高 三 数 学

（试卷满分 150 分，考试时间为 120 分钟）

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1．已知集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}|(x+2)(x-1)<0\}$，$B=\{-2,-1\}$，那么 $A\cup B$ 等于

(A) $\{-2,-1,0,1\}$　　(B) $\{-2,-1,0\}$　　(C) $\{-2,-1\}$　　(D) $\{-1\}$

2．已知 i 为虚数单位，复数 $z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$，则 $\bar{z}$ 对应的点位于

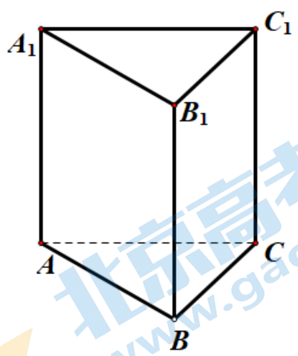
(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3. 设 $\theta\in\mathbf{R}$，则“$\sin\theta=\cos\theta$”是“$\cos2\theta=0$”的

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

4. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp BC$．则下列两条直线中，不互相垂直的是



(A) AA_1 和 BC　　(B) AB_1 和 BC_1

(C) A_1B 和 BC　　(D) AB 和 B_1C

5. 设 E,F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AB,BC 上的点，且 $AE=\dfrac{1}{2}AB$，$BF=\dfrac{2}{3}BC$，如果 $\overrightarrow{EF}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$（$m$，$n$ 为实数），那么 $m+n$ 的值为

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 1

6．若过点 $(2,1)$ 的圆与两坐标轴都相切，则圆心到直线 $2x-y-3=0$ 的距离为

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　(B) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　(C) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　(D) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

7．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 的最小正周期为4π，则

(A) 函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称

(B) 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称

(C) 函数 $f(x)$ 图像上所有点向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后，所得图像关于原点对称

(D) 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调递增

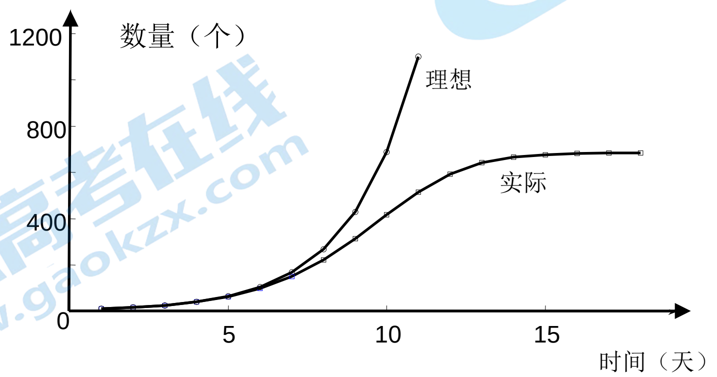
8．设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为抛物线上一点，$PA\perp l$，A 为垂足．若直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$，则 $|PF|=$

(A) $4\sqrt{3}$ (B) 6 (C) 8 (D) 16

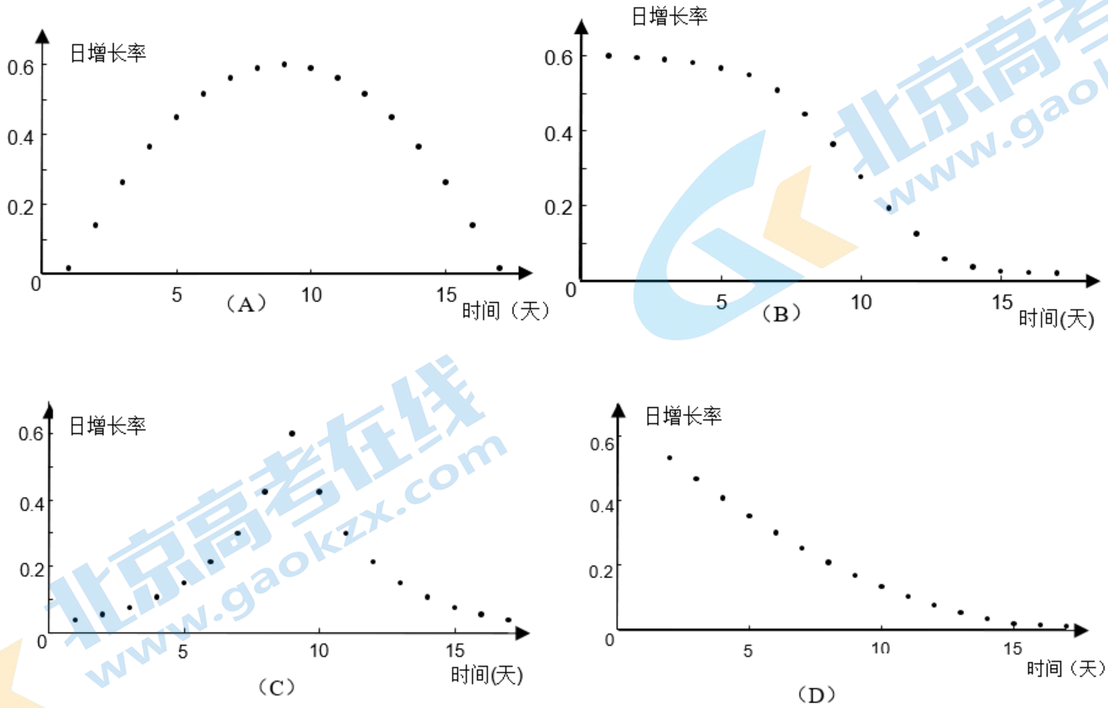
9．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2mx+m+m^2, x\le 2,\\ 2^{x+1}, x>2\end{cases}$．若当 $x=2$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值，则 m 的取值范围是

(A) $[-1,4]$ (B) $[2,4]$ (C) $[-1,2]$ (D) $[-1,1]$

10．数列 $\{a_n\}$ 表示第 n 天午时某种细菌的数量．细菌在理想条件下第 n 天的日增长率 $r_n=0.6$（$r_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$）．当这种细菌在实际条件下生长时，其日增长率 r_n 会发生变化．下图描述了细菌在理想和实际两种状态下细菌数量 Q 随时间的变化规律．那么，对这种细菌在实际条件下日增长率 r_n 的规律描述正确的是



关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。



二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

11. 在$(x^2+\dfrac{2}{x^3})^5$的展开式中，常数项为______.（用数字作答）.

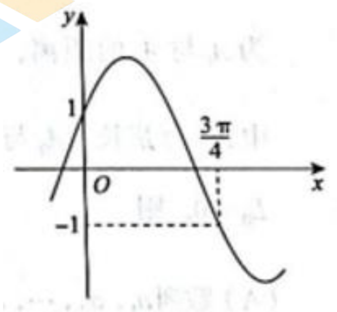
12. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_n\cdot a_{n+1}=-2$，则$S_{100}=$________.

13. 双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线为等边三角形$OAB$的边$OA,OB$所在直线，直线$AB$过双曲线的焦点，且$|AB|=2$，则$a=$________.

14. 已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$的部分图像如图所示.

（1）函数$f(x)$的最小正周期为__________.

（2）将函数$f(x)$的图像向右平移$t(t>0)$个单位长度，得到函数$g(x)$的图像。若函数$g(x)$为奇函数，则t的最小值为_________.



关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

15．已知曲线C的方程是$(x-\dfrac{|x|}{x})^2+(y-\dfrac{|y|}{y})^2=8$，给出下列三个结论：

①曲线 C 与两坐标轴有公共点；

②曲线C既是中心对称图形，又是轴对称图形；

③若点 P，Q 在曲线 C 上，则$|PQ|$的最大值是$6\sqrt{2}$；

④曲线 C 围成图形的面积大小属于区间$(40,44)$.

所有正确结论的序号是______.

三、解答题（共 85 分）

16.（本小题满分 13 分）

在$\triangle ABC$中，$\sin A=\sqrt{2}\sin B$，$b=\sqrt{2}$．再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，并解决下面的问题：

（Ⅰ）求角B的大小；

（Ⅱ）求$\triangle ABC$的面积.

条件①：$c=4$；

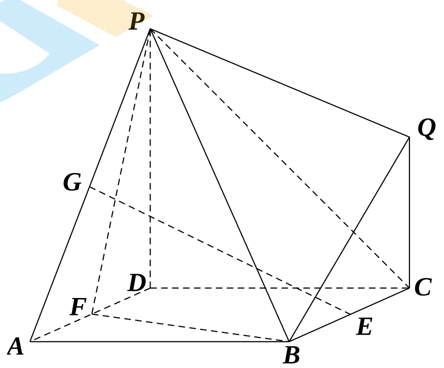
条件②：$b^2-a^2=c^2-\sqrt{2}ac$；

条件③：$a\cos B=b\sin A$．

注：如果选择的条件不符合要求，不给分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

17.（本小题满分 14 分）

如图所示的多面体中，面$ABCD$是边长为 2 的正方形，平面$PDCQ\perp$平面$ABCD$，$PD\perp DC$，E，F，G分别为棱BC，AD，PA的中点.



（Ⅰ）求证：$EG\,/\!/$平面$PDCQ$；

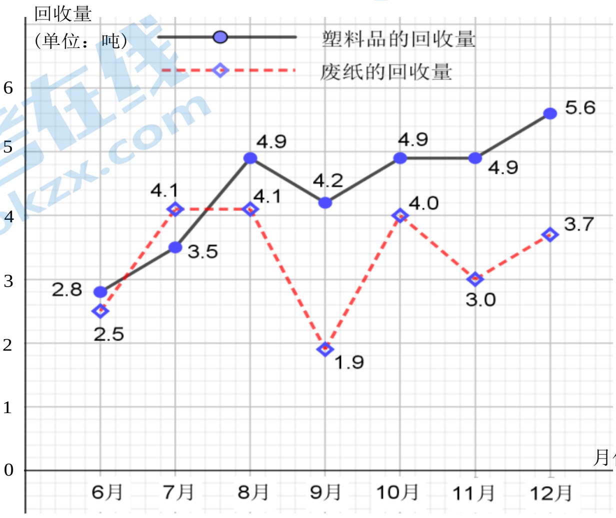
（Ⅱ）已知二面角$P-BF-C$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，求四棱锥$P-ABCD$的体积.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

18.（本小题满分 13 分）

2020 年 5 月 1 日起，北京市实行生活垃圾分类，分类标准为厨余垃圾、可回收物、有害垃圾和其它垃圾四类. 生活垃圾中有一部分可以回收利用，回收 1 吨废纸可再造出 0.8 吨好纸，降低造纸的污染排放，节省造纸能源消耗.

某环保小组调查了北京市某垃圾处理场 2020 年 6 月至 12 月生活垃圾回收情况，其中可回收物中废纸和塑料品的回收量（单位：吨）的折线图如下图：



（Ⅰ）从 2020 年 6 月至 12 月中随机选取 1 个月，求该垃圾处理厂可回收物中废纸和塑料品的回收量均超过 4.0 吨的概率；

（Ⅱ）从 2020 年 7 月至 12 月中随机选取 4 个月，记 X 为这几个月中回收废纸再造好纸超过 3.0 吨的月份个数. 求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）假设 2021 年 1 月该垃圾处理场可回收物中塑料品的回收量为 a 吨. 当 a 为何值时，自 2020 年 6 月至 2021 年 1 月该垃圾处理场可回收物中塑料品的回收量的方差最小.（只需写出结论，不需证明）

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

19.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=ae^{x}-x$， $g(x)=x-a\ln x\ (a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若 $a=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求 $g(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同的最小值，求 a 的值.

20.（本小题满分 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，点 $T(2,1)$ 在椭圆上．与 OT 平行的直线 l 交椭圆于 P，Q 两点，直线 TP，TQ 分别与 x 轴正半轴交于 M，N 两点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）求证：$|OM|+|ON|$ 为定值.

21.（本小题满分 15 分）

若无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数．且对于 $\forall i,j\in\mathbf{N}^*,i<j$，都存在 $k>j$，使得 $a_k=a_ia_j-a_i-a_j$，则称数列 $\{a_n\}$ 满足性质 P.

（1）判断下列数列是否满足性质 P，并说明理由.

①$a_n=n$， $n=1$， 2， 3， …；

②$b_n=n+2$， $n=1$， 2， 3， ….

（2）若数列 $\{a_n\}$ 满足性质 P，且 $a_1=1$，求证：集合 $\{n\in\mathbf{N}^*|\ a_n=3\}$ 为无限集；

（3）若周期数列 $\{a_n\}$ 满足性质 P，求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。

参考答案

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1.【分析】先求出集合 A，由此利用并集的定义能求出 $A\cup B$ 的值.

【解答】解：$\because B=\{-2,\ -1\}$，

集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|\ (x+2)(x-1)<0\}=\{-1,\ 0\}$，

$\therefore A\cup B=\{-2,\ -1,\ 0\}$.

故选：B.

【点评】本题考查并集的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意并集定义的合理运用.

2.【分析】根据已知条件，结合复数的四则运算，以及复数的几何意义，即可求解.

【解答】解：$z=\dfrac{1+2i}{1-3i}=\dfrac{(1+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$，

则复数 z 对应的点 $(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2})$ 位于第二象限.

故选：B.

【点评】本题主要考查复数的四则运算，以及复数的几何意义，属于基础题.

3.【分析】根据充分必要条件的定义以及三角函数的性质判断即可.

【解答】解：若 $\sin\theta=\cos\theta$，则 $\theta=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$(k\in z)$，

故 $2\theta=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，故 $\cos2\theta=0$，是充分条件，

若 $\cos2\theta=0$，则 $2\theta=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$\theta=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$，$(k\in z)$，

不是必要条件，

故选：A.

【点评】本题考查了充分必要条件，考查三角函数的性质，是一道基础题.

4.【分析】根据直线与平面垂直的判定定理和性质，判断即可.

【解答】解：对于 A，因为 $AA_1\perp$平面 ABC，$BC\subset$平面 ABC，所以 $AA_1\perp BC$；

对于 B，AB_1 与 BC_1 不一定垂直；

对于 C，因为 $AA_1\perp BC$，$AB\perp BC$，且 $AA_1\cap AB=A$，所以 $BC\perp$平面 ABB_1A_1，$AB_1\perp BC$；

对于 D，因为 $AA_1\perp$平面 ABC，$CC_1\parallel AA_1$，所以 $CC_1\perp$平面 ABC，所以 $CC_1\perp AB$，

又 $AB\perp BC$，且 $BC\cap CC_1=C$，所以 $AB\perp$平面 BCC_1B_1，

又 $B_1C\subset$平面 BCC_1B_1，所以 $AB\perp B_1C$.

故选：B.

【点评】本题考查了空间中的垂直关系应用问题，也考查了推理与判断能力，是基础题.

5. 【 分 析 】 如 图 所 示 ， $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}$ $=$ $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ $=$ -

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

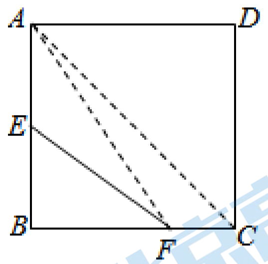
$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. 即可求得 m，n 即可.

【解答】解：如图所示，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

$\therefore m=-\frac{1}{6}$，$n=\frac{2}{3}$，$\therefore m+n=\frac{1}{2}$，

故选：C.



【点评】本题考查了向量的线性运算，合理利用向量的平行四边形法则，三角形法则，是解题关键，属于基础题.

6.【分析】由已知设圆方程为 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$，(2，1）代入，能求出圆的方程，再代入点到直线的距离公式即可.

【解答】解：由题意可得所求的圆在第一象限，设圆心为（a，a），则半径为 a，$a>0$.

故圆的方程为 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$，再把点（2，1）代入，求得 $a=5$ 或 1，

故要求的圆的方程为 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ 或 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

故所求圆的圆心为（5，5）或（1，1）；

故圆心到直线 $2x-y-3=0$ 的距离 $d=\frac{|2\times5-5-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 或 $d=\frac{|2\times1-1-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；

故选：B.

【点评】本题主要考查用待定系数法求圆的标准方程的方法，求出圆心坐标和半径的值，是解题的关键，属于基础题.

7.【分析】函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 的最小正周期为 4π，求出 ω，可得 $f(x)$ 解析式，对各选项进行判断即可

【解答】解：函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 的最小正周期为 4π，

$\therefore\frac{2\pi}{\omega}=4\pi$，

可得 $\omega=\frac{1}{2}$.

那么 $f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6})$.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

由对称中心横坐标方程：$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

可得：$x=2k\pi-\frac{\pi}{3}$

∴A 不对；

由对称轴方程：$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

可得：$x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，

∴B 不对；

函数 $f(x)$ 图象上的所有点向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位，可得：$\sin[\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{6}]=\sin 2x$，图象关于原点对称．

∴C 对．

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

可得：$-\frac{4\pi}{3}+4k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+4k\pi$

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(0，\pi)$ 上不是单调递增．

∴D 不对；

故选：C．

【点评】本题主要考查对三角函数的化简能力和三角函数的图象和性质的运用，属于中档题．

8.【分析】先根据抛物线方程求出焦点坐标和准线方程，根据直线 AF 的斜率得到 AF 方程，与准线方程联立，解出 A 点坐标，因为 PA 垂直准线 l，所以 P 点与 A 点纵坐标相同，再代入抛物线方程求 P 点横坐标，利用抛物线的定义就可求出$|PF|$长．

【解答】解：∵抛物线方程为 $y^2=8x$，

∴焦点 $F(2，0)$，准线 l 方程为 $x=-2$，

∵直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$，直线 AF 的方程为 $y=-\sqrt{3}(x-2)$，

由$\begin{cases}x=-2\\y=-\sqrt{3}(x-2)\end{cases}$，可得 A 点坐标为 $(-2，4\sqrt{3})$，

∵$PA\perp l$，A 为垂足，

∴P 点纵坐标为 $4\sqrt{3}$，代入抛物线方程，得 P 点坐标为 $(6，4\sqrt{3})$，

∴$|PF|=|PA|=6-(-2)=8$，

故选：C．

【点评】本题主要考查抛物线的几何性质，定义的应用，以及曲线交点的求法，属于综合题．

9.【分析】由题意，$0<a<1$ 时，显然成立；$a>1$ 时，$f(x)=\log_a x$ 关于 y 轴的对称函数为 $f(x)=\log_a(-x)$，则 $\log_a 4>1$，即可得到结论．

【解答】解：当 $0<a<1$ 时，$f(x)=\log_a x$ 关于 y 轴的对称函数为 $f(x)=\log_a(-x)$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

与 $y=|x+3|$ 只有唯一的交点，故 $0<a<1$ 时，显然成立；

当 $a>1$ 时，$f(x)=\log_a x$ 关于 y 轴的对称函数为 $f(x)=\log_a(-x)$，则 $\log_a 4>1$，$\therefore 1<a<4$，

综上所述，a 的取值范围是（0，1）∪（1，4），

故选：D．

【点评】本题主要考查分段函数的应用，考查函数的解析式，属于中档题．

10．【分析】由图象可知，第一天到第六天，实际情况与理想情况重合，$r_1=r_2=r_6=0.6$ 为定值，而实际情况在第 10 天后增长率是降低的，并且降低的速度是变小的，即可得出结论．

【解答】解：由图象可知，第一天到第六天，实际情况与理想情况重合，

$r_1=r_2=r_6=0.6$ 为定值，而实际情况在第 10 天后增长率是降低的，并且降低的速度是变小的，

故选：B．

【点评】本题考查散点图，考查数形结合的数学思想，比较基础，

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

11．【分析】在 $(x^2+\frac{2}{x^3})^5$ 展开式的通项公式中，令 x 的幂指数等于零，求出 r 的值，即可求出展开式的常数项．

【解答】解：由于 $(x^2+\frac{2}{x^3})^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r\bullet 2^r\bullet x^{10-5r}$，

令 $10-5r=0$，解得 $r=2$，故展开式的常数项是 40，

故答案为 40．

【点评】本题主要考查二项式定理的应用，二项展开式的通项公式，求展开式中某项的系数，属于中档题．

12．【分析】根据 $a_1=1$，$a_1a_2=-2$，得 $a_2=-2$，$a_3=1$，$a_4=-2$，，从而可发现 $\{a_n\}$ 中所有的奇数项均为 1，所有的偶数项均为 -2，进一步利用 $S_{100}=a_1+a_2+\bullet+a_{99}+a_{100}=1-2+\bullet+1-2=50\times(-1)$ 进行求解即可．

【解答】解：根据题意，由 $a_1=1$，$a_1a_2=-2$，得 $a_2=-2$，

又 $a_2a_3=-2$，得 $a_3=1$，；$a_3a_4=-2$，得 $a_4=-2$，，

所以 $\{a_n\}$ 中所有的奇数项均为 1，所有的偶数项均为 -2，

所以 $S_{100}=a_1+a_2+\bullet+a_{99}+a_{100}=1-2+\bullet+1-2=50\times(-1)=-50$．

故答案为：-50．

【点评】本题考查数列的递推公式，分组求和法，考查学生逻辑推理和数学运算的能力，属于基础题．

13．【分析】由等边三角形和双曲线的对称性，可得，$\angle OAF=30°$，再由渐近线方程，可得 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，再由 a，b，c 的关系和 c 的值，即可计算得到 a．

【解答】解：由于△OAB（O 为坐标原点）是等边三角形，

则由对称可得，$\angle AOF=30°$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

即有 $\tan30°=\frac{b}{a}$，即 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

又 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$，

则 $a=\frac{3}{2}$.

故答案为：$\frac{3}{2}$.

【点评】本题考查双曲线方程和性质，考查双曲线的渐近线方程和离心率的求法，属于基础题.

14.【分析】直接利用正弦定理的应用求出结果.

【解答】解：如图所示，点 D 在线段 AB 上，$\angle CAD=30°$，$\angle CDB=50°$，$DB=4$，

所以 $AB=BD+AD=4+AD$，

则 AB 为定值，

所以 $\angle ACD=\angle CDB-\angle CAD=50°-30°=20°$，

$\angle ADC=180°-\angle CDB=130°$，

所以在 $\triangle ADC$ 中，

利用正弦定理：$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$，

则 $AC=\frac{AD\cdot\sin\angle ADC}{\sin\angle ACD}=\frac{AD\sin130°}{\sin20°}$，

故 AC 为定值；

AB，AC，$\angle CAB$ 都为定值，$\triangle ABC$ 唯一确定，

故答案为：AD.

【点评】本题考查的知识要点：正弦定理的应用，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于基础题.

15.【分析】根据题意，对绝对值里面的正负分类讨论求出方程，作出图象，由此分析 4 个结论，即可得答案.

【解答】解：根据题意，曲线 C 的方程是 $(x-\frac{|x|}{x})^2+(y-\frac{|y|}{y})^2=8$，必有 $x\neq0$ 且 $y\neq0$，

当 $x>0$，$y>0$ 时，方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=8$，

当 $x>0$，$y<0$ 时，方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=8$，

当 $x<0$，$y>0$ 时，方程为 $(x+1)^2+(y-1)^2=8$，

当 $x<0$，$y<0$ 时，方程为 $(x+1)^2+(y+1)^2=8$，

作出图象：

依次分析 4 个结论：

对于①，由于 $x\neq0$，$y\neq0$，曲线 C 与坐标轴没有交点，故①错误；

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

对于②，由图可知，曲线 C 既是中心对称图形，又是轴对称图形，故②正确；

对于③，若点 P，Q 在曲线 C 上，则当且仅当 P、Q 与圆弧所在的圆心共结时取得最大值，

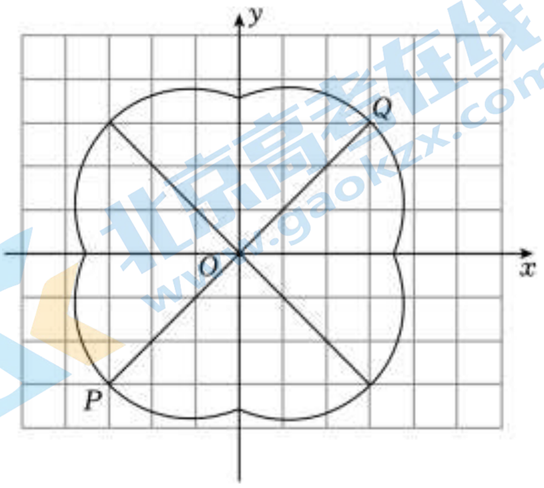
故$|PQ|$的最大值是圆心距加两个半径，为 $2\sqrt{2}+4\sqrt{2}=6\sqrt{2}$，故③正确；

对于④，当 $x>0$，$y>0$ 时，方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=8$ 与坐标轴的交点（$\sqrt{7}+1$，0），（0，$\sqrt{7}+1$），

则第一象限面积为 $S_1>2\sqrt{7}+1+\frac{1}{4}\times(2\sqrt{2})^2\times\pi=2\pi+2\sqrt{7}-1$，

故总的面积 $S>8\pi+8\sqrt{7}-1>44$，故④错误.

故答案为：②③.



【点评】本题考查考查曲线方程的图象及性质、涉及绝对值的含义、圆的性质等，是中档题.

三、解答题（共 85 分）

16.【分析】(*I*) 由已知结合正弦定理可求 a，b，然后结合所选条件，结合余弦定理及正弦定理可求 $\cos B$，进而可求 B；

(*II*) 由已知结合正弦定理可求 A，然后结合三角形面积公式可求.

【解答】解：(Ⅰ) $\because \sin A=\sqrt{2}\sin B$，$b=\sqrt{2}$，

$\therefore a=\sqrt{2}b=2$，

若选①：$c=4$，此时 $a+b<c$，三角形无解，

若选②：$b^2-a^2=c^2-\sqrt{2}ac$，

$\therefore a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$，

由余弦定理得，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{4}$，

若选③：$a\cos B=b\sin A$，

则 $\sin A\cos B=\sin B\sin A$，

又 $ainA>0$，$\therefore \cos B=\sin B$，

即 $\tan B=1$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

又∵$B\in(0,\pi)$，∴$B=\dfrac{\pi}{4}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $B=\dfrac{\pi}{4}$，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，

由正弦定理得，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

∴$\sin A=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=1$，∴$A=\dfrac{\pi}{2}$，

∴$c=b=\sqrt{2}$，

∴△ABC 的面积为$\dfrac{1}{2}bc=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.

【点评】本题主要考查了余弦定理，正弦定理及三角形面积公式在求解三角形中的应用，属于中档题．

17.【分析】（Ⅰ）取 PD 中点 H，连接 GH，HC，通过证明 $EG\parallel HC$．然后证明 $EG\parallel$ 平面 $PDCQ$.

（Ⅱ）以 D 为原点，射线 DA，DC，DP 分别为 x，y，z 轴正方向，建立空间直角坐标系．设 $PD=a$，求出相关点的坐标，求出平面 $ABCD$ 的一个法向量，平面 PFB 的一个法向量，求出$|\cos<\vec{m},\vec{n}>|$，推出 PD，然后求解几何体的体积．

【解答】（本小题共 14 分）

证明：（Ⅰ）取 PD 中点 H，连接 GH，HC，

因为 $ABCD$ 是正方形，所以 $AD\parallel BC$，$AD=BC$.

因为 G，H 分别是 PA，PD 中点，所以 $GH\parallel AD$，$GH=\dfrac{1}{2}AD$.

又因为 $EC\parallel AD$ 且 $EC=\dfrac{1}{2}AD$，

所以 $GH\parallel EC$，$GH=EC$，

所以四边形 $GHCE$ 是平行四边形，….（3 分）

所以 $EG\parallel HC$.

又因为 $EG\not\subset$平面 $PDCQ$，$HC\subset$平面 $PDCQ$

所以 $EG\parallel$ 平面 $PDCQ$．….（5 分）

解：（Ⅱ）因为平面 $PDCQ\perp$平面 $ABCD$，

平面 $PDCQ\cap$平面 $ABCD=CD$，$PD\perp DC$，$PD\subset$平面 $PDCQ$，

所以 $PD\perp$平面 $ABCD$．….（6 分）

如图，以 D 为原点，射线 DA，DC，DP 分别为 x，y，z 轴正方向，建立空间直角坐标系．

设 $PD=a$，则 $P(0,0,a)$，$F(1,0,0)$，$B(2,2,0)$．…（7 分）

因为 $PD\perp$底面 $ABCD$，所以平面 $ABCD$ 的一个法向量为$\vec{m}=(0,0,1)$．….（8 分）

设平面 PFB 的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{PF}=(1,0,-a)$，$\overrightarrow{FB}=(1,2,0)$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

则$\begin{cases}\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{n}=0\\ \overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{n}=0\end{cases}$

即$\begin{cases}x-az=0\\ x+2y=0\end{cases}$

令 $x=1$，得 $z=\frac{1}{a}$，$y=-\frac{1}{2}$，所以$\overrightarrow{n}=(1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{a})$ ….（10 分）

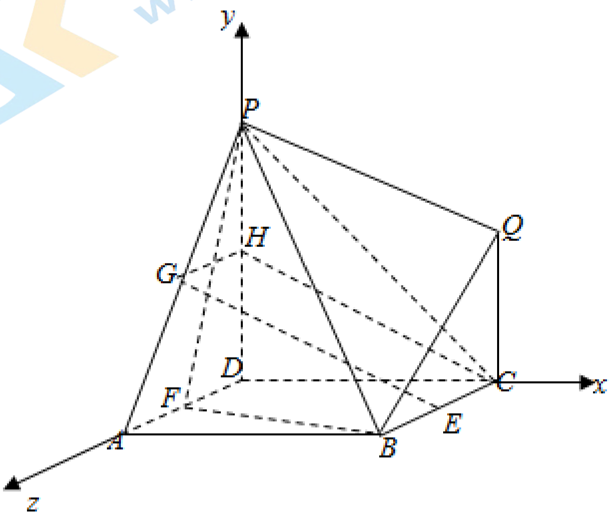
由已知，二面角 $P-BF-C$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$，

所以得$|\cos<\overrightarrow{m},\ \overrightarrow{n}>|=|\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}|=\frac{|\frac{1}{a}|}{\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{a^2}}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，….（11 分）

解得 $a=2$，所以 $PD=2$． ….（13 分）

因为 PD 是四棱锥 $P-ABCD$ 的高，

所以其体积为 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times2\times4=\frac{8}{3}$． ….（14 分）



【点评】本题考查空间向量求解二面角的平面角，几何体的体积的求法，直线与平面平行的判断．考查空间想象能力以及计算能力．

18.【分析】(Ⅰ) 记“该垃圾处理厂可回收物中废纸和塑料品的回收量均超过 4.0 吨”为事件 A，推出只有 8 月份的可回收物中废纸和塑料品的回收量均超过 4.0 吨，然后求解概率．

(Ⅱ) X 的所有可能取值为 0，1，2，求出概率得到分布列，然后求解期望即可．

(Ⅲ) 求出 $a=4.4$，判断当添加的新数 a 等于原几个数的平均值时，方差最小．

【解答】解：(Ⅰ) 记“该垃圾处理厂可回收物中废纸和塑料品的回收量均超过 4.0 吨”为事件 A……………… (1 分)

由题意，只有 8 月份的可回收物中废纸和塑料品的回收量均超过 4.0 吨…………（2 分）

所以 $P(A)=\frac{1}{7}$． …………………………

(Ⅱ) 因为回收利用 1 吨废纸可再造出 0.8 吨好纸

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

所以 6 月至 12 月回收的废纸可再造好纸超过 3.0 吨的月份有：7 月、8 月、10 月，共 3 个月．

X 的所有可能取值为 0，1，2．…………………………（5 分）

$P(X=0)=\dfrac{C_3^0C_4^2}{C_7^2}=\dfrac{6}{21}=\dfrac{2}{7}$,

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1\cdot C_4^1}{C_7^2}=\dfrac{12}{21}=\dfrac{4}{7}$,

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_4^0}{C_7^2}=\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$…………………………（8 分）

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

…………………………（9 分）

$E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$…………………………（11 分）

（Ⅲ）$a=4.4$…………………………（14 分）

当添加的新数 a 等于原几个数的平均值时，方差最小．

【点评】本题考查离散型随机变量分布列以及期望的求法，考查分析问题解决问题的能力，是中档题．

19．【分析】（Ⅰ）求出 $f'(x)=-e^{-kx}(kx-2)(x+1)(k<0)$，令 $f'(x)=0$，解得：$x=-1$ 或 $x=\frac{2}{k}$．按两根 -1，$\frac{2}{k}$ 的大小关系分三种情况讨论即可；

（Ⅱ）由（Ⅰ）分情况求出函数 $f(x)$ 的极大值，令其为 $3e^{-2}$，然后解 k 即可，注意 k 的取值范围；

【解答】解：（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 **R**，

$f'(x)=-ke^{-kx}(x^2+x-\frac{1}{k})+e^{-kx}(2x+1)=e^{-kx}[-kx^2+(2-k)x+2]$，即 $f'(x)=-e^{-kx}(kx-2)(x+1)(k<0)$．

令 $f'(x)=0$，解得：$x=-1$ 或 $x=\frac{2}{k}$．

①当 $k=-2$ 时，$f'(x)=2e^{2x}(x+1)^2\geqslant 0$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,+\infty)$；

②当 $-2<k<0$ 时，$f(x)$，$f'(x)$ 随 x 的变化情况如下：

x	$(-\infty,\frac{2}{k})$	$\frac{2}{k}$	$(\frac{2}{k},-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,\ \frac{2}{k})$ 和（-1，+∞），单调递减区间是 $(\frac{2}{k},\ -1)$.

③当 $k<-2$ 时，$f(x)$，$f'(x)$ 随 x 的变化情况如下：

x	$(-\infty,\ -1)$	-1	$(-1,\ \frac{2}{k})$	$\frac{2}{k}$	$(\frac{2}{k},\ +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是（-∞，-1）和 $(\frac{2}{k},\ +\infty)$，单调递减区间是 $(-1,\ \frac{2}{k})$.

综上，当 $k=-2$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是（-∞，+∞）；当 $-2<k<0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,\ \frac{2}{k})$ 和（-1，+∞），单调递减区间是 $(\frac{2}{k},\ -1)$；

当 $k<-2$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是（-∞，-1）和 $(\frac{2}{k},\ +\infty)$，单调递减区间是 $(-1,\ \frac{2}{k})$.

（Ⅱ）①当 $k=-2$ 时，$f(x)$ 无极大值.

②当 $-2<k<0$ 时，$f(x)$ 的极大值为 $f(\frac{2}{k})=e^{-2}(\frac{4}{k^2}+\frac{1}{k})$，

令 $e^{-2}(\frac{4}{k^2}+\frac{1}{k})=3e^{-2}$，即 $\frac{4}{k^2}+\frac{1}{k}=3$，解得 $k=-1$ 或 $k=\frac{4}{3}$（舍）.

③当 $k<-2$ 时，$f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=-\frac{e^k}{k}$.

因为 $e^k<e^{-2}$，$0<-\frac{1}{k}<\frac{1}{2}$，所以 $-\frac{e^k}{k}<\frac{1}{2}e^{-2}$.

因为 $\frac{1}{2}e^{-2}<3e^{-2}$，所以 $f(x)$ 的极大值不可能等于 $3e^{-2}$，

综上所述，当 $k=-1$ 时，$f(x)$ 的极大值等于 $3e^{-2}$.

【点评】本题考查利用导数研究函数的单调性及求函数极值问题，考查分类讨论思想，考查学生逻辑推理能力，属中档题.

20.【分析】（Ⅰ）根据题意，由椭圆的几何性质分析可得 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ a^2-b^2=c^2\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，解可得 a、b 的值，将 a、b 的值代入椭圆方程，即可得答案；

（Ⅱ）根据题意，假设直线 TP 或 TQ 的斜率不存在，联立直线与椭圆的方程分析可得直线 l 与椭圆 C 相切，不合题意，则直线 TP 和 TQ 的斜率存在，进而设 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，由此表示直线 TP 或 TQ

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

的方程，联立直线与椭圆的方程，由根与系数的关系表示$|OM|+|ON|$的值，即可得答案．

【解答】解：（Ⅰ）由题意$\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\\ a^2-b^2=c^2,\\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

解得：$a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}$

故椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$；

（Ⅱ）根据题意，假设直线 TP 或 TQ 的斜率不存在，则 P 点或 Q 点的坐标为（2，－1），

直线 l 的方程为$y+1=\dfrac{1}{2}(x-2)$，即 $y=\dfrac{1}{2}x-2$.

联立方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=\dfrac{1}{2}x-2\end{cases}$，得 $x^2-4x+4=0$，

此时，直线 l 与椭圆 C 相切，不合题意．

故直线 TP 和 TQ 的斜率存在．

设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，

则直线TP：$y-1=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}(x-2)$，

直线TQ：$y-1=\dfrac{y_2-1}{x_2-2}(x-2)$

故 $|OM|=2-\dfrac{x_1-2}{y_1-1}$，$|ON|=2-\dfrac{x_2-2}{y_2-1}$

由直线OT：$y=\dfrac{1}{2}x$，设直线PQ：$y=\dfrac{1}{2}x+t$（$t\neq0$）

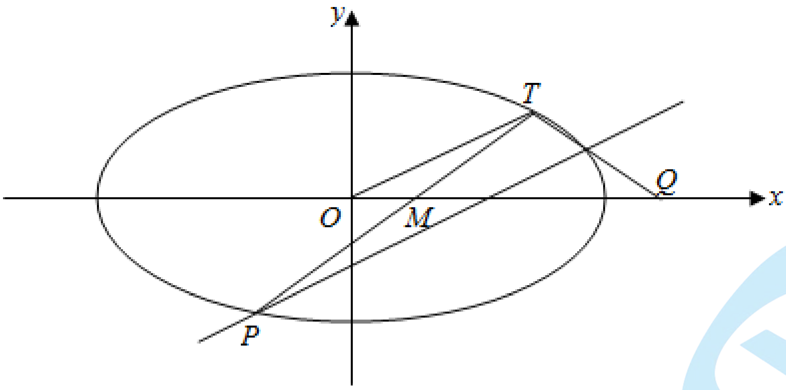
联立方程，$\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=\dfrac{1}{2}x+t\end{cases}\Rightarrow x^2+2tx+2t^2-4=0$

当$\Delta>0$时，$x_1+x_2=-2t$，$x_1\cdot x_2=2t^2-4$，

$$|OM|+|ON|=4-\left(\frac{x_1-2}{y_1-1}+\frac{x_2-2}{y_2-1}\right)=4-\left(\frac{x_1-2}{\frac{1}{2}x_1+t-1}+\frac{x_2-2}{\frac{1}{2}x_2+t-1}\right)=$$

$$4-\frac{x_1x_2+(t-2)(x_1+x_2)-4(t-1)}{\frac{1}{4}x_1x_2+\frac{1}{2}(t-1)(x_1+x_2)+(t-1)^2}=4-\frac{2t^2-4+(t-2)(-2t)-4(t-1)}{\frac{1}{4}(2t^2-4)+\frac{1}{2}(t-1)\cdot(-2t)+(t-1)^2}=4.$$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。



【点评】本题考查直线与椭圆的位置关系，涉及椭圆的几何性质，属于综合题，注意提升计算的能力．

21．【分析】（Ⅰ）由$\frac{2+6+8+10}{4}$不为整数，数列 1，5，9，13，17 为等差数列，结合新定义即可得到结论；

（Ⅱ）讨论 k 为偶数或奇数，结合新定义即可得证；

（Ⅲ）在数列 A 中任意两项 a_s，a_t，（$s\neq t$），作差可得数列中任意两项之差都是 k 的倍数，$k\in\{2，3，\cdots，\mathbf{N}-1\}$，讨论数列 A 的项数超过 8，推得数列 A 的项数至多 7 项．讨论数列 A 的项数为 7，数列的项数小于或等于 6，奇数可得所求最大值．

【解答】解：（Ⅰ）由$\frac{2+6+8+10}{4}$不为整数，

可得数列 2，4，6，8，10 不是 4 阶平衡数列；

数列 1，5，9，13，17 为首项为 1，公差为 4 的等差数列，

则数列 1，5，9，13，17 是 4 阶平衡数列；

（Ⅱ）证明：若 N 为偶数，设 $k=2m$（$m\in\mathbf{N}^*$），考虑 1，2，3，…，k 这 k 项，其和为 $S=\frac{k(k+1)}{2}$．

所以这 k 项的算术平均值为：$\frac{S}{k}=\frac{k+1}{2}=\frac{2m+1}{2}$，此数不是整数；

若 k 为奇数，设 $k=2m+1$，$m\in\mathbf{N}^*$；考虑 1，2，3，4，5，…，$k+1$；

这 k 项，其和为 $S'=\frac{k(k+1)}{2}+1$，所以这 k 项的算术平均数为：$\frac{S'}{k}=\frac{k+1}{2}+\frac{1}{k}=m+1+\frac{1}{2m+1}$，

此数不是整数；故数列 A，1，2，3，4，…，N 不是"k 阶平衡数列"，其中 $k\in\{2，3，4，\cdots N\}$；

（Ⅲ）在数列 A 中任意两项 a_s，a_t，（$s\neq t$），

对于任意 $k\in\{2，3，4，5，\cdots，N\}$，在 A 中任意取两项 a_s，a_t，相异的 $k-1$ 项，

并设这 $k-1$ 项和为 S_n．由题意可得 S_n+a_s，S_n+a_t 都是 k 的倍数，

即 $S_n+a_s=pk$，$S_n+a_t=qk$，（p，q 为整数），可得 $a_s-a_t=(p-q)k$，

即数列中任意两项之差都是 k 的倍数，$k\in\{2，3，\cdots，\mathbf{N}-1\}$，

因此所求数列 A 的任意两项之差都是 2，3，…，$\mathbf{N}-1$ 的倍数，

如果数列 A 的项数超过 8，那么 a_2-a_1，a_3-a_2，…，a_8-a_7 均为 2，3，4，5，6，7 的倍数，

即 a_2-a_1，a_3-a_2，…，a_8-a_7 均为 420 的倍数，（420 为 2，3，4，5，6，7 的最小公倍数），

$a_8-a_1=a_2-a_1+a_3-a_2+..+a_8-a_7>420\times7=2940$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

即 $a_8>2940+a_1>2940$，这与 $a_N\leqslant 2019$ 矛盾，

故数列 A 的项数至多 7 项．

数列 A 的项数为 7，那么 a_2-a_1，a_3-a_2，…，a_7-a_6 均为 2，3，4，5，6 的倍数，

即 a_2-a_1，a_3-a_2，…，a_7-a_6 均为 60 的倍数，（60 为 2，3，4，5，6 的最小公倍数），

又 $a_7\leqslant 2019$，且 $a_1<a_2<\cdots<a_7$，

所以 $a_6\leqslant 2019-60$，$a_5\leqslant 2019-2\times 60$，…，$a_1\leqslant 2019-6\times 60$，

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_7\leqslant 2019+（2019-60）+\cdots+（2019-6\times 600=12873$，

当且仅当 $a_i=2019-60（7-i）=1599+60i（i=1，2\cdots，7）$，$a_1+a_2+\cdots+a_7$ 取得最大值 12873；

验证可得此数列为“k 阶平衡数列”，$k\in\{2，3，\cdots，N\}$，

如果数列的项数小于或等于 6，由 $a_N\leqslant 2019$，

可得数列中所有项的之和小于或等于 $2019\times 6=12114$，

综上可得数列 A 中所有元素之和的最大值为 12873．

【点评】本题考查新定义的理解和运用，考查分类讨论思想和化简运算能力、推理能力，属于难题．

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

微信搜一搜
京考一点通