所有正确结论的序号为_______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

已知直线 l_1： $mx+8y+n=0$ 和 l_2： $2x+my-1=0$.

（Ⅰ）若 l_1 与 l_2 相交于点 $P(m,-1)$，求 m，n 的值；

（Ⅱ）若 $l_1 \,//\, l_2$，试确定 m，n 需要满足的条件.

（17）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 与经过左焦点 F_1 的一条直线交于 A，B 两点.

（Ⅰ）若 F_2 为右焦点，求 ΔABF_2 的周长；

（Ⅱ）若直线 AB 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$，求线段 AB 的长.

（18）（本小题 14 分）

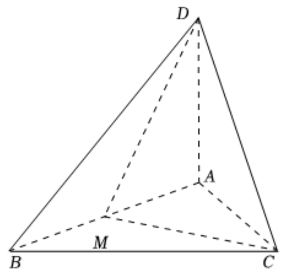
已知圆 C 经过点 $A(2,0)$，与直线 $x+y-2=0$ 相切，且圆心 C 在直线 $2x+y-1=0$ 上.

（Ⅰ）求圆 C 的方程；

（Ⅱ）已知直线 l 经过点 $(0,1)$，并且被圆 C 截得的弦长为 2，求直线 l 的方程.

（19）（本小题 14 分）

如图，在四面体 $ABCD$ 中， $AD\perp$ 平面 ABC，点 M 为棱 AB 的中点， $AB=AC=2$，$BC=2\sqrt{2}$, $AD=2$.



（Ⅰ）证明： $AC\perp BD$；

（Ⅱ）求平面 BCD 和平面 DCM 夹角的余弦值；

（Ⅲ）在线段 BD 上是否存在一点 P , 使得直线 PC 与平面 DCM 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$？若存在，求 $\dfrac{BP}{BD}$ 的值；若不存在, 请说明理由.

（20）（本小题 14 分）

已知抛物线 C： $y^2=2px\ (p>0)$，过 C 的焦点 F 且垂直于 x 轴的直线交 C 于不同的两点 P,Q，且 $|PQ|=4$.

（Ⅰ）求抛物线 C 的方程；

（Ⅱ）若过点 $M(0,2)$ 的直线 l 与 C 相交于不同的两点 A，B，N 为线段 AB 的中点，O 是坐标原点，且 ΔAOB 与 ΔMON 的面积之比为 $\sqrt{3}:1$，求直线 l 的方程.

（21）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上、下顶点为 B_2,B_1，左、右焦点为 F_1,F_2，四边形 $B_1F_1B_2F_2$ 是面积为 2 的正方形.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若 P 是椭圆 P 上异于 B_1， B_2 的点，判断直线 PB_1 和直线 PB_2 的斜率之积是否为定值？如果是，求出定值；如果不是，请说明理由；

（Ⅲ）已知圆 $x^2+y^2=\dfrac{2}{3}$ 的切线 l 与椭圆 C 相交于 D,E 两点，判断以 DE 为直径的圆是否经过定点？如果是，求出定点的坐标；如果不是，请说明理由.

2023~2024 学年第一学期期末检测试题参考答案与评分标准

高二数学

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	D	A	B	D	B	A	A	D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11） 0.5

（12） $4x-3y=0$

（13） $(\sqrt{2},0)$； 1

（14） 20； $\frac{8}{3}$

（15） ①②④

注：13、14 题第一空 3 分，第二空 2 分.

15 题选对一个 2 分，选对两个 3 分，选错 0 分.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 14 分）

解：（Ⅰ）将点 $P(m,-1)$ 代入两直线方程得：$m^2-8+n=0$ 且 $2m-m-1=0$，

解得 $m=1$，$n=7$. …………7 分

（Ⅱ）当 $m=0$ 时，直线 l_1 与 l_2 不平行；

当 $m\neq 0$ 时，由 $l_1 // l_2$ 得：$\begin{cases}-\frac{m}{8}=-\frac{2}{m}\\ -\frac{n}{8}\neq\frac{1}{m}\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}m=4\\ n\neq -2\end{cases}$，或 $\begin{cases}m=-4\\ n\neq 2\end{cases}$，

所以当 $m=4$ 且 $n\neq -2$，或 $m=-4$ 且 $n\neq 2$ 时，$l_1 // l_2$. …………7 分

（17）（共 14 分）

解:（Ⅰ）椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$，

由椭圆的定义，得 $|AF_1|+|AF_2|=2a=4$，$|BF_1|+|BF_2|=2a=4$，

又 $|AF_1|+|BF_1|=|AB|$，

所以 ΔABF_2 的周长为 $|AB|+|AF_2|+|BF_2|=4a=8$. ………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得 $F_1(-1,0)$，因为直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，则直线 AB 的斜率为 1，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，故直线 AB 的方程为 $y=x+1$，

由 $\begin{cases} y=x+1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 整理得 $7x^2+8x-8=0, \Delta=8^2-4\times7\times(-8)>0$，

由根与系数的关系得 $x_1+x_2=-\frac{8}{7}$，$x_1x_2=-\frac{8}{7}$，

则 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(-\frac{8}{7})^2-4\times(-\frac{8}{7})}=\frac{24}{7}$. …………8 分

（18）（共 14 分）

解:（Ⅰ）因为圆心 C 在直线 $2x+y-1=0$ 上，可设圆心为 $C(a,1-2a)$.

则点 C 到直线 $x+y-2=0$ 的距离 $d=\frac{|-a-1|}{\sqrt{2}}$.

据题意，$d=|AC|$，则 $\frac{|-a-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{(a-2)^2+(1-2a)^2}$，解得 $a=1$.

所以圆心为 $C(1,-1)$，半径 $r=d=\sqrt{2}$，

则所求圆的方程是 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$. …………7 分

（Ⅱ）直线 l 被圆 C 截得的弦长为 2，则 $2=2\sqrt{2-d'^2}$，

即圆心到直线 l 的距离 d' 为 1，

直线斜率不存在时，直线方程为 $x=0$，符合题意；

直线斜率 k 存在时，设直线方程为 $kx-y+1=0$，

圆心到直线的距离 $\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，$\therefore k=-\frac{3}{4}$，

所以直线方程为$3x+4y-4=0$.

综上所述，直线方程为$x=0$或$3x+4y-4=0$.……7 分

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为$AD\perp$平面ABC， $AC\subset$平面ABC，所以$AD\perp AC$，

因为$AB=AC=2, BC=2\sqrt{2}$，所以$AB^2+AC^2=BC^2$，

所以$AB\perp AC$.

又因为$AD\cap AB=A$，AD， $AB\subset$平面ABD，

所以$AC\perp$平面ABD，

因为$BD\subset$平面ABD，

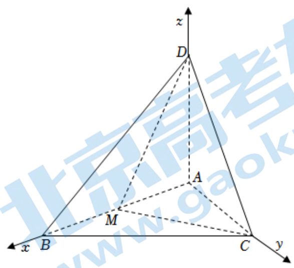
所以$AC\perp BD$.　　　　　　……4 分

（Ⅱ）因为$AD\perp$平面ABC， $AB\subset$平面ABC，所以$AD\perp AB$.

又因为$AD\perp AC$， $AB\perp AC$，

如图，以A为坐标原点，AB为x轴，AC为y轴，AD为z轴，建立空间直角坐标系，则$A(0,0,0)$， $M(1,0,0)$， $B(2,0,0)$， $C(0,2,0)$， $D(0,0,2)$，

$\overrightarrow{MC}=(-1,2,0)$， $\overrightarrow{MD}=(-1,0,2)$，



$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$， $\overrightarrow{BD}=(-2,0,2)$，

设$\vec{n}=(a,b,c)$是平面DCM的法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MC}=-a+2b=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MD}=-a+2c=0\end{cases}$，令$c=1$，得$\vec{n}=(2,1,1)$，

设平面BCD的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-2x+2y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=-2x+2z=0\end{cases}$，令$z=1$，则$\vec{m}=(1,1,1)$，

设平面BCD和平面DCM夹角为θ，则

$$\cos\theta=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}|=\frac{2\sqrt{2}}{3}，$$

所以平面 BCD 和平面 DCM 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. ……5 分

（III）设点 P 满足，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD}\,(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BD}=(2-2\lambda,0,2\lambda)$，

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=(2-2\lambda,-2,2\lambda)$.

若直线 PC 与平面 DCM 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

则 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}=|\cos<\overrightarrow{CP},\vec{n}>|=\dfrac{|2-2\lambda|}{\sqrt{8-8\lambda+8\lambda^2}\times\sqrt{6}}$，

化简得 $\lambda^2=-1$，所以 λ 无解.

所以在线段 BD 上不存在点 P，使得直线 PC 与平面 DCM 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. ……5 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由抛物线方程，得 P，Q 两点所在的直线方程为 $x=\dfrac{p}{2}$.

则 $|PQ|=2p=4$，故 $p=2$.

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ……5 分

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$N(x_0,y_0)$，$M(0,2)$，

显然直线 l 的斜率存在，设直线 l：$y=kx+2(k\neq0)$，联立 $\begin{cases}y^2=4x\\y=kx+2\end{cases}$，

消去 y 得 $k^2x^2-4(1-k)x+4=0$，

因为 $\Delta=16(1-k)^2-16k^2>0$，得 $k<\dfrac{1}{2}$ 且 $k\neq0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4(1-k)}{k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4}{k^2}$，

因为 $S_{\triangle AOB}=\sqrt{3}S_{\triangle MON}$，所以 $|AB|=\sqrt{3}|MN|$，

所以 $\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}\,|x_0-0|$，

即 $|x_1-x_2|=\sqrt{3}|x_0|$，

因为 N 是 AB 的中点，所以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，

所以 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=3\cdot\frac{(x_1+x_2)^2}{4}$，

整理得 $(x_1+x_2)^2=16x_1x_2$，

所以 $[\frac{4(1-k)}{k^2}]^2=\frac{64}{k^2}$，解得 $k_1=-1$，$k_2=\frac{1}{3}$，

所以直线 l 的方程为 $y=-x+2$ 或 $y=\frac{1}{3}x+2$.　……9 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）已知得 $2b=2c$，$a^2=2$，则 $b=c=1$，

则所求方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知：$B_1(0,-1)$，$B_2(0,1)$，

设 $P(m,n)$，则 $\frac{m^2}{2}+n^2=1$，

所以 $k_{PB_1}\cdot k_{PB_2}=\frac{n+1}{m}\cdot\frac{n-1}{m}=\frac{n^2-1}{m^2}=-\frac{1}{2}$.

所以直线 PB_1 和直线 PB_2 的斜率之积为定值 $-\frac{1}{2}$.…………5 分

（III）(i) 当直线 l 的斜率不存在时，

因为直线 l 与圆 M 相切，故其中的一条切线方程为 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

代入椭圆方程可得，可得 $D(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3})$，$E(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3})$，

则以 DE 为直径的圆的方程为 $(x-\frac{\sqrt{6}}{3})^2+y^2=\frac{2}{3}$.

(ii) 当直线 l 的斜率为 0 时，

因为直线 l 与圆 M 相切，所以其中的一条切线方程为 $y=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

代入椭圆方程可得，可得 $D(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3})$，$E(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3})$，

则以 DE 为直径的圆的方程为 $x^2+(y+\frac{\sqrt{6}}{3})^2=\frac{2}{3}$.

显然以上两圆都经过点 $O(0,0)$.

(iii) 当直线 l 的斜率存在且不为零时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$.

代入椭圆方程消去 y，得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

设 $D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{2k^2+1}$.

所以 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{m^2-2k^2}{2k^2+1}$.

所以 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{3m^2-2k^2-2}{2k^2+1}$ ①，

因为直线 l 和圆 M 相切，

所以圆心到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，整理，得 $m^2=\dfrac{2}{3}(1+k^2)$，②

将②代入①，得 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}=0$，显然以 DE 为直径的圆经过原点 $O(0,0)$，

综上可知，以 DE 为直径的圆过定点 $(0,0)$.　…………6 分