

2022 北京海淀实验中学高二（上）期末

数 学

一、选择题（每题 4 分）

1. 在复平面内，复数 $\frac{3i}{1-i}$ 对应的点在（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 下列直线中，倾斜角为 45° 的是（ ）

- A. $x+y-1=0$ B. $x+1=0$
C. $x-y+2=0$ D. $x-\sqrt{2}y-1=0$

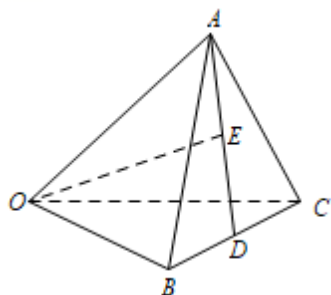
3. 若直线 $x-ay+1=0$ 与直线 $2x+y=0$ 垂直，则 a 值为（ ）

- A. 2 B. 1 C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} n+1, n \leq 3 \\ 2n, n > 3 \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，且 $a_n = 4$ ，那么 n 等于（ ）

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 2 或 3

5. 如图，在四面体 $O-ABC$ 中， $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ， D 为 BC 的中点， E 为 AD 的中点，则 \overrightarrow{OE} 可用向量 \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} 表示为（ ）



- A. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$
C. $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$ D. $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

6. 平面 α 与平面 β 平行的充分条件可以是（ ）

- A. 平面 α 内有一条直线与平面 β 平行
B. 平面 α 内有两条直线分别与平面 β 平行
C. 平面 α 内有无数条直线分别与平面 β 平行
D. 平面 α 内有两条相交直线分别与平面 β 平行

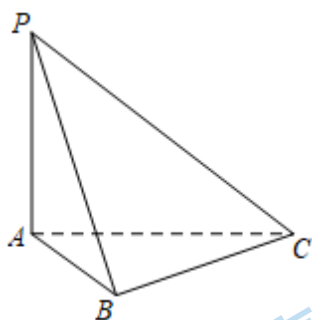
7. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线经过点 $(\sqrt{3}, 1)$ ，则双曲线的离心率为（ ）

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

8. 已知球 O 的半径为 2，球心到平面 α 的距离为 1，则球 O 被平面 α 截得的截面面积为 ()

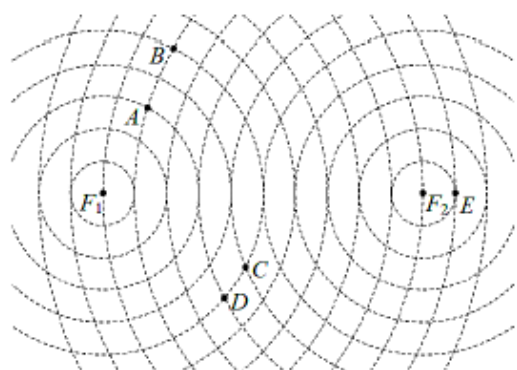
- A. $2\sqrt{3}\pi$ B. 3π C. $\sqrt{3}\pi$ D. π

9. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp AC$ ， $PA = \sqrt{2}$ ， $AB = AC = 2$ ，则点 A 到平面 PBC 的距离为 ()



- A. 1 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

10. 如图， F_1, F_2 是平面上的两点，且 $|F_1F_2| = 10$ ，图中的一系列圆是圆心分别为 F_1, F_2 的两组同心圆，每组同心圆的半径分别是 1, 2, 3, \dots ， A, B, C, D, E 是图中两组同心圆的部分公共点，若点 A 在以 F_1, F_2 为焦点的椭圆 M 上，则 ()



- A. 点 B 和 C 都在椭圆 M 上 B. 点 C 和 D 都在椭圆 M 上
C. 点 D 和 E 都在椭圆 M 上 D. 点 E 和 B 都在椭圆 M 上

11. 设 P 为直线 $y = kx + 2$ 上任意一点，过 P 总能作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线，则 k 的最大值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

12. 某综合实践小组设计了一个“双曲线型花瓶”. 他们的设计思路是将某双曲线的一部分 (图 1 中 A, C 之间的曲线) 绕其虚轴所在直线 l 旋转一周，得到花瓶的侧面，花瓶底部是平整的圆面，如图 2. 该小组给出了图 1 中的相关数据: $AA_1 = 13\text{cm}$, $BB_1 = 12\text{cm}$, $CC_1 = 20\text{cm}$, $A_1B_1 = 15\text{cm}$, $B_1C_1 = 48\text{cm}$ ，其中 B 是双曲线的一个顶点. 小组中甲、乙、丙、丁四位同学分别用不同的方法估算了该花瓶的容积 (忽略瓶壁和底部的厚度)，结果如下表所示

学生	甲	乙	丙	丁
----	---	---	---	---

估算结果 (cm^3)	25200π	17409π	14889π	13809π
-----------------	------------	------------	------------	------------

其中估算结果最接近花瓶的容积的同学是 () (参考公式: $V_{\text{圆柱}} = \pi R^2 h$, $V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$,

$$V_{\text{圆台}} = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + rR + R^2)$$

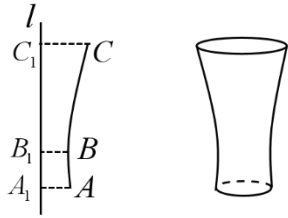


图1

图2

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

二、填空题 (每题 5 分)

13. 复数 $i(1+i)$ 的实部为_____.

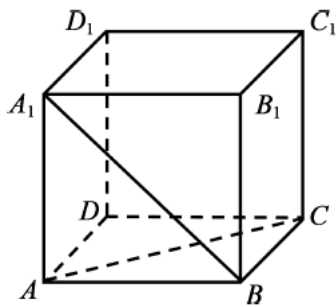
14. 圆 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$ 的圆心坐标为_____; 半径为_____.

15. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} =$ _____.

16. 若直线 $ax - 3y + 1 = 0$ 与直线 $2x + y + 2 = 0$ 平行, 则实数 a 的值是_____.

17. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_n = 1 - \frac{1}{a_{n-1}} (n \geq 2)$, 则 $a_{2022} =$ _____.

18. 如图, 若正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 则异面直线 AC 与 A_1B 所成的角的大小是_____; 直线 A_1B 和底面 $ABCD$ 所成的角的大小是_____.



19. 若抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点 P 到 y 轴的距离是 4, 则点 P 到该抛物线焦点的距离是_____.

20. 已知双曲线 M 的中心在原点, 以坐标轴为对称轴. 从以下三个条件中任选两个条件, 并根据所选条件求双曲线 M 的标准方程. ①一个焦点坐标为 $(2, 0)$; ②经过点 $(\sqrt{3}, 0)$; ③离心率为 $\sqrt{2}$. 你选择的两个条件是_____, 得到的双曲线 M 的标准方程是_____.

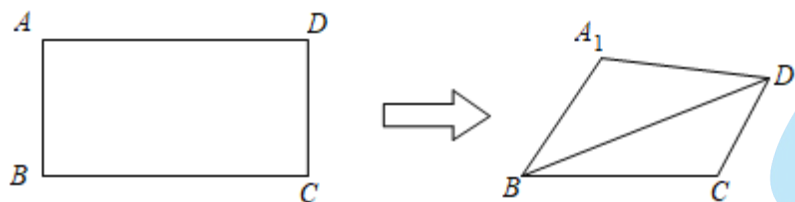
21. 椭圆 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的右焦点为 F , 过原点的直线与椭圆 C 交于两点 A 、 B , 则 $\triangle ABF$ 的面积的最大值为_____.

22. 关于方程 $xy(x+y) = 2020$ 所表示的曲线, 下列说法正确的是_____.

①关于 x 轴对称；②关于 y 轴对称；③关于原点对称；④关于直线 $y = x$ 对称.

23. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 - 2n + 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____.

24. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 所在的直线进行翻折, 得到空间四边形 A_1BCD .



给出下面三个结论:

①在翻折过程中, 存在某个位置, 使得 $A_1C \perp BD$;

②在翻折过程中, 三棱锥 A_1-BCD 的体积不大于 $\frac{1}{4}$;

③在翻折过程中, 存在某个位置, 使得异面直线 A_1D 与 BC 所成角 45° .

其中所有正确结论的序号是_____.

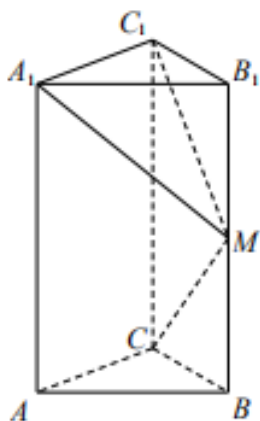
三、解答题 (8分+12分+10分+12分=42分)

25. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 O 以原点为圆心, 且经过点 $M(1, \sqrt{3})$.

(1) 求圆 O 的方程;

(2) 若直线 $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$ 与圆 O 交于两点 A, B , 求弦长 $|AB|$.

26. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$, $AC = BC = 1$, $AA_1 = 2$. M 为侧棱 BB_1 中点, 连接 A_1M , C_1M , CM .



(1) 证明: $AC \parallel$ 平面 A_1C_1M ;

(2) 证明: $CM \perp$ 平面 A_1C_1M ;

(3) 求二面角 $C_1-A_1M-B_1$ 的大小.

27. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $(1, 2)$.

(1) 求抛物线 C 的方程及其准线方程;

(2) 经过抛物线 C 的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于两点 M, N , 且与抛物线的准线交于点 Q . 若 $|MN| = 2\sqrt{2}|QF|$, 求直线 l 的方程.

28. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 一个焦点为 $(2, 0)$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设 O 为原点, 直线 $y = x + m$ ($m \neq 0$) 与椭圆 E 交于不同的两点 A, B , 且与 x 轴交于点 C , P 为线段 OC 的中点, 点 B 关于 x 轴的对称点为 B_1 . 证明: $\triangle PAB_1$ 是等腰直角三角形.

参考答案

一、选择题（每题4分）

1. 在复平面内，复数 $\frac{3i}{1-i}$ 对应的点在（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】根据复数的除法运算算出 $\frac{3i}{1-i}$ ，然后可得答案.

【详解】 $\frac{3i}{1-i} = \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-3+3i}{2}$ ，其对应的点为 $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ，位于第二象限

故选：B

2. 下列直线中，倾斜角为 45° 的是（ ）

- A. $x+y-1=0$ B. $x+1=0$
C. $x-y+2=0$ D. $x-\sqrt{2}y-1=0$

【答案】C

【解析】

【分析】由直线倾斜角得出直线斜率，再由直线方程求出直线斜率，即可求解.

【详解】由直线的倾斜角为 45° ，可知直线的斜率为 $k=1$ ，

对于 A，直线斜率为 $k=-1$ ，

对于 B，直线无斜率，

对于 C，直线斜率 $k=1$ ，

对于 D，直线斜率 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

故选：C

3. 若直线 $x-ay+1=0$ 与直线 $2x+y=0$ 垂直，则 a 的值为（ ）

- A. 2 B. 1 C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】根据两条直线垂直的条件列方程，解方程求得 a 的值.

【详解】由于直线 $x-ay+1=0$ 与直线 $2x+y=0$ 垂直，所以 $1 \times 2 + (-a) \times 1 = 0$ ，解得 $a=2$ 。

故选：A

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} n+1, n \leq 3 \\ 2n, n > 3 \end{cases}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，且 $a_n = 4$ ，那么 n 等于（ ）

A. 2

B. 3

C. 4

D. 2 或 3

【答案】B

【解析】

【分析】由 $\{a_n\}$ 通项公式，将 $a_n = 4$ 代入求 n 值，注意 n 的范围，即可确定 n 值.

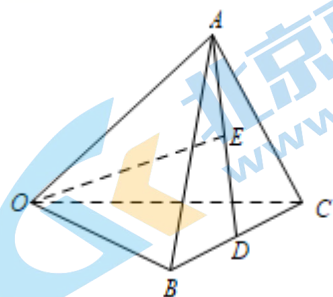
【详解】由题设，若 $a_n = n + 1 = 4$ ，可得 $n = 3 \in \{n | n \leq 3, n \in \mathbb{N}^*\}$ ，

若 $a_n = 2n = 4$ ，可得 $n = 2 \notin \{n | n > 3, n \in \mathbb{N}^*\}$ ，

所以 $n = 3$.

故选：B

5. 如图，在四面体 $O-ABC$ 中， $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ， D 为 BC 的中点， E 为 AD 的中点，则 \overrightarrow{OE} 可用向量 \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} 表示为 ()



A. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

C. $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

D. $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用空间向量的基本定理，用 \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} 表示向量 \overrightarrow{OE} .

【详解】因为 D 是 BC 的中点， E 是 AD 的中点，

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \quad \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}.$$

故选：B

6. 平面 α 与平面 β 平行的充分条件可以是 ()

A. 平面 α 内有一条直线与平面 β 平行

B. 平面 α 内有两条直线分别与平面 β 平行

C. 平面 α 内有无数条直线分别与平面 β 平行

D. 平面 α 内有两条相交直线分别与平面 β 平行

【答案】D

【解析】

【分析】根据平面与平面平行的判定定理可判断.

【详解】对 A，若平面 α 内有一条直线与平面 β 平行，则平面 α 与平面 β 可能平行或相交，故 A 错误；

对 B，若平面 α 内有两条直线分别与平面 β 平行，若这两条直线平行，则平面 α 与平面 β 可能平行或相交，故 B 错误；

对 C，若平面 α 内有无数条直线分别与平面 β 平行，若这无数条直线互相平行，则平面 α 与平面 β 可能平行或相交，故 C 错误；

对 D，若平面 α 内有两条相交直线分别与平面 β 平行，则根据平面与平面平行的判定定理可得平面 α 与平面 β 平行，故 D 正确.

故选：D.

7. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线经过点 $(\sqrt{3}, 1)$ ，则双曲线的离心率为 ()

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】先求出渐近线方程，进而将点 $(\sqrt{3}, 1)$ 代入直线方程得到 a, b 关系，进而求出离心率.

【详解】由题意，双曲线的渐近线方程为： $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，而一条渐近线过点 $(\sqrt{3}, 1)$ ，则 $1 = \frac{\sqrt{3}b}{a}$ ，

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

故选：A.

8. 已知球 O 的半径为 2，球心到平面 α 的距离为 1，则球 O 被平面 α 截得的截面面积为 ()

A. $2\sqrt{3}\pi$

B. 3π

C. $\sqrt{3}\pi$

D. π

【答案】B

【解析】

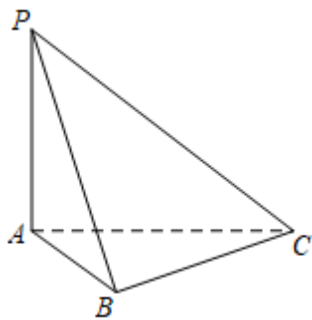
【分析】根据球的性质可求出截面圆的半径即可求解.

【详解】由球的性质可知，截面圆的半径为 $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ，

$$\text{所以截面的面积 } S = \pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi.$$

故选：B

9. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp AC$ ， $PA = \sqrt{2}$ ， $AB = AC = 2$ ，则点 A 到平面 PBC 的距离为 ()



A. 1

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】设点A到平面PBC的距离为h，根据等体积法求解即可。

【详解】因为PA⊥平面ABC，

所以PA⊥AB, PA⊥AC，

因为PA=√2，AB=AC=2，

$$\text{所以 } PB = PC = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$$

又AB⊥AC，AB=AC=2，

$$\text{所以 } BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} BC \cdot \sqrt{(\sqrt{6})^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

设点A到平面PBC的距离为h，

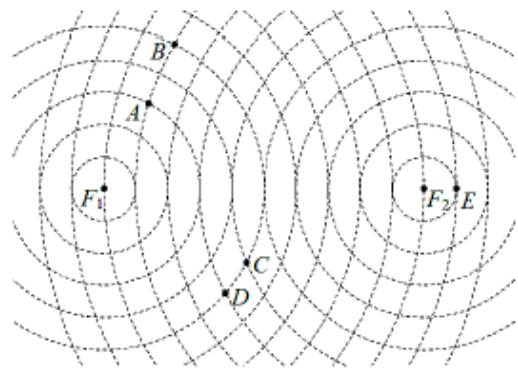
$$\text{则 } V_{P-ABC} = V_{A-PBC}$$

$$\text{即 } \frac{1}{3} PA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} h \cdot S_{\triangle PBC}$$

$$\therefore h = \frac{\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2}{2\sqrt{2}} = 1$$

故选：A

10. 如图， F_1, F_2 是平面上的两点，且 $|F_1F_2|=10$ ，图中的一系列圆是圆心分别为 F_1, F_2 的两组同心圆，每组同心圆的半径分别是1, 2, 3, …, A, B, C, D, E是图中两组同心圆的部分公共点，若点A在以 F_1, F_2 为焦点的椭圆M上，则（ ）



- A. 点 B 和 C 都在椭圆 M 上
 B. 点 C 和 D 都在椭圆 M 上
 C. 点 D 和 E 都在椭圆 M 上
 D. 点 E 和 B 都在椭圆 M 上

【答案】C

【解析】

【分析】由 $|AF_1| + |AF_2| = 3 + 9 = 12$ ，即椭圆中的 $2a = 12$ ，然后根据定义逐一判断即可。

【详解】因为点 A 在以 F_1, F_2 为焦点的椭圆 M 上，

所以 $|AF_1| + |AF_2| = 3 + 9 = 12$ ，即椭圆中的 $2a = 12$

因为 $|BF_1| + |BF_2| = 5 + 9 = 14 \neq 12$ ， $|CF_1| + |CF_2| = 5 + 6 = 11 \neq 12$

$|DF_1| + |DF_2| = 5 + 7 = 12$ ， $|EF_1| + |EF_2| = 11 + 1 = 12$

所以 D, E 在椭圆 M 上

故选：C

11. 设 P 为直线 $y = kx + 2$ 上任意一点，过 P 总能作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线，则 k 的最大值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，判断点 P 与圆的位置关系以及直线与圆的位置关系，根据直线与圆的位置关系，即可求得 k 的最大值。

【详解】因为过 P 总能作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线，故点 P 在圆外或圆上，

也即直线 $y = kx + 2$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相离或相切，

则 $\frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}} \geq 1$ ，即 $k^2 + 1 \leq 4$ ，解得 $k \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ，

故 k 的最大值为 $\sqrt{3}$ 。

故选：D。

12. 某综合实践小组设计了一个“双曲线型花瓶”. 他们的设计思路是将某双曲线的一部分 (图 1 中 A, C 之间的曲线) 绕其虚轴所在直线 l 旋转一周，得到花瓶的侧面，花瓶底部是平整的圆面，如图 2. 该小组给出了图 1 中的相关

数据: $AA_1 = 13\text{cm}$, $BB_1 = 12\text{cm}$, $CC_1 = 20\text{cm}$, $A_1B_1 = 15\text{cm}$, $B_1C_1 = 48\text{cm}$, 其中 B 是双曲线的一个顶点.

小组中甲、乙、丙、丁四位同学分别用不同的方法估算了该花瓶的容积 (忽略瓶壁和底部的厚度), 结果如下表所示

学生	甲	乙	丙	丁
估算结果 (cm^3)	25200π	17409π	14889π	13809π

其中估算结果最接近花瓶的容积的同学是 () (参考公式: $V_{\text{圆柱}} = \pi R^2 h$, $V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$,

$$V_{\text{圆台}} = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + rR + R^2)$$

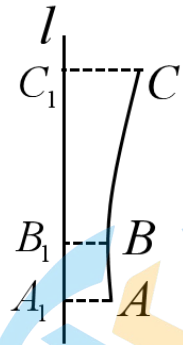


图1



图2

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【答案】D

【解析】

【分析】根据几何体可分割为圆柱和曲边圆锥, 利用圆柱和圆锥的体积公式对几何体的体积进行估计即可.

【详解】可将几何体看作一个以 $BB_1 = 12\text{cm}$ 为半径, 高为 $B_1C_1 + A_1B_1 = 48 + 15 = 63\text{cm}$ 的圆柱, 再加上两个曲边圆锥, 其中底面半径分别为 $20 - 12 = 8\text{cm}$, $13 - 12 = 1\text{cm}$, 高分别为 48cm , 15cm ,

$$V_{\text{圆柱}} = \pi \times 12^2 \times 63 = 9072\pi (\text{cm}^3),$$

$$V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \pi \times (8^2 \times 48 + 1^2 \times 15) = 1029 (\text{cm}^3),$$

所以花瓶的容积 $9072\pi \text{cm}^3 < V < 10101\pi \text{cm}^3$,

故最接近的是丁同学的估算,

故选: D

二、填空题 (每题 5 分)

13. 复数 $i(1+i)$ 的实部为_____.

【答案】-1

【解析】

【详解】复数 $i(1+i) = i - 1 = -1 + i$, 其实部为 -1.

考点：复数的乘法运算、实部.

14. 圆 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$ 的圆心坐标为_____；半径为_____.

【答案】 ①. (1,-3) ②. 1

【解析】

【分析】配方后可得圆心坐标和半径.

【详解】将圆的一般方程化为圆标准方程是 $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 1$,
圆心坐标为(1,-3), 半径为1.

故答案为: (1,-3); 1.

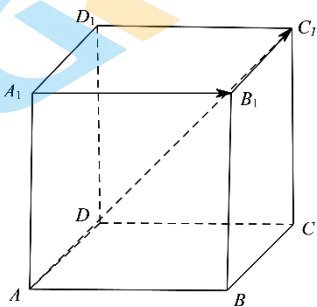
15. 在棱长为1的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】根据向量的加法及向量数量积的运算性质求解.

【详解】如图, 在正方体中,



$$\therefore \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1}) \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 + 0 + 0 = 1,$$

故答案为: 1

16. 若直线 $ax - 3y + 1 = 0$ 与直线 $2x + y + 2 = 0$ 平行, 则实数 a 的值是_____.

【答案】 -6

【解析】

【分析】利用一般式方程中两直线平行的条件, 即可得解.

【详解】 \because 直线 $ax - 3y + 1 = 0$ 与直线 $2x + y + 2 = 0$ 平行,

$$\therefore \frac{a}{2} = \frac{-3}{1} \neq \frac{1}{2}, \text{ 解得 } a = -6.$$

故答案为: -6.

【点睛】本题考查一般式方程中两直线平行的条件, 属于基础题. 若两条直线的方程是用一般式给出的, 设直线 l_1, l_2 的方程分别为 $A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 则两直线平行与垂直的结论如下: (1) 若 $l_1 \parallel l_2$, 当斜率存在

时, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$; 当斜率不存在时, $B_1 = B_2 = 0$ 且 $\frac{C_1}{A_1} \neq \frac{C_2}{A_2}$; (2) 若 $l_1 \perp l_2$, 当斜率存在时, $\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = -1$;

当斜率不存在时, $A_1 = 0, B_2 = 0$ 或 $A_2 = 0, B_1 = 0$.

17. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_n = 1 - \frac{1}{a_{n-1}} (n \geq 2)$, 则 $a_{2022} =$ _____.

【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

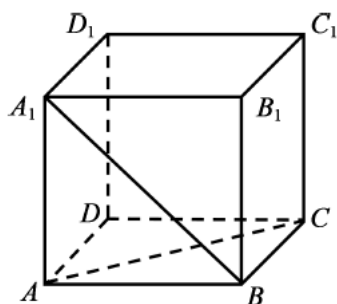
【分析】由递推式可得 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的数列, 再应用周期性求 a_{2022} .

【详解】由题设, $a_2 = 1 - \frac{1}{a_1} = -3$, $a_3 = 1 - \frac{1}{a_2} = \frac{4}{3}$, $a_4 = 1 - \frac{1}{a_3} = \frac{1}{4}$, ...

所以 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的数列, 故 $a_{2022} = a_{674 \times 3} = a_3 = \frac{4}{3}$.

故答案为: $\frac{4}{3}$

18. 如图, 若正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 则异面直线 AC 与 A_1B 所成的角的大小是 _____; 直线 A_1B 和底面 $ABCD$ 所成的角的大小是 _____.



【答案】 ①. $\frac{\pi}{3}$ ②. $\frac{\pi}{4}$.

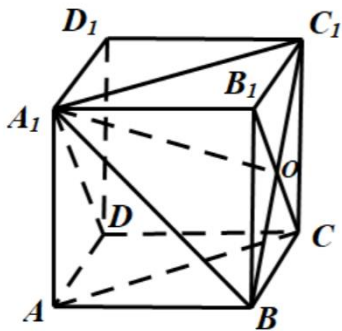
【解析】

【分析】

①通过平行关系, 直线 A_1B 与直线 AC 所成角即直线 A_1B 与直线 A_1C_1 所成角, 解三角形即可得解;

②根据线面角定义, 通过垂直关系找出线面角即可.

【详解】作图: 连接 B_1C, BC_1 交 B_1C 于 O , 连接 A_1O



①在正方体中， $A_1B=BC_1=A_1C_1$ ，易得 $\triangle A_1BC_1$ 为等边三角形， $\angle BA_1C_1 = \frac{\pi}{3}$

由 AA_1 与 CC_1 平行且相等，则四边形 ACC_1A_1 为平行四边形， $CA \parallel C_1A_1$ ，

直线 A_1B 与直线 AC 所成角即直线 A_1B 与直线 A_1C_1 所成角，

所以所成角为 $\frac{\pi}{3}$ ；

②正方体中， $A_1A \perp$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $\angle A_1BA$ 就是直线 A_1B 和平面 $ABCD$ 所成的角

由于 $AA_1 = AB$ ， $A_1A \perp AB$ ， $\triangle AA_1B$ 等腰直角三角形，所以 $\angle A_1BA = \frac{\pi}{4}$ ，

所以直线 A_1B 和底面 $ABCD$ 所成的角的大小 $\frac{\pi}{4}$ 。

故答案为：① $\frac{\pi}{3}$ ；② $\frac{\pi}{4}$ 。

【点睛】此题考查求异面直线所成的角和直线与平面所成角，通过平行线求异面直线夹角，通过垂直关系根据定义找出线面角即可求解。

19. 若抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点 P 到 y 轴的距离是4，则点 P 到该抛物线焦点的距离是_____。

【答案】5

【解析】

【分析】根据抛物线的定义知点 P 到焦点距离等于到准线的距离即可求解。

【详解】因为抛物线方程为 $y^2 = 4x$ ，

所以准线方程为 $x = -1$ ，

所以点 P 到准线的距离为 $4+1=5$ ，

故点 P 到该抛物线焦点的距离5。

故答案为：5

20. 已知双曲线 M 的中心在原点，以坐标轴为对称轴.从以下三个条件中任选两个条件，并根据所选条件求双曲线 M 的标准方程.①一个焦点坐标为 $(2,0)$ ；②经过点 $(\sqrt{3},0)$ ；③离心率为 $\sqrt{2}$.你选择的两个条件是_____，得到的双曲线 M 的标准方程是_____。

【答案】 ①. ①②或①③或②③ ②. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 或 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 或 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$

【解析】

【分析】选①②，根据焦点坐标及顶点坐标直接求解，选①③，根据焦点坐标及离心率求出 a, c 即可得解，选②③，可由顶点坐标及离心率得出 a, c ，即可求解。

【详解】选①②，由题意则 $c = 2, a = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 1,$$

$$\therefore \text{双曲线的标准方程为 } \frac{x^2}{3} - y^2 = 1,$$

$$\text{故答案为: } \textcircled{1}\textcircled{2}; \frac{x^2}{3} - y^2 = 1,$$

选①③，由题意， $c = 2, e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$ ，

$$\therefore a = \sqrt{2},$$

$$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 2,$$

$$\therefore \text{双曲线的标准方程为 } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1,$$

选②③，由题意知 $a = \sqrt{3}, e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$ ，

$$\therefore c = \sqrt{6},$$

$$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 3,$$

$$\therefore \text{双曲线的标准方程为 } \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

故答案为: $\textcircled{1}\textcircled{2}; \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 或 $\textcircled{1}\textcircled{3}; \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 或 $\textcircled{2}\textcircled{3}; \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$.

21. 椭圆 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的右焦点为 F ，过原点的直线与椭圆 C 交于两点 A, B ，则 $\triangle ABF$ 的面积的最大值为

【答案】 4

【解析】

【分析】分析可知点 A, B 关于原点对称，可知当 A, B 为椭圆 C 短轴的端点时， $\triangle ABF$ 的面积取得最大值。

【详解】在椭圆 C 中， $a = 2\sqrt{2}, b = 2$ ，则 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$ ，则 $F(2, 0)$ ，

由题意可知， A, B 关于原点对称，

当 A, B 为椭圆 C 短轴的端点时， $\triangle ABF$ 的面积取得最大值，且最大值为 $\frac{1}{2} \times c \times 2b = 4$ 。

故答案为: 4.

22. 关于方程 $xy(x+y)=2020$ 所表示的曲线, 下列说法正确的是_____.

①关于 x 轴对称; ②关于 y 轴对称; ③关于原点对称; ④关于直线 $y=x$ 对称.

【答案】④

【解析】

【分析】将方程中的 x 换为 y , y 换为 x 方程变为 $xy^2+x^2y=2020$ 与原方程相同, 故曲线关于直线 $y=x$ 对称.

【详解】 $xy(x+y)=2020 \Rightarrow x^2y+xy^2=2020$,

将点 $(x, -y)$ 代入曲线方程得 $-x^2y+xy^2=2020$, 与原方程不同, 故曲线不关于 x 轴对称;

将 $(-x, y)$ 代入曲线方程得 $x^2y-xy^2=2020$, 与原方程不同, 故曲线不关于 y 轴对称;

将 $(-x, -y)$ 代入曲线方程得 $-x^2y-xy^2=2020$, 与原方程不同, 故曲线不关于原点对称;

将 (y, x) 代入曲线方程得 $x^2y+xy^2=2020$, 与原方程相同, 故曲线关于直线 $y=x$ 对称;

故答案为: ④.

23. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3n^2-2n+1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=_____$.

【答案】 $\begin{cases} 2, n=1, \\ 6n-5, n \geq 2 \end{cases}$

【解析】

【分析】利用数列通项与前 n 项和的关系求解即可.

【详解】当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=3 \times 1^2-2 \times 1+1=2$;

当 $n \geq 2$ 时,

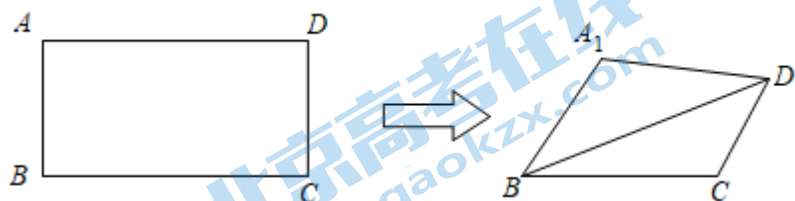
$a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2-2n+1-[3(n-1)^2-2(n-1)+1]=6n-5$,

显然当 $n=1$ 时, 不满足上式.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases} 2, n=1, \\ 6n-5, n \geq 2. \end{cases}$

故答案为: $\begin{cases} 2, n=1, \\ 6n-5, n \geq 2 \end{cases}$

24. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1$, $AD=\sqrt{3}$, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 所在的直线进行翻折, 得到空间四边形 A_1BCD .



给出下面三个结论:

①在翻折过程中, 存在某个位置, 使得 $A_1C \perp BD$;

②在翻折过程中, 三棱锥 A_1-BCD 的体积不大于 $\frac{1}{4}$;

③在翻折过程中，存在某个位置，使得异面直线 A_1D 与 BC 所成角为 45° 。

其中所有正确结论的序号是_____。

【答案】②③

【解析】

【分析】在矩形 $ABCD$ 中，过 A, C 点作 BD 的垂线，垂足分别为 E, F ，对于①，连接 CE ，假设存在某个位置，使得 $A_1C \perp BD$ ，则可得到 $BD \perp CE$ ，进而得矛盾，可判断；对于②在翻折过程中，当平面 $A_1BD \perp$ 平面 BCD

时，三棱锥 A_1-BCD 的体积取得最大值，再根据几何关系计算即可；对于③，由题知 $\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{A_1E} + \overrightarrow{ED}$ ，

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC}$ ，设平面 A_1BD 与平面 BCD 所成的二面角为 θ ，进而得 $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{9}{4} \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$ ，进而

得异面直线 A_1D 与 BC 所成角的余弦值的范围为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ，即可判断。

【详解】解：如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，过 A, C 点作 BD 的垂线，垂足分别为 E, F ，

则在在翻折过程中，形成如图 2 的几何体，

故对于①，连接 CE ，假设存在某个位置，使得 $A_1C \perp BD$ ，由于 $A_1E \perp BD$ ， $A_1C \cap A_1E = A_1$ ，

所以 $BD \perp$ 平面 A_1CE ，所以 $BD \perp CE$ ，这与图 1 中的 BD 与 CE 不垂直矛盾，故错误；

对于②在翻折过程中，当平面 $A_1BD \perp$ 平面 BCD 时，三棱锥 A_1-BCD 的体积取得最大值，此时

$A_1E = \frac{AD \cdot AB}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，体积为 $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCD} \cdot A_1E = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}$ ，故三棱锥 A_1-BCD 的体积不大于

$\frac{1}{4}$ ，故正确；

对于③， $\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{A_1E} + \overrightarrow{ED}$ ， $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC}$ ，由②的讨论得 $AE = DF = \frac{1}{2}$ ， $EF = 1$ ，

所以 $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BF}$ ，

所以 $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{A_1E} + \overrightarrow{ED})(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC}) = \overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{EA_1} \cdot \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{BF}$

$= -|\overrightarrow{EA_1}| \cdot |\overrightarrow{FC}| \cos \langle \overrightarrow{EA_1}, \overrightarrow{FC} \rangle + |\overrightarrow{ED}| \cdot |\overrightarrow{BF}| = -\frac{3}{4} \cos \langle \overrightarrow{EA_1}, \overrightarrow{FC} \rangle + \frac{9}{4}$ ，

设翻折过程中，平面 A_1BD 与平面 BCD 所成的二面角为 θ ，

所以 $\langle \overrightarrow{EA_1}, \overrightarrow{FC} \rangle = \theta$ ，故 $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{3}{4} \cos \theta + \frac{9}{4}$ ，

由于要使直线 A_1D 与 BC 异面直线，所以 $\theta \in (0, \pi)$ ，

所以 $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{3}{4} \cos \theta + \frac{9}{4} \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$ ，

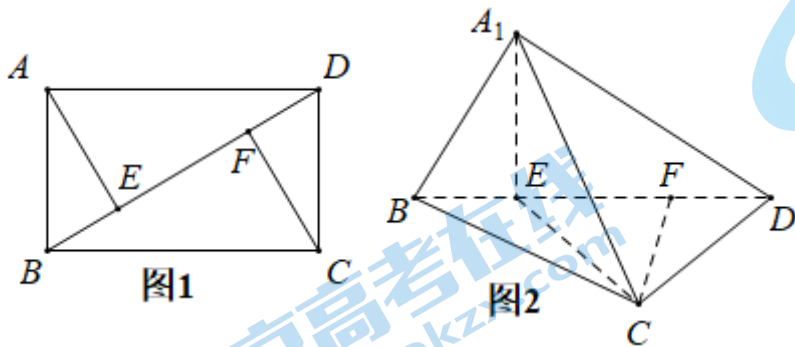
所以 $\left| \cos \langle \overrightarrow{A_1D}, \overrightarrow{BC} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{A_1D}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-\frac{3}{4} \cos \theta + \frac{9}{4}}{3} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ，

所以异面直线 A_1D 与 BC 所成角的余弦值的范围为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

由于 $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

所以在翻折过程中, 存在某个位置, 使得异面直线 A_1D 与 BC 所成角为 45° .

故答案为: ②③



三、解答题 (8分+12分+10分+12分=42分)

25. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 O 以原点为圆心, 且经过点 $M(1, \sqrt{3})$.

(1) 求圆 O 的方程;

(2) 若直线 $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$ 与圆 O 交于两点 A, B , 求弦长 $|AB|$.

【答案】 (1) $x^2 + y^2 = 4$

(2) $|AB| = 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 (1) 根据两点距离公式即可求半径, 进而得圆方程;

(2) 根据直线与圆的弦长公式即可求解.

【小问 1 详解】

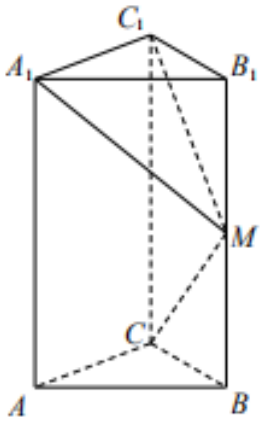
由 $|OM| = \sqrt{1+3} = 2$, 所以圆 O 的方程为 $x^2 + y^2 = 4$;

【小问 2 详解】

由点 O 到直线 $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$ 距离为 $d = \frac{|-2|}{\sqrt{3+1}} = 1$

所以弦长 $|AB| = 2\sqrt{4-1} = 2\sqrt{3}$

26. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$, $AC = BC = 1$, $AA_1 = 2$. M 为侧棱 BB_1 的中点, 连接 A_1M , C_1M , CM .



(1) 证明: $AC \parallel$ 平面 A_1C_1M ;

(2) 证明: $CM \perp$ 平面 A_1C_1M ;

(3) 求二面角 $C_1 - A_1M - B_1$ 的大小.

【答案】 (1) 证明见详解;

(2) 证明见详解; (3) $\frac{\pi}{3}$

【解析】

【分析】 小问 1: 由于 $AC \parallel A_1C_1$, 根据线面平行判定定理即可证明;

小问 2: 以 C 为原点, CA, CB, CC_1 分别为 x, y, z 轴建立空间坐标系, 根据向量垂直关系即可证明;

小问 3: 分别求得平面 A_1MB_1 与平面 A_1MC_1 的法向量, 根据向量夹角公式即可求解.

小问 1 详解】

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC \parallel A_1C_1$, 且 $AC \not\subset$ 平面 A_1C_1M , $A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1M

所以 $AC \parallel$ 平面 A_1C_1M ;

小问 2 详解】

因为 $AC \perp BC$, 故以 C 为原点, CA, CB, CC_1 分别为 x, y, z 轴建立空间坐标系如图所示:

则 $C(0,0,0), M(0,1,1), A_1(1,0,2), C_1(0,0,2)$,

所以 $\overrightarrow{CM} = (0,1,1), \overrightarrow{A_1M} = (-1,1,-1), \overrightarrow{C_1M} = (0,1,-1)$,

则 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{A_1M} = 0+1-1=0, \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{C_1M} = 0+1-1=0$,

所以 $CM \perp A_1M, CM \perp C_1M$, 又 $A_1M \cap C_1M = M$,

$A_1M \subset$ 平面 A_1C_1M , $C_1M \subset$ 平面 A_1C_1M

故 $CM \perp$ 平面 A_1C_1M ;

【小问 3 详解】

由 $B_1(0,1,2)$, 得 $\overrightarrow{A_1B_1} = (-1,1,0), \overrightarrow{MB_1} = (0,0,1)$

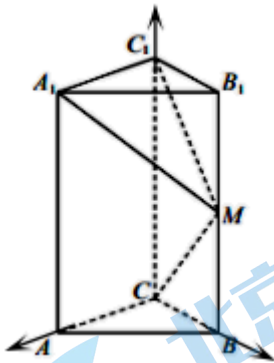
设平面 A_1MB_1 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

则 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0, \vec{n} \cdot \overrightarrow{MB_1} = 0$, 得 $\vec{n} = (1, 1, 0)$

又因为平面 A_1MC_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{CM} = (0, 1, 1)$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{CM} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{CM}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{CM}|} = \frac{1}{2}$$

所以二面角 $C_1 - A_1M - B_1$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$



27. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $(1, 2)$.

(1) 求抛物线 C 的方程及其准线方程;

(2) 经过抛物线 C 的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于两点 M, N , 且与抛物线的准线交于点 Q . 若 $|MN| = 2\sqrt{2}|QF|$, 求直线 l 的方程.

【答案】 (1) 抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$, 准线方程为 $x = -1$

(2) $x - y - 1 = 0$ 或 $x + y - 1 = 0$.

【解析】

【分析】 (1) 将点代入抛物线求出 p 即可得出抛物线方程和准线方程;

(2) 设出直线方程, 与抛物线联立, 表示出弦长 $|MN|$ 和 $|QF|$ 即可求出.

【小问 1 详解】

将 $(1, 2)$ 代入 $y^2 = 2px$ 可得 $4 = 2p$, 解得 $p = 2$,

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$, 准线方程为 $x = -1$;

【小问 2 详解】

由题得 $F(1, 0)$, 设直线方程为 $x = ty + 1, t \neq 0$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立方程 } \begin{cases} x = ty + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{ 可得 } y^2 - 4ty - 4 = 0, \text{ 则 } y_1 + y_2 = 4t,$$

所以 $|MN| = x_1 + x_2 + p = t(y_1 + y_2) + 4 = 4t^2 + 4$,

因为直线 $x = ty + 1$ 与准线 $x = -1$ 交于点 Q , 则 $Q\left(-1, -\frac{2}{t}\right)$,

$$\text{则 } |QF| = \sqrt{(-1-1)^2 + \left(-\frac{2}{t}-0\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{4}{t^2}},$$

因为 $|MN| = 2\sqrt{2}|QF|$, 所以 $4t^2 + 4 = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{4 + \frac{4}{t^2}}$, 解得 $t = \pm 1$,

所以直线 l 的方程为 $x - y - 1 = 0$ 或 $x + y - 1 = 0$.

28. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 一个焦点为 $(2, 0)$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设 O 为原点, 直线 $y = x + m$ ($m \neq 0$) 与椭圆 E 交于不同的两点 A, B , 且与 x 轴交于点 C , P 为线段 OC 的中点, 点 B 关于 x 轴的对称点为 B_1 . 证明: $\triangle PAB_1$ 是等腰直角三角形.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】 (1) 由题知 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $c = 2$, 进而结合 $b^2 = a^2 - c^2$ 求解即可得答案;

(2) 设点 $C(-m, 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $B_1(x_2, -y_2)$, 进而联立 $\begin{cases} y = x + m \\ x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}$ 并结合题意得 $-2\sqrt{2} < m < 0$ 或

$0 < m < 2\sqrt{2}$, 进而结合韦达定理得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB_1} = 0$, 再 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$, 证明 $PM \perp AB$, 进而得

$|PA| = |PB|$, $|PB| = |PB_1|$, 故 $|PA| = |PB_1|$, 综合即可得证明.

【小问 1 详解】

解: 因为椭圆 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 一个焦点为 $(2, 0)$

所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $c = 2$, 所以 $a = \sqrt{6}$, $b^2 = a^2 - c^2 = 2$.

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

【小问 2 详解】

解: 设点 $C(-m, 0)$, 则点 $P\left(-\frac{m}{2}, 0\right)$,

所以联立方程 $\begin{cases} y = x + m \\ x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}$ 得 $4x^2 + 6mx + 3m^2 - 6 = 0$,

所以有 $\Delta = 36m^2 - 16(3m^2 - 6) > 0$, 解得 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$,

因为 $m \neq 0$ ，故 $-2\sqrt{2} < m < 0$ 或 $0 < m < 2\sqrt{2}$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), B_1(x_2, -y_2)$ ，

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{3m}{2}.$$

设向量 $\overrightarrow{PA} = (x_1 + \frac{m}{2}, y_1), \overrightarrow{PB_1} = (x_2 + \frac{m}{2}, -y_2)$ ，

$$\text{所以 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB_1} = (x_1 + \frac{m}{2})(x_2 + \frac{m}{2}) - y_1 y_2 = (x_1 + \frac{m}{2})(x_2 + \frac{m}{2}) - (x_1 + m)(x_2 + m)$$

$$= -\frac{m}{2}(x_1 + x_2) - \frac{3}{4}m^2 = \frac{3m^2}{4} - \frac{3m^2}{4} = 0,$$

所以 $PA \perp PB_1$ ，即 $\angle APB_1 = 90^\circ$ ，

设 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$ ，则 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{3m}{4}, y_0 = x_0 + m = \frac{m}{4}$ 。

$$\text{所以 } k_{PM} = \frac{-\frac{3}{4}m + \frac{m}{4}}{\frac{m}{4} - 0} = -1,$$

又因为 $k_{AB} = 1$ ，所以 $PM \perp AB$ ，

所以 $|PA| = |PB|$ ，

因为点 B 关于 x 轴的对称点为 B_1 。

所以 $|PB| = |PB_1|$ ，

所以 $|PA| = |PB_1|$ ，

所以 $\triangle PAB_1$ 是等腰直角三角形。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯